

Física breve: mecánica de fluidos, movimiento armónico simple y ondas mecánicas

Oscar Robles Vásquez
José L. García Luna
Agustín Martínez Ruvalcaba
Jaime R. Pérez Leño



Física breve: mecánica de fluidos, movimiento armónico simple y ondas mecánicas



Física breve: mecánica de fluidos, movimiento armónico simple y ondas mecánicas

Oscar Robles Vásquez
José L. García Luna
Agustín Martínez Ruvalcaba
Jaime R. Pérez Leño



Física breve: mecánica de fluidos, movimiento armónico simple y ondas mecánicas. **Autores:** Oscar Robles Vásquez, José L. García Luna, Agustín Martínez Ruvalcaba y Jaime R. Pérez Leño— Guadalajara, Jalisco. 2025.

Publicación electrónica digital: descarga y *online*; detalle de formato: EPUB.

ISBN: **978-607-8964-31-4**

DOI: <https://doi.org/10.61728/AE20258603>



Primera edición

D. R. © copyright, 2025. Oscar Robles Vásquez, José L. García Luna, Agustín Martínez Ruvalcaba y Jaime R. Pérez Leño

Edición y corrección: **Astra Ediciones**



Todos los contenidos de esta obra se comparten bajo la licencia Creative Commons Atribución/Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (**CC BY-NC-SA 4.0**). Esto implica que no está autorizado el uso comercial de la obra original ni de las eventuales obras derivadas, las cuales deberán distribuirse bajo la misma licencia que rige la obra original. No obstante, se permite a terceros compartir el contenido siempre y cuando se reconozca debidamente la autoría y la publicación original en esta editorial.

HECHO EN MÉXICO | MADE IN MEXICO

Contenido

Capítulo 1. Estática de los fluidos	11
1.1 Definición de fluido y propiedades	11
1.2 Propiedades estáticas de los fluidos	11
1.2.1 Densidad, densidad relativa y aplicaciones	11
1.2.3 Tensión superficial	14
1.2.4 Capilaridad	15
1.3 Ecuación general de la hidrostática	16
1.3.1 Principio de Pascal	18
1.3.2 Presión atmosférica, manométrica y absoluta	19
1.4 Medición de presión	20
1.5 Principio de Arquímedes	22
1.5.1 Problemas propuestos	25
Capítulo 2. Dinámica de fluidos	27
2.1 Viscosidad	27
2.2 Ecuación de continuidad	29
2.3 Ecuación de Bernoulli	32
2.4 Problemas propuestos	34
2.4.1 Algunas soluciones de problemas propuestos	36
Capítulo 3. Movimiento Armónico	41
3.1 Tipos de movimientos armónicos	41
3.1.1 Movimiento armónico simple o MAS	42
3.1.2 MAS en un sistema masa-resorte	42
3.1.3 Función de Posición, Velocidad y Aceleración en el MAS	44
3.1.4 Determinación del ángulo de fase	45
3.2 Energía en el MAS en el sistema masa-resorte	46
3.3 Péndulo simple	47
3.4 Péndulo físico	49
3.5 Movimiento armónico amortiguado	49
3.6 Problemas propuestos	52
3.6.1 Soluciones de problemas propuestos	56
Capítulo 4. Ondas mecánicas	67
4.1 Consideraciones de las ondas mecánicas	67
4.1.1 Onda periódica	68
4.1.2 Descripción matemática de una onda	69
4.1.3 Onda senoidales	70
4.1.4 Formas de la ecuación de onda	70

4.1.5 Casos particulares.....	71
4.1.6 Velocidad y aceleración de una partícula	72
4.1.7 Velocidad de una onda mecánica	72
4.1.8 Energía en el movimiento ondulatorio	73
4.2 Problemas.....	74
Capítulo 5. Problemas adicionales.....	81

Prefacio

La presente obra, breve en su formato, surge de la necesidad de ofrecer un texto universitario que integre, de forma coherente y cuantitativa, tres áreas esenciales de la física clásica: la Mecánica de Fluidos, la Dinámica de Oscilaciones y la Teoría de Ondas Mecánicas. Dirigido a estudiantes de Física e Ingeniería, tiene como propósito fundamental desarrollar la competencia técnica para el modelado y solución de problemas en la física de los medios continuos y los sistemas oscilatorios.

El manuscrito se estructura en una progresión lógica de cuatro capítulos, estableciendo una clara cadena causal: la dinámica de oscilaciones y la propagación ondulatoria se fundamentan en las propiedades intrínsecas del medio, cuya caracterización se aborda rigurosamente en la estática y dinámica de fluidos. En los primeros capítulos (Mecánica de Fluidos), el texto cubre desde la derivación de la Ecuación General de la Hidrostática hasta la aplicación de las leyes de conservación para obtener las Ecuaciones de Continuidad y Bernoulli. Posteriormente, se introduce la Dinámica Temporal (Oscilaciones y Ondas), estableciendo el Movimiento Armónico Simple como oscilador fundamental y elevando el rigor con el tratamiento del Movimiento Armónico Amortiguado. Este análisis de la amortiguación crítica es crucial, ya que conecta directamente la teoría con la aplicación ingenieril en el diseño de sistemas dinámicos. El material finaliza con la Teoría de Ondas Mecánicas, donde se deduce la Ecuación de Onda y se analiza la transferencia de energía y momento.

Más allá del contenido teórico, el valor pedagógico de esta obra reside en su orientación a la aplicación. Conscientes de que el dominio requiere práctica guiada, hemos implementado metodologías de resolución, como la subsección "Estrategia: problemas de la ecuación de Bernoulli", que transforma el proceso abstracto de modelado en un algoritmo manejable. Complementado por una extensa colección de problemas propuestos y la provisión de soluciones parciales para la autoevaluación, Física Breve es una herramienta invaluable. No es una mera recopilación de temas, sino un puente estructurado entre los fundamentos de la mecánica y su aplicación práctica en el diseño de sistemas de ingeniería. Recomendamos encarecidamente este texto para una formación universitaria sólida y rigurosa.

Los Autores

Capítulo 1

Estática de los fluidos

1.1 Definición de fluido y propiedades

Desde el punto de vista de la mecánica clásica, los fluidos pueden definirse como aquellos materiales que no pueden soportar esfuerzos cortantes sin deformarse, por lo tanto, fluyen o se deforman continuamente aún después que el esfuerzo a que han sido sometidos se suspende. Los gases y los líquidos son considerados como fluidos. Los fluidos se pueden estudiar desde dos puntos de vista o marcos de referencia, el estático o en reposo (equilibrio) y desde el punto de vista dinámico o en movimiento. Los fluidos presentan propiedades estáticas o dinámicas dependiendo del marco de referencia de estudio, así por lo tanto, los fluidos presentan propiedades físicas en estado estático y en estado, dinámico, estas son:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Estáticas: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{volumen: } \forall \\ \text{densidad: } \rho \\ \text{tensión superficial: } \gamma \\ \text{presión: } p \\ \text{capilaridad: } h \text{ (altura)} \end{array} \right. \\ 2. \text{ Dinámicas: } & \left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad: } V \\ \text{ímpetu: } mV \\ \text{viscosidad: } \eta \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.2 Propiedades estáticas de los fluidos

1.2.1 Densidad, densidad relativa y aplicaciones

Densidad

La densidad de un fluido se puede definir como la masa (M) de un material por unidad de volumen ($\forall$), está se define por (1.1):

$$\rho \equiv \frac{M}{\forall} \quad (1.1)$$

en el Sistema Internacional de Unidades (SI) la densidad, ρ , tiene unidades de $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. La densidad de

los fluidos, gases y líquidos, cambia por cambios de temperatura (T) y presión (p) esta dependencia o comportamiento se indica de la forma siguiente:¹:

$$\rho = \rho(T, p)$$

La densidad de la atmósfera terrestre cambia por cambios de altura, este cambio de altura esta relacionado con cambios de presión, mayor altura en la atmósfera menor presión atmosférica, menor altura en la atmósfera mayor presión atmosférica. Algo similar sucede en los océanos, donde a grandes profundidades la presión es mayor.

La densidad del agua a 4 °C es de 1.0000 g/cm³. En el SI las unidades de densidad son de kg/m³. Así tenemos que 1.0000 g/cm³ = 1000.0 kg/m³ lo cual se muestra en el siguiente cálculo²:

$$1.0000 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \left(\frac{1.0 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \right) \left(\frac{100^3 \text{ cm}^3}{1.0 \text{ m}^3} \right) = 1000.0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La Tabla 1 muestra los valores de densidades de algunas sustancias a condiciones normales de presión y temperatura.

Sustancia	ρ (kg/m ³)	Sustancia	ρ (kg/m ³)
Aire	1.29	Hielo	0.907×10^3
Aluminio	2.70×10^3	Hierro	7.86×10^3
Benceno	0.879×10^3	Plomo	11.3×10^3
Cobre	8.92×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Alcohol Etilico	0.806×10^3	Roble	0.710×10^3
Agua Dulce	1.0×10^3	Gas Oxígeno	1.43
Glicerina	1.26×10^3	Pino	0.373×10^3
Oro	19.3×10^3	Platino	21.4×10^3
Gas Helio	1.79×10^{-1}	Agua de Mar	1.03×10^3
Gas Hidrógeno	8.99×10^{-2}	Plata	10.5×10^3

Tabla 1

Densidad relativa

La densidad relativa es un número adimensional resultado de la relación de densidades (1.2) , esto es:

$$\rho_{rel} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (1.2)$$

donde ρ es la densidad del fluido y ρ_{ref} es una densidad de referencia. Para gases la densidad que se toma como referencia es la del aire a 20 °C, su valor es de 1.27×10^{-3} g/cm³; para los líquidos ρ_{ref} es la densidad del agua a 4 °C.

Peso específico

El peso específico (γ) de un líquido es el peso (mg) por unidad de volumen ($\forall$), así se tiene que este se puede determinar mediante la ecuación (1.3):

$$\gamma = \frac{mg}{\forall} = \frac{\rho V g}{\forall} = \rho g \quad (1.3)$$

¹Función matemática: $\rho = f(T, P)$, función física: $\rho = \rho(T, P)$

²Se recomienda utilizar a los estudiantes los factores de conversión o equivalencia y evitar el uso de regla de tres. En ingeniería los factores de equivalencia son muy útiles al manejarlos.

En el sistema internacional de unidades el γ tiene unidades de $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$.

Aplicaciones de las mediciones de densidad

La densidad es una propiedad estática muy importante en los líquidos y su medición es sencilla, sólo es necesario contar con un recipiente de volumen calibrado a la temperatura de medición, así el recipiente y líquido se equilibran térmicamente durante un tiempo, después se determina la masa del volumen medido y con la definición de densidad () se puede determinar esta. En gases resulta ser un poco más complicado.

La densidad es un parámetro de control de calidad muy importante y de fácil medición, muy utilizada en las industrias:

- alimenticia: lechera, control de calidad de leche utilizando hidrómetros, chocolatera, farmacéutica, aceites de consumo humano, etc.
- petrolera: lubricante, gasolinas, diesel, etc.
- ...hasta en los changarros de los mecánicos eléctricos, los cuales utilizan los hidrómetros para determinar la vida útil de un acumulador.
- etc.

1.2.2 Definición de presión

En forma simple la presión (p) se puede definir como la fuerza perpendicular ($dF_{\perp}$) a una área (dA) vea Figura 1, esto es, se define como (1.4):

$$p \equiv \frac{dF_{\perp}}{dA} \quad (1.4)$$

en el SI la presión tiene unidades de $\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (Pascal).

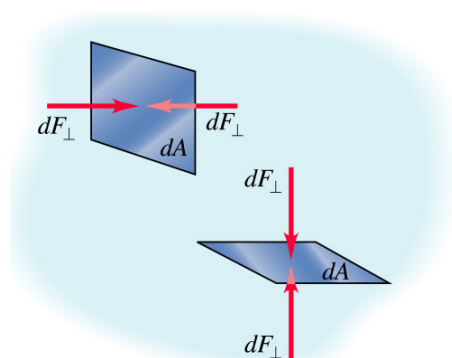


Figura 1.

La presión muestra una dependencia en temperatura y en altura o profundidad (h) $p = p(T, h)$, h puede ser la altura en la atmósfera terrestre o la profundidad en un océano

Otras unidades de presión son lb_f/in^2 o psi , atm, bar, etc., sus equivalencias son:

$$\begin{aligned}
 1.0 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa} \\
 1.0 \text{ mbar} &= 100 \text{ Pa} \\
 p_0 &= 1.0 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \\
 &= 1.013 \text{ bar} = 1013 \text{ mbar} \\
 &= 14.70 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 14.70 \text{ psi}
 \end{aligned}$$

Donde p_0 es la presión atmosférica estándar.

1.2.3 Tensión superficial

Otra propiedad estática muy importante de los fluidos es la tensión superficial, esta es la resistencia a la penetración de la superficie del líquido, la superficie de un líquido se comporta como una membrana en tensión, por esta razón, un mosquito no se hunde y un clip flota en la superficie del agua contenida en un vaso. La razón por la cual la superficie de los líquidos se encuentran en tensión es que las moléculas en la superficie son atraídas hacia el seno del líquido, por ello, el líquido tiende a minimizar su área superficial, tal como lo hace una membrana estirada. Por otro lado, las moléculas en el seno se encuentran en equilibrio, vea Figura 2. Las gotas de lluvia en caída libre son esferas, no como lágrimas, ya que una esfera tiene menor área superficial para un volumen dado que cualquier otra forma.

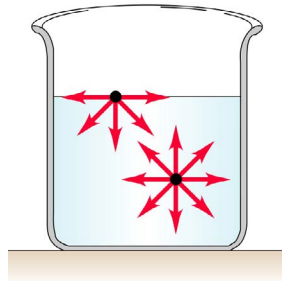


Figura 2.

La tensión superficial, γ , se define (1.5) como la relación entre la fuerza de tensión F que se ejerce en la superficie del líquido y la longitud d a lo largo de la cual se ejerce, esto es:

$$\Gamma = \frac{F}{d} \quad (1.5)$$

Así por ejemplo, si se sumerge un aro de radio, r , en un líquido, al separarlo el líquido ejerce una fuerza alrededor de ese aro, es decir, la fuerza se aplica en $d = 2\pi r$, el perímetro del aro.

La fuerza de tensión en el aro es (1.6):

$$F = 2\pi r \gamma \quad (1.6)$$

Las unidades de Γ en el SI son:

$$1 \frac{\text{din}}{\text{cm}} = 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$$

La tensión superficial depende de la temperatura del líquido así como de su composición, esto es:

$$\gamma = \gamma(T, \text{composición})$$

Esto es, la tensión superficial decrece cuando la temperatura del líquido aumenta, así también cambia cuando la composición del líquido es modificada, por ejemplo, con un detergente o un jabón. Por esta razón, la combinación de temperatura y composición es efectiva para el lavado de la ropa. En la Tabla 2 se muestra esta razón.

$\Gamma, \frac{\text{mN}}{\text{m}}$	$T, ^\circ\text{C}$	% Jabón
72.8	20.0	0.0
58.9	100.0	0.0
25.0	20.0	> 5.0

Tabla 2

El efecto de la tensión superficial se puede observar cuando un líquido esta sobre una superficie sólida, el líquido puede cubrir la superficie o mojar, o por el contrario no mojarla. El ejemplo típico se observa cuando en una superficie de vidrio se colocan unas cuantas gotas de agua y se compara el efecto cuando son gotas de mercurio sobre esa superficie. Lo que determina que la superficie sea mojada o no por el líquido es el valor del ángulo de contacto θ . En este caso el ángulo de contacto (θ) puede definir cuantitativamente la atracción entre la superficie sólida y el líquido, si el líquido moja la superficie $\theta < 90^\circ$, caso del agua, las moléculas entre si se atraen con menor fuerza que al sólido; si $\theta > 90^\circ$ el líquido no moja la superficie, caso del mercurio, la atracción entre las moléculas del mercurio es mayor.

1.2.4 Capilaridad

Cuando una interfaz gas líquido toca una superficie sólida, como la pared de un recipiente, la interfaz por lo regular se curva hacia arriba o hacia abajo cerca de la superficie. La tensión superficial causa la elevación o depresión del líquido en un tubo estrecho (capilar). Este efecto se llama capilaridad. Como se muestra en la Figura 3.

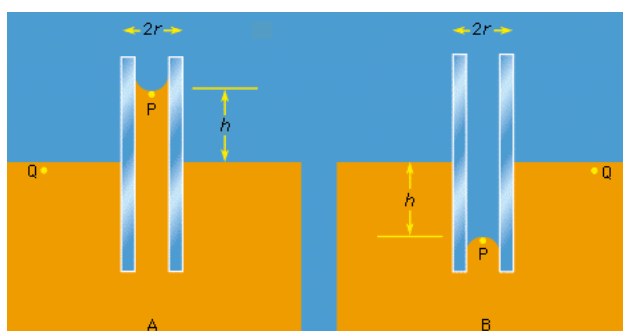


Figura 3

El ascenso capilar, h , en un tubo circular de un líquido con tensión superficial γ y ángulo de contacto θ , resulta del equilibrio entre la componente vertical de la fuerza Γ en las paredes del tubo y el peso de la columna de líquido de altura h . Esto es, la componente vertical de la Γ (1.7):

$$\begin{aligned} F_y &= F \cos \theta \\ &= 2\pi r \gamma \cos \theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

El peso de la columna de líquido de altura h , W_h (1.8):

$$W_h = \rho g \pi r^2 h \quad (1.8)$$

En el equilibrio: $\sum y = 0$, y simplificando, se tiene:

$$h = \frac{2\pi \Gamma \cos \theta}{\rho g \pi r} \quad (1.9)$$

Esta expresión (1.9) es la denominada ley de Jurín. La altura a la que se eleva o desciende un líquido en un capilar es directamente proporcional a su tensión superficial y está en razón inversa a la densidad del líquido y del radio del tubo.

Cuando un tubo capilar se introduce en un recipiente que contiene un fluido, éste asciende, $\theta < 90^\circ$, por el capilar debido a que la fuerza *adhesiva* que ejerce la superficie del capilar sobre el líquido es mayor que la fuerza *cohesiva* que ejercen entre sí las distintas moléculas del medio líquido. La relación entre los valores de las dos fuerzas determinará la altura que la columna de líquido ascenderá en el tubo capilar. En caso que la fuerza cohesiva sea mayor que la adhesiva, no se producirá el fenómeno de la elevación capilar, sino que por el contrario, se producirá un fenómeno de depresión capilar, el líquido desciende en el interior del capilar, $\theta > 90^\circ$.

1.3 Ecuación general de la hidrostática

La relación general entre la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo de densidad, ρ , y altura, y , del punto se conoce como ecuación general de la hidrostática.

Considere un elemento de fluido de densidad ρ , de espesor dy y área A , como se muestra en la Figura 4:

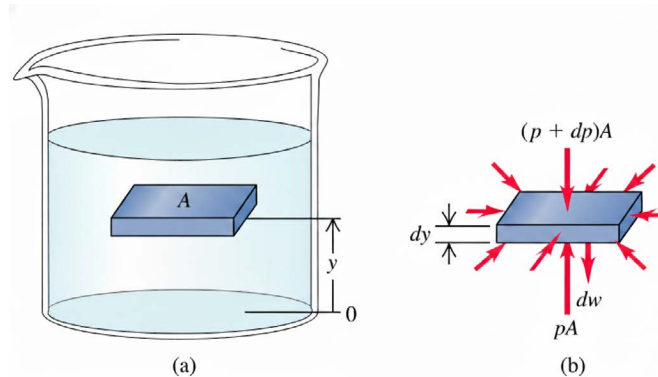


Figura 4.

El elemento de fluido se encuentra en equilibrio (1.10):³

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= 0 \text{ (en el equilibrio)} \\
 &= -dw - (p + dp) A + pA \\
 &= gdm - (p + dp) A + pA \\
 &= g\rho A dy - (p + dp) A + pA \\
 \frac{dy}{dp} &= -g\rho
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Finalmente se tiene la Ecuación General de la Hidrostática (1.11):

$$\frac{dy}{dp} = -g\rho = -\gamma \tag{1.11}$$

Esta última ecuación muestra que al subir en el fluido la presión disminuye, y que es la misma a iguales niveles de altura. Esta ecuación puede integrarse para las condiciones que se muestran en la Figura 5, lo que permitirá calcular la presión en relación con la profundidad y no con la altura del punto al nivel de referencia cero.

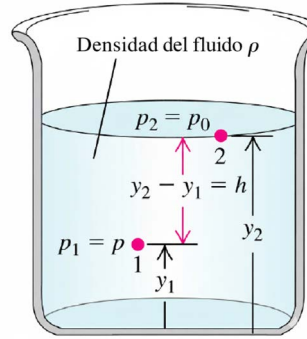


Figura 5.

Considerando que la presión y la densidad se mantienen constantes, separando variables e integrando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{p_1=p}^{p_2=p_0} dp &= -g \int_{y_1}^{y_2} \rho y dy \\
 p_0 - p &= -g\rho(y_2 - y_1)
 \end{aligned}$$

si $h = y_2 - y_1$

$$p = p_0 + \rho gh \tag{1.12}$$

La ecuación (1.12) resulta ser muy útil, la presión p a una profundidad h es mayor que la presión p_0 en la superficie en una cantidad ρgh (peso específico del fluido).

³La convención de signos es: las fuerzas dirigidas hacia abajo son negativas y las que se dirigen hacia arriba son positivas.

1.3.1 Principio de Pascal

Blaise Pascal, científico francés y filósofo religioso estableció el principio que lleva su nombre al aplicar la ecuación general de la hidrostática. La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene. De acuerdo con el principio de Pascal, en un sistema hidráulico, Figura 6, una presión ejercida sobre un pistón produce una reacción semejante sobre otro pistón en el sistema. Debido a esto un segundo pistón con un área mayor a la del primer pistón recibirá más fuerza para equilibrar la presión en el segundo pistón. Este fenómeno se aplica en la prensa hidráulica, que es utilizada entre muchas otras cosas para los frenos hidráulicos.

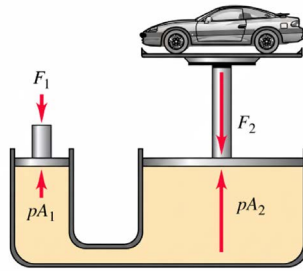


Figura 6.

El elevador hidráulico es un dispositivo multiplicador de la fuerza con un factor de multiplicación igual al cociente de las áreas de los dos pistones (1.13).

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (1.13)$$

Ejemplo 1 Una prensa hidráulica, llena de aceite, tiene dos cilindros, uno de 3 in y el otro de 1/2 in de diámetro; cada cilindro está provisto de un pistón sin fricción que no deja escapar aceite. Con objeto de que el pistón mayor pueda soportar una fuerza de 12,000 lbf, conteste:

- ¿A qué presión debe estar el aceite?
 - ¿Qué fuerza debe aplicarse al pistón menor?
 - Si esta fuerza se aplica por medio de una palanca de 15 in de largo cuyo fulcro (apoyo) se encuentra a 1 in del pistón. ¿Qué fuerza habrá que aplicar en el extremo del brazo de palanca?
- Datos importantes de la prensa hidráulica: $d_1 = 3$ in, $d_2 = 1/2$ in, $F = 12,000$ lbf.

(a)

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{12000 \text{ lbf}}{\pi (1.5 \text{ in})^2} = 1697.653 \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}$$

(b)

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{0.25^2}{1.5^2} 12000 \text{ lbf} = 333.33 \text{ lbf}$$

(c) Recordando la ecuación de la palanca, $F_1 L_1 = F_2 L_2$

$$F_1 = \frac{333.33 \text{ lbf} (1 \text{ in})}{14 \text{ in}} = 23.81 \text{ lbf}$$

1.3.2 Presión atmosférica, manométrica y absoluta

La presión atmosférica es la presión ejercida por la atmósfera terrestre sobre todos los cuerpos que están inmersos en ella, nada escapa a esta presión, sin embargo, se puede tener ausencia de ella en un recipiente al que se le extrae aire contenido mediante una bomba de vacío, puede lograrse un vacío casi perfecto y tener una presión atmosférica cercana a cero. Esta presión "cero" se le conoce como el nivel de referencia de la presión absoluta.

Cuando deseamos inflar un neumático la presión dentro de este estará por encima de la presión atmosférica, es decir, mayor de una atmósfera. Esta presión que esta en exceso se le conoce como presión manométrica, normalmente un neumático se infla con una presión de 30.0 psi , así que la presión absoluta (1.14) dentro del neumático será la suma de la presión atmosférica local, más la presión manométrica medida mediante un elemento mecánico, tal como una columna de líquido, esto es:

$$\begin{aligned} p_{abs} &= 14.7 \text{ psi} + 30.0 \text{ psi} \\ &= 44.7 \text{ psi} \\ &= 44.7 \text{ psia} \end{aligned}$$

La unidad de *psia* indica que esta presión es absoluta. Entonces:

$$\begin{aligned} p_{abs} &= p_0 + p_{man} \\ p_{abs} &= p_0 + \rho gh \end{aligned} \tag{1.14}$$

En la figura 7 se indica estos conceptos.

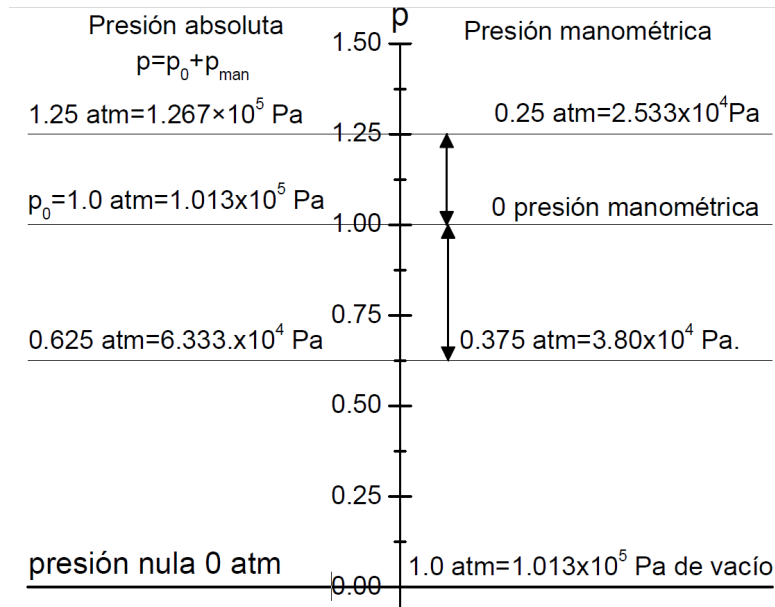


Figura 7

1.4 Medición de presión

La forma mas simple de medir la presión es mediante el uso de columnas de líquidos. Un cambio de altura de una columna de un líquido es equivalente a una diferencia de presión. Por ello para medir diferencias de presión entre dos puntos se puede utilizar también columnas estáticas de uno o más líquidos. Este principio básico es utilizado en los manómetros de Tubo en "U". La figura (Figura 8) siguiente muestra un manómetro simple abierto para medir la presión p del recipiente cerrado respecto a la presión atmosférica (p_0), en otras palabras, para medir la presión manométrica. La Figura 8a muestra un manómetro de Tubo en "U" abierto, que contiene mercurio como líquido manométrico, el tubo en "U" está conectado a un recipiente cerrado que contiene un gas, el gas ejerce una presión p en la rama izquierda del tubo en "U" el cual empuja al mercurio, la columna de mercurio se equilibra con la presión atmosférica que se ejerce en la rama derecha abierta del tubo en "U". A iguales niveles de altura la presión en el tubo es igual, de tal modo que en la base del tubo en "U" la presión que ejercen ambas ramas es la misma, esto es (1.15):

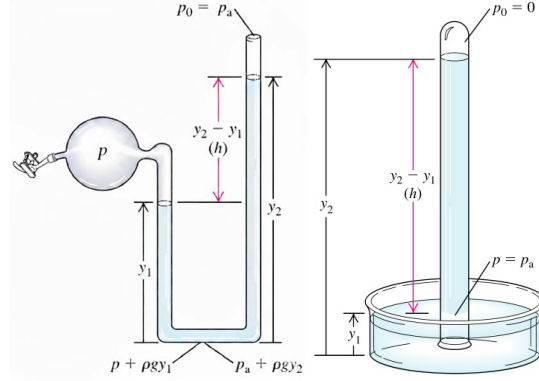


Figura 8a.

Figura 8b.

$$\begin{aligned}
 \text{presión rama izquierda} &= \text{presión rama derecha} & (1.15) \\
 p + \rho_{Hg}gy_1 &= p_0 + \rho_{Hg}gy_2 \\
 p &= p_0 + \rho_{Hg}g(y_2 - y_1) \\
 p &= p_0 + \rho_{Hg}gh
 \end{aligned}$$

La presión así calculada es la presión absoluta dentro del recipiente, la presión manométrica (1.16) es:

$$\begin{aligned}
 p - p_0 &= \rho_{Hg}gh & (1.16) \\
 p_{man} &= \rho_{Hg}gh
 \end{aligned}$$

La Figura 8b muestra un barómetro el cual mide la presión atmosférica o barométrica, el principio que se utiliza es el mismo presentado en anteriormente.

De tal forma que la presión atmosférica se puede evaluar con (1.17):

$$p_0 = \rho_{Hg}gh \quad (1.17)$$

Ejemplo 2 Un corto deja sin electricidad a un sumergible que está 50 m bajo la superficie del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia afuera una escotilla en el fondo con 0.80 m² de área y 300 N de peso. Si la presión interior es de 1.0 atm, ¿Qué fuerza neta, en N, hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?

Algunos datos importantes: $h = 50 \text{ m}$, $A = 0.80 \text{ m}^2$, $p_{int} = p_0 = 1 \text{ atm} = p_{ext}$, $W = 300 \text{ N}$

Balance de fuerza verticales $\sum F_y = 0$; $-F - p_0A - W + F_P + p_0A = 0$, donde F es la fuerza neta y F_P la fuerza ejercida por la columna de agua sobre la escotilla, al resolver para la fuerza neta se tiene:

$$F = -W + F_P = -W + \rho ghA$$

$$\begin{aligned}
 F &= -300 \text{ N} + (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 50 \text{ m} \times 0.80 \text{ m}^2 \\
 &= 4.04 \times 10^5 \text{ N} \\
 &= 4.04 \times 10^2 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 La presión atmosférica normal en metros de amoníaco ($p = 600 \text{ kg/m}^3$) es?:

$$1. \quad p_0 = \rho g h, \text{ resolviendo para } h = \frac{p_0}{\rho g}; \quad h = \frac{101000 \text{ Pa}}{(600 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 17.159 \text{ m}$$

Ejemplo 4 Convierta 200 kPa manométricos de presión a milímetros absolutos de mercurio ($\rho_{Hg} = 13.6\rho_{agua}$).

$$1. \quad p_m = 200000 \text{ Pa}; \quad p_a = p_m + 101000 \text{ Pa}; \quad p_a = 200000 \text{ Pa} + 101000 \text{ Pa} = 301000 \text{ Pa}$$

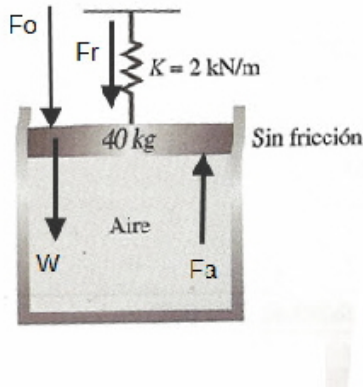
$$h = \frac{301000 \text{ Pa}}{(13600 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 2.2561 \text{ m}$$

$$\text{La conversión es: } 2.2561 \text{ m} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1.0 \text{ m}} \right) \left(\frac{10.0 \text{ mm}}{1.0 \text{ cm}} \right) = 2256.1 \text{ mm}$$

Ejemplo 5 Una presión manométrica de 400 kPa, que actúa sobre un embolo de 4 cm de diámetro, es resistida por un resorte con una constante de resorte de 800 N/m. ¿Cuánto se comprime el resorte? Desprecia el peso del émbolo.

$$(400 \times 10^3 \text{ Pa}) \left(\frac{\pi}{4} (0.04 \text{ m})^2 \right) = \left(800.0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) x; \quad 502.65 (\text{kg}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \left(800.0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) x, \quad x = 0.63 \text{ m}$$

Ejemplo 6 Calcule la presión en el cilindro de 200 mm de diámetro mostrado en la figura. El resorte se comprime 40 cm.



$$F_0 + F_r + W = F_a$$

$$\left(2.0 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (0.40 \text{ m}) + (40.0 \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2) + (101000 \text{ Pa}) \frac{\pi}{4} (0.2 \text{ m})^2 = \frac{\pi}{4} (0.2 \text{ m})^2 p_a$$

$$p_a = 1.3896 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{(\text{m}) \text{ s}^2}$$

1.5 Principio de Arquímedes

Arquímedes enunció el principio que lleva su nombre, este establece que un fluido (gas o líquido) ejerce una fuerza hacia arriba (ascensional), llamada "fuerza boyante o de flotación, F_B ", sobre cualquier cuerpo sumergido total o parcialmente en él, esta fuerza boyante es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo, W_{fd} (1.18):

$$\begin{aligned} F_B &= W_{fd} \\ F_B &= \rho_F g \forall_D \end{aligned} \quad (1.18)$$

Donde ρ_F es la densidad del fluido, $\forall_D$ es el volumen que desplaza el cuerpo al sumergirse en el fluido.

Un cuerpo de densidad ρ_C flota parcialmente si:

$$\rho_C < \rho_F$$

Flota totalmente si:

$$\rho_C < < \rho_F$$

Problem 1 ¿Que fracción de un témpano flota sobre el agua de mar?

El témpano se mantiene flotando debido al equilibrio de su propio peso, W_C , con la fuerza bouyante que ejerce el agua de mar. Si el volumen del témpano es $\forall_C$, el volumen sumergido es $\forall_S$, entonces la fracción sumergida es:

$$f_s = \frac{\forall_S}{\forall_C}$$

La fracción que flota, f_f , es (1.19):

$$f_f = 1 - \frac{\forall_S}{\forall_C} = 1 - f_s \quad (1.19)$$

Para evaluar f_s aplicamos el principio de Arquímedes, de tal forma que:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ F_B &= W_C \\ \rho_F g \forall_S &= \rho_C g \forall_C \\ \frac{\forall_S}{\forall_C} &= \frac{\rho_C}{\rho_F} \end{aligned}$$

así que

$$f_s = \frac{\rho_C}{\rho_F} \quad (1.20)$$

En conclusión se puede decir que la fracción de volumen sumergido del témpano en el mar es igual a la razón de densidades (1.20), que es más fácil evaluar que el cociente $\frac{\forall_S}{\forall_C}$. Un cálculo numérico muestra que la fracción que flota es muy pequeña.

Si $\rho_C = 0.92 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_F = 1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, entonces:

$$f_s = \frac{0.92 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 0.893$$

Mientras que la fracción que flota es

$$f_f = 1 - 0.893 = 0.107$$

Apenas el 11.0% flotando sobre el mar, aproximadamente el 89% está por debajo de la superficie, esto es lo que vio la tripulación del Titani, apenas la punta del iceberg.

Ejemplo 7 Un hidrómetro es un dispositivo para medir la densidad relativa. Consiste en un tubo hueco con contrapeso que flota verticalmente en el líquido que va medir. Cuando se usa en el vino, un hidrómetro de masa 102 g y 5.00 cm² de sección transversal se hunde hasta 19 cm de profundidad. Estas mediciones son la base de la escala Brix, de contenido de azúcar en el vino.

¿Cuál es la densidad relativa del vino? Suponga que el hidrómetro es un cilindro perfecto.

Datos, masa del hidrómetro: 10² g = 0.10 kg; área de la sección transversal: 5.00 cm² = 0.0005 m²; longitud que se hunde 19.0 cm = 0.19 m.

La fracción del hidrómetro sumergida es, $\frac{\forall_S}{\forall_T} = \frac{\rho_H}{\rho_F}$

$$f_s = \frac{\rho_H}{\rho_f} = \frac{\forall_S}{\forall_T} = \frac{\text{volumen sumergido}}{\text{volumen total}}$$

donde el subíndice H se refiere al hidrómetro y f al fluido (vino).

$$\begin{aligned} \rho_f &= \frac{\rho_H}{f_s} = \frac{\frac{m_H}{\forall_T}}{\frac{\forall_S}{\forall_T}} = \frac{m_H}{\forall_S} \\ &= \frac{0.1 \text{ kg}}{0.0005 \text{ m}^2 (0.19 \text{ m})} \\ \rho_f &= 1052.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

si dividimos entre ρ_{H_2O} , obtenemos la densidad relativa del vino

$$(DR)_{vino} = \frac{\rho_f}{\rho_{H_2O}} = \frac{1052.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} 1.053$$

Ejemplo 8 Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de 0.300 m³ y la tensión en el cable es de 900 N.

- Calcule la fuerza de flotación, en N, ejercida por el agua sobre la esfera.
- ¿Qué masa, en kg, tiene la esfera?
- El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿qué fracción del volumen de la esfera estará sumergida?

Datos, $\forall = 0.300 \text{ m}^3$, $\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

(a) La fuerza de flotación es,

$$\begin{aligned}F_B &= \rho_{H_2O} \times g \times \forall_S \\&= 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.300 \text{ m}^3 \\&= 2943.0 \text{ N}\end{aligned}$$

(b) Masa de la esfera. De un balance de fuerzas verticales sobre la esfera:

$$\begin{aligned}W + T &= F_B \\mg + T &= F_B\end{aligned}$$

despejando para la masa:

$$\begin{aligned}m &= \frac{F_B - T}{g} \\&= \frac{2943.0 \text{ N} - 900 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} \\&= 208.2569 \text{ kg}\end{aligned}$$

(c) La fracción sumergida. A partir de

$$\begin{aligned}F_B &= W \\ \rho g \forall_S &= W\end{aligned}$$

despejando para la fracción sumergida:

$$\begin{aligned}\forall_S &= \frac{W}{\rho g} \\&= \frac{2043.0 \text{ N}}{(1000 \text{ kg/m}^3) 9.81 \text{ m/s}^2} \\&= 0.208 \text{ m}^3\end{aligned}$$

la fracción sumergida es

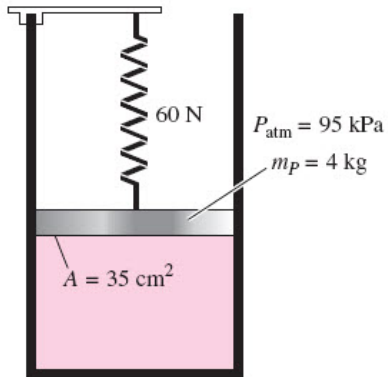
$$\begin{aligned}f_s &= \frac{\forall_S}{\forall_T} \\&= \frac{0.208 \text{ m}^3}{0.300 \text{ m}^3} = 0.70\end{aligned}$$

aproximadamente el 70%.

1.5.1 Problemas propuestos

1. ¿Que fuerza de presión existe en un área horizontal de 80 cm de diámetro a una profundidad de 300 m bajo la superficie de un lago?
2. Se dá una cantidad como 200 ft lbf/min. Expresé la cantidad en unidades del SI.

3. Un gas está contenido en un dispositivo de cilindro-pistón. El pistón tiene una masa de 4 kg y una área seccional transversal de 35 cm^2 . Un resorte comprime en la parte superior el pistón ejerciendo 60 N de fuerza. Si la presión atmosférica es de 95 kPa. Determine la presión en kPa en el interior del cilindro.



Capítulo 2

Dinámica de Fluidos

El flujo de fluidos es un fenómeno complejo, de tal manera que para estudiarlo se idealiza un modelo de fluido ideal. En un fluido ideal en movimiento se considera que no presenta fricción interna, además, su densidad es constante.

2.1 Viscosidad

La viscosidad es la resistencia al flujo que presenta un fluido. Imagine (ver Figura 9) un fluido entre dos placas paralelas separadas una distancia h , en la cual la placa inferior está fija y la superior se puede mover a una velocidad V , mediante una fuerza F . En el tiempo $t = 0$ el fluido está en reposo, si la placa superior se mueve o corta al fluido, el fluido cercano a la placa se moverá con la misma velocidad, las placas de fluido inferiores se moverán con velocidades más bajas, las flechas en la Figura 9 indican como las capas inferiores se desplazan con menor velocidad, de tal forma que la placa de fluido cercana a la placa fija tendrá velocidad cero. La disminución de la rapidez de las placas de fluido se debe a una resistencia entre ellas, esta propiedad se conoce como viscosidad.

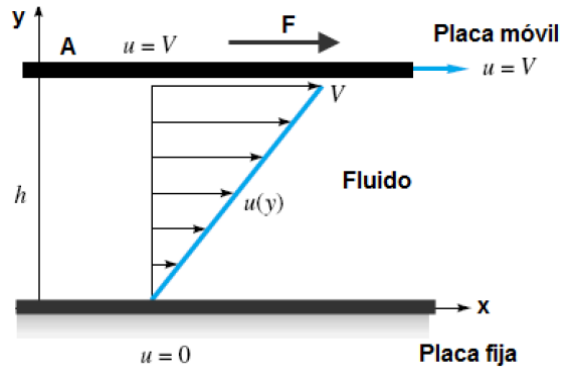


Figura 9.

El cociente $\tau = \frac{F}{A}$ se conoce como esfuerzo cortante, τ , tiene unidades de Pa. Newton propone que (2.1):

$$\tau = \frac{F}{A} \approx \frac{V}{h} \quad (2.1)$$

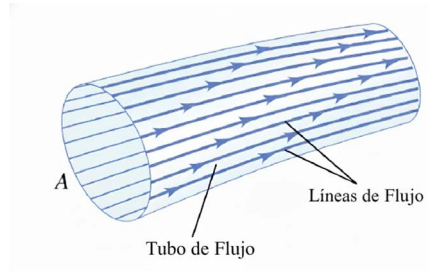


Figura 2.1: Figura 10.

El cociente $\dot{\gamma} = \frac{V}{h}$ en (2.1), se conoce como velocidad de corte o velocidad de deformación, Newton establece que la constante de proporcionalidad que hace verdadera esta relación es la viscosidad η (2.2):

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (2.2)$$

Las unidades de viscosidad son:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Poise} &= 100 \text{ cP} \\ 1 \text{ P} &= 1.0 \text{ din s cm}^{-2} \\ &= 10^{-1} \text{ Pa s} \end{aligned}$$

La fuerza requerida para mover la placa superior es (2.3):

$$F = A \eta \dot{\gamma} \quad (2.3)$$

La viscosidad al igual que otras propiedades físicas de los fluidos dependen de la variables presión y temperatura, pero además de la velocidad de corte, esto es (2.4):

$$\eta = \eta(T, P, \dot{\gamma}) \quad (2.4)$$

Mediciones de viscosidad a presión atmosférica estándar, establecen que:

$$\eta = \begin{cases} \text{Disminuye} & \text{si } T \text{ aumenta con } \dot{\gamma} = \text{cte} \\ \text{Disminuye} & \text{si } \dot{\gamma} \text{ aumenta con } T = \text{cte} \end{cases}$$

Ejemplo 9 En la Figura 9, si el fluido es glicerina a 20 °C y el ancho entre las placas es

de 6 mm, ¿qué esfuerzo de corte (en Pa) se requiere para mover la placa superior a $V = 55 \text{ m/s}$? Para la glicerina a 20 °C, $\mu = 1.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$. El esfuerzo de corte es

$$\tau = \frac{\mu V}{h} = \frac{(1.5 \text{ Pa} \cdot \text{s})(5.5 \text{ m/s})}{0.006 \text{ m}} = 1380.0 \text{ Pa}$$

En el flujo de un fluido en un tubo se considera que el fluido se mueve en líneas de corriente o líneas de flujo, como se muestra en la Figura 10:

Si la distribución global de las líneas de flujo no cambia con el tiempo el flujo se considera estable o estacionario. Las capas adyacentes de flujo se deslizan una sobre otra, este tipo de flujo se le llama laminar. Este caso se observa en el flujo de un fluido en un tubo de radio r , el perfil de las líneas de corriente es parabólico (Figura 11).

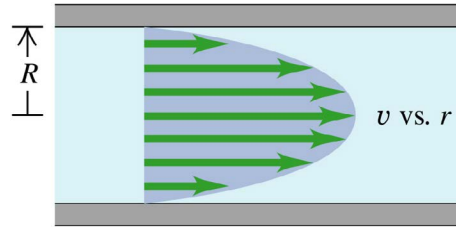


Figura 11.

El flujo de un fluido puede ser también turbulento, esto sucede a altas velocidades, el flujo se vuelve irregular y caótico, es decir se obtiene una distribución no estacionaria.

2.2 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es el principio de conservación de la masa aplicada a un fluido. La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir.

Considere un líquido de densidad, ρ , que se mueve en un tubo arbitrario de sección transversal variable, como el que se muestra en la Figura 12, se muestran elementos diferenciales de volumen.

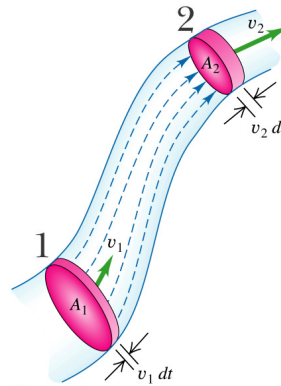


Figura 12.

El "1" indica el punto de entrada del fluido en el tubo de sección transversal variable, el área en esta sección es A_1 , la velocidad del fluido en este punto "1" es V_1 , de forma similar el punto "2" indica la salida del fluido del tubo, en una sección transversal de área A_2 , la velocidad de salida del fluido es V_2 .

Aplicando el principio de continuidad:

$$\begin{aligned} (\text{Masa Entra})_1 &= (\text{Masa Sale})_2 \\ dm_1 &= dm_2 \\ \rho dV_1 &= \rho dV_2 \\ \rho A_1 V_1 dt &= \rho A_2 V_2 dt \end{aligned}$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (2.5)$$

Esta última ecuación (2.5) se le conoce como ecuación de continuidad para flujo incompresible, esto debido a que la densidad se mantiene constante.

La ecuación de continuidad se puede generalizar (2.6) de la forma siguiente,

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 = \dots = A_n V_n \quad (2.6)$$

Al producto de AV se le conoce como flujo volumétrico (2.7):

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (2.7)$$

o como razón de flujo de volumen

$$\frac{dV}{dt} = AV$$

Al producto de ρAV se le conoce como flujo másico (2.8):

$$\dot{m} = \rho AV = \rho Q \quad (2.8)$$

La ecuación de continuidad es muy utilizada para hacer balances de materiales en un proceso determinado.

Ejemplo 10 Considere un ramal de 18 mm de diámetro con 3 orificios idénticos de 0.095 cm diámetro. El agua entra al ramal con una velocidad promedio de 0.15 m/s. Si el flujo disminuye en un 2% al pasar de un orificio a otro, calcule:

- La velocidad de flujo, en m/s, a través de cada uno de los orificios.
- El flujo volumétrico o razón de flujo de volumen, en m³/s.
- El flujo másico o razón de flujo de masa, en kg/s.

Datos. Diámetro del ramal de 18 mm = 0.018 m; diámetro de los orificios de 0.095 cm = 0.00095 m; velocidad de entrada al ramal $V_0 = 0.15$ m/s. El flujo disminuye en un 2% al pasar de un orificio a otro.

De la ecuación de continuidad

$$A_0 V_0 = A_1 V_1 = A_2 V_2 = A_3 V_3$$

El área de cada orificio es,

$$A = \frac{\pi (0.00095 \text{ m})^2}{4} = 7.09 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

el área del ramal

$$A = \frac{\pi (0.018 \text{ m})^2}{4} = 2.54 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

- (a) *La velocidad de flujo. La velocidad de flujo disminuye en un 2% al pasar de un orificio a otro, entonces,*

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1 \\ V_2 &= 0.98V_1 \\ V_3 &= 0.98V_2 = 0.98(0.98V_1) = 0.98^2V_1 \end{aligned}$$

con la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} A_0V_0 &= A_1V_1 + A_1(0.98V_1) + A_1(0.98^2V_1) \\ A_0V_0 &= [1 + 0.98 + 0.98^2] A_1V_1 \\ A_0V_0 &= 2.94A_1V_1 \end{aligned}$$

al resolver para V_1

$$V_1 = 0.34 \frac{A_0}{A_1} V_0$$

la velocidad de flujo en cada orificio es,

$$\begin{aligned} V_1 &= 0.34 \frac{2.54 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{7.09 \times 10^{-7} \text{ m}^2} 0.15 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ V_2 &= 0.98V_1 = 0.98 \left(18.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 17.91 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ V_3 &= 0.98^2V_1 = 0.98^2 \left(18.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 17.54 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- (b) *El flujo volumétrico.*

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1A_1 = 18.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.09 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.29 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ Q_2 &= V_2A_2 = 17.91 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.09 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.27 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ Q_3 &= V_3A_3 = 17.54 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.09 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.24 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

- (c) *El flujo másico.*

$$\dot{m} = \rho AV = Q\rho$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \rho Q_1 = 1.29 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 0.0129 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \dot{m}_2 &= \rho Q_2 = 1.27 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 0.0127 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \dot{m}_3 &= \rho Q_3 = 1.24 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 0.0124 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

2.3 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es el principio de conservación de energía aplicada a los fluidos en movimiento. Esta ecuación relaciona las velocidades, las presiones y las alturas. En nuestro curso aplicamos la ecuación de Bernoulli para un flujo ideal.

La rapidez de flujo en una tubería puede variar a lo largo de la trayectoria debido a cambios en el área transversal de flujo, así como también las presiones ya que estas dependen de la altura y de las velocidades o de Q .

La Figura 13 presenta el flujo de un fluido en un tubo arbitrario de sección transversal variable. En el punto de entrada identificado como "1" el elemento diferencial fluido de volumen dV se encuentra a una altura y_1 , respecto a nivel de referencia $y = 0$, este elemento de volumen tiene una velocidad V_1 , el área de entrada del fluido es A_1 . Para mover el fluido un desplazamiento ds_1 es necesario ejercer una presión p_1 , la fuerza que se ejerce en "1" es $p_1 A$.

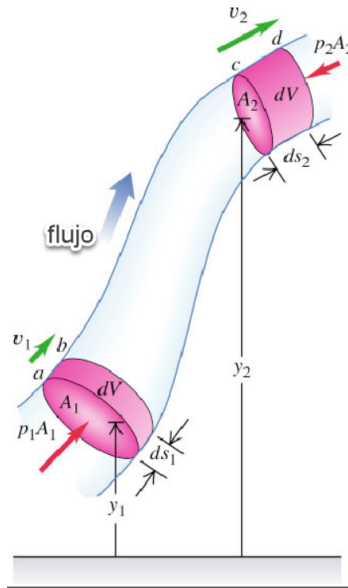


Figura 13.

Es importante calcular el trabajo efectuado sobre el elemento diferencial de fluido para llevarlo desde la altura y_1 (punto 1) a la altura y_2 (punto 2).

Recuerde que el trabajo es simplemente $W = F \cdot d$, así que el trabajo neto es (2.9):

$$dW = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 \quad (2.9)$$

El segundo término de la ecuación es negativo ya que la fuerza se opone al desplazamiento del fluido.

Simplificando se obtiene (2.10):

$$dW = (p_1 - p_2) dV \quad (2.10)$$

donde $dV_1 = dV_2 = A ds$ por el principio de continuidad.

El trabajo neto o la energía mecánica total que entra al tubo se distribuye en energía cinética y en energía potencial del fluido (2.11), suponemos que no hay disipación de energía. Así que,

$$\begin{aligned} dW &= dK + dU \\ &= (K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

al sustituir las relaciones para energía cinética y potencial en (2.11), se obtiene (2.12)

$$(p_1 - p_2) dV = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) dV - \rho g (y_2 - y_1) dV \quad (2.12)$$

Si la última ecuación es dividida por dV y escrita de la siguiente forma, se obtiene la ecuación de Bernoulli, esto es (2.13):

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad (2.13)$$

que es la forma más común y que fácilmente se puede recordar (2.14):

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{cte} \quad (2.14)$$

2.3.1 Estrategia: problemas de la ecuación de Bernoulli

Identifica los conceptos relevantes: Primero asegurarse que el flujo de fluido esta en estado estacionario, es incompresible y que no tiene fricción interna. Este caso es una idealización, pero se cumple adecuadamente para fluidos fluyendo a través de tubos suficientemente largos y para flujos dentro de una masa de fluido.

Procedimiento:

1. Identificar claramente el punto 1 y el punto 2 referidos en la ecuación de Bernoulli.
2. Definir el marco de referencia, esto es, establecer el nivel de referencia cero, principalmente el nivel al cual $z = 0$. Una indicación valiosa es que elija el punto 1 en donde el flujo entre y el punto 2 donde salga el fluido.
3. Hacer una lista de la datos que conoce y cantidades que desconoce. Las variables son:

$$\text{Variables: } \left\{ \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{array} \right. \quad \text{Constantes: } \left\{ \begin{array}{l} g \\ \rho \end{array} \right.$$

Utilice el SI de unidades y maneje las presiones en presión manométrica o absoluta, pero no las combine.

4. Simplificar la ecuación de Bernoulli. Algunas suposiciones y situaciones pueden ayudar a obtener un ecuación de Bernoulli más simple, estas son:

- (a) Para un flujo en una tubería horizontal: $z_1 = z_2$

- (b) Para un flujo en una tubería de sección transversal uniforme: $V_1 = V_2$
 - (c) Si el área de flujo en el punto 1 es demasiado grande comparado con el área de flujo en el punto 2, esto produce un flujo de entrada demasiado lento, se puede considerar entonces que: $V_1 \approx 0$. En caso que el área de salida del flujo (punto 2) sea demasiado grande comparada con el área de entrada del flujo (punto 1): $V_2 \approx 0$.
 - (d) Flujo que se descarga en un tanque abierto a la atmósfera en el punto 2: $p_2 = 0$ (manométrica).
5. Simplifique la ecuación de Bernoulli con lo que se reviso en el inciso 1 al 4.
6. Aplique la ecuación de Continuidad si es necesario. En algunos problemas la sección transversal de flujo cambia debido a la contracción y la expansión del área de flujo. En este caso puede utilizar la ecuación de continuidad para encontrar una relación entre las velocidades que involucren el cambio de áreas. Con esta relación podría determinar las velocidades si no las conoce o las áreas si es que las desea determinar.
7. Determine el flujo volumétrico y el flujo másico si es requerido.
8. Evalúe su respuesta y verifique que el resultado tiene sentido físico.

2.4 Problemas propuestos

1. Un bloque cúbico de madera de 10.0 cm de lado flota en la interfaz entre aceite y agua con su superficie inferior 2.00 cm por debajo de la interfaz. La densidad del aceite es de $750.0/\text{m}^3$. Responda:
- (a) ¿Qué presión manométrica hay en la superficie de arriba del bloque?
 - (b) ¿Y en la cara inferior?
 - (c) ¿Qué masa tiene el bloque?
 - (d) Utilice el principio de Arquímedes contestar el inciso c.
2. Un hidrómetro es un dispositivo para medir la densidad relativa. Consiste en un tubo hueco con contrapeso que flota verticalmente en el líquido que va medir. Cuando se usa en el vino, un hidrómetro de masa $1 \times 10^2 \text{ g}$ y 5.00 cm^2 de sección transversal se hunde hasta 19 cm de profundidad. ¿Cuál es la densidad relativa del vino? Suponga que el hidrómetro es un cilindro perfecto. (Estas mediciones son la base de la escala Brix, de contenido de azúcar en el vino.
3. Considere un ramal de 18 mm de diámetro con 3 orificios idénticos, de 0.095 cm diámetro. El agua entra al ramal con una velocidad promedio de 0.15 m/s . Si el flujo disminuye en un 2 % al pasar de un orificio a otro, calcule:
- (a) La velocidad de flujo, en m/s , a través de cada uno de los orificios.
 - (b) El flujo volumétrico o razón de flujo de volumen, en m^3/s .
 - (c) El flujo másico o razón de flujo de masa, en kg/s .

4. La gasolina recién refinada ($\rho = 0.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) se bombea de la refinería a los tanques de depósito a 15 m sobre la bomba. Un manómetro en la salida de la bomba indica $P_p = 2.7 \times 10^5 \text{ Pa}$ y un flujómetro indica que la gasolina pasa a 2.5 m/s. Si un manómetro en los tanques de almacenamiento indica $1.4 \times 10^5 \text{ Pa}$, determine:
- (a) La velocidad (m/s) de la gasolina al entrar a los tanques.
 - (b) La relación de las áreas de sección transversal de los tubos en la bomba y en los tanques.
5. El agua entra al tubo de admisión subterráneo de 1.5 cm de radio, a una velocidad de 40 m/s. Fluye luego por un tubo de 0.5 cm de radio a una altura de 35 m con una presión manométrica de 0.2 atm. Determine:
- (a) ¿Cuál es la velocidad del agua en el punto más alto, en m/s?
 - (b) ¿Cuál es la presión manométrica en el tubo subterráneo, en Pa?
 - (c) ¿Cuál es la presión manométrica en el tubo subterráneo, en Pa?
6. Un corto deja sin electricidad a un sumergible que está 50 m bajo la superficie del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia afuera una escotilla en el fondo con 0.80 m^2 de área y 300 N de peso. Si la presión interior es de 1.0 atm, ¿Qué fuerza neta, en N, hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?
- (a) Escriba la ecuación general de la fuerza neta.
 - (b) Efectúe el cálculo numérico con las unidades adecuadas.
7. Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de 0.300 m^3 y la tensión en el cable es de 900 N.
- (a) Calcule la fuerza de flotación, en N, ejercida por el agua sobre la esfera.
 - (b) ¿Qué masa, en kg, tiene la esfera?
 - (c) El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿qué fracción del volumen de la esfera estará sumergida?
8. En un punto de una tubería la rapidez del agua es de 3.0 m/s y la presión manométrica es de $5.00 \times 10^4 \text{ Pa}$. Calcule la presión manométrica, en Pa, en otro punto, 12.0 m más abajo, si el área transversal ahí es el doble que en el primer punto.
- (a) Escriba la ecuación de Bernoulli simplificada.
 - (b) Efectúe el cálculo numérico.
9. Una prensa hidráulica, llena de aceite, tiene dos cilindros, uno de 3 y el otro de 1/2 in de diámetro; cada cilindro esta provisto de un pistón sin fricción que no deja escapar aceite. Con objeto de que el pistón mayor pueda soportar una fuerza de 12,000 lbf, conteste:
- (a) ¿A qué presión debe estar el aceite?
 - (b) ¿Qué fuerza debe aplicarse al pistón menor?

- (c) Si esta fuerza se aplica por medio de una palanca de 15 in de largo cuyo fulcro (apoyo) se encuentra a 1 in del pistón. ¿Qué fuerza habrá que aplicar en el extremo del brazo de palanca?
10. Hay 0.600 kg de alcohol al 95% en cada botella de 0.750 l. Fluyendo como un fluido ideal por un tubo, este alcohol tiene una razón de flujo de masa que llenaría 160 de estas botellas por minuto. En el punto 2 del tubo, la presión manométrica es de 152 kPa y el área transversal es de 8.0 cm^2 . En el punto 1, 1.81 m por encima del punto 2, el área transversal es de 2.0 cm^2 . Calcule:
- La razón de flujo de masa o flujo másico en kg/s .
 - la razón de flujo de volumen o flujo volumétrico en m^3/s .
 - la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2, en m/s .
 - la presión manométrica en el punto 1 en Pa.
11. Considere un ramal de 25 mm de diámetro con 2 orificios distribuidos a lo largo del tubo, cuyos diámetros son: $d_1 = 0.2$, y $d_2 = 0.3$, en cm. Si el agua entra al ramal con una velocidad promedio de 0.20 m/s . Calcule:
- La velocidad de flujo a través de cada uno de los orificios.
 - El flujo volumétrico o razón de flujo de volumen.
 - El flujo másico o razón de flujo de masa.
12. Un tubo de agua de 6 in de diámetro contiene un corto segmento donde se estrecha hasta 3 in de diámetro, ensanchándose después a 6 in. Si el gasto que lleva el tubo es de $100 \text{ ft}^3/\text{min}$, y si la presión en el tubo grueso se mantiene a 60 lbf/in^2 , calcule:
- ¿Cuánto vale la presión en el estrechamiento?
 - ¿Cuántas veces mayor es la velocidad del fluido en el estrechamiento, compara con la velocidad en el resto de la tubería?

2.4.1 Algunas soluciones de problemas propuestos

2. Masa del hidrómetro: $10^2 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$

Área de la sección transversal: $5.00 \text{ cm}^2 = 0.0005 \text{ m}^2$

Longitud que se hunde: $19 \text{ cm} = 0.19 \text{ m}$

¿Cuál es la densidad relativa del vino?

La fracción de volumen del hidrómetro sumergida es:

$$f_s = \frac{\rho_H}{\rho_f} = \frac{V_s}{V_T} = \frac{\text{volumen sumergido}}{\text{volumen total}},$$

donde el subíndice H = hidrómetro y f = fluido

$$\rho_f = \frac{\rho_H}{f_s} = \frac{\frac{m_H}{V_T}}{\frac{V_s}{V_T}} = \frac{m_H}{V_s} = \frac{0.1 \text{ kg}}{0.0005 \text{ m}^2 (0.19 \text{ m})} = 1052.6$$

Si dividimos la ecuación anterior por ρ_{H_2O} :

$$(DR)_{VINO} = \frac{\rho_f}{\rho_{H_2O}} = \frac{1052.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1.0526$$

3. Diámetro del ramal de 18 mm = 0.018 m.

Diámetro de los orificios: 0.095 cm = 0.00095 m

Velocidad de entrada al ramal $v_0 = 0.15 \text{ m/s}$.

El flujo disminuye en un 2 % al pasar de un orificio a otro.

Escribiendo la ecuación de continuidad:

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 + A_2 v_2 + A_3 v_3$$

Donde

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0.00095 \text{ m})^2}{4} = 7.0882 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

(área de los orificios)

$$\text{Área del ramal: } A_0 = \frac{\pi (0.018 \text{ m})^2}{4} = 2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Y con respecto a las velocidades:

$$v_1 = v_1$$

$$v_2 = (0.98) v_1$$

$$v_3 = (0.98) v_2 = (0.98) (0.98 v_1) = (0.98)^2 v_1$$

con estos datos se puede substituir en la primera ecuación y obtener:

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 + A_1 ((0.98) v_1) + A_1 ((0.98)^2 v_1)$$

$$A_0 v_0 = [1 + 0.98 + (0.98)^2] A_1 v_1 = 2.9404 A_1 v_1, \text{ resolviendo para } v_1:$$

$$v_1 = 0.3409 \frac{A_0}{A_1} v_0$$

a. La velocidad de flujo:

$$v_1 = 0.3409 \frac{2.5447 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{7.0882 \times 10^{-7} \text{ m}^2} 0.15 \text{ m/s} = 18.314 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = (0.98) v_1 = (0.98) 18.314 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17.948 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_3 = (0.98)^2 v_1 = (0.98)^2 18.314 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 17.589 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b. El flujo volumétrico:

$$Q_1 = v_1 A_1 = 18.314 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.0882 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.2981 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_2 = v_2 A_2 = 17.948 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.0882 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.2722 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_3 = v_3 A_3 = 17.589 \frac{\text{m}}{\text{s}} (7.0882 \times 10^{-7} \text{ m}^2) = 1.2467 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

c. El flujo másico:

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= Q_1 \rho = 1.2981 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1.2981 \times 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \dot{m}_2 &= Q_2 \rho = 1.2722 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1.2722 \times 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \dot{m}_3 &= Q_3 \rho = 1.2467 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left(10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1.2467 \times 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{s}}\end{aligned}$$

4. Datos: $\rho_{gas} = 0.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$\begin{aligned}y_1 &= 0 & y_2 &= 15 \text{ m} \\ p_1 &= P_p = 2.7 \times 10^5 \text{ Pa} & p_2 &= 1.4 \times 10^5 \text{ Pa} \\ v_1 &= 2.5 \text{ m/s} & v_2 &=?.\end{aligned}$$

Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$, despejando para v_2 :

$$v_2^2 = \frac{2}{\rho} \left(p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g y_2 - p_2 \right), \text{ finalmente: } v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \left(p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g y_2 - p_2 \right)}$$

$$\text{Donde : } \nabla = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g y_2 - p_2$$

$$\nabla = \left(\begin{array}{c} 2.7 \times 10^5 \text{ Pa} + \frac{1}{2} (0.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (2.5 \text{ m/s})^2 \\ - (0.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) (15 \text{ m}) - 1.4 \times 10^5 \text{ Pa} \end{array} \right)$$

$$\nabla = 29183. \frac{\text{kg}}{(\text{m}) \text{ s}^2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{0.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} 29183. \frac{\text{kg}}{(\text{m}) \text{ s}^2}} = 9.1313 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(La velocidad de la gasolina al entrar a los tanques.)

La relación de las áreas: De la ecuación de continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$ luego:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{9.1313 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3.6525 \text{ o también: } \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{3.6525} = 0.27379$$

5. El agua entra al tubo de admisión subterráneo.

a. ¿Cuál es la velocidad del agua en el punto más alto, en m/s?

$$\begin{aligned}A &= \pi r^2 \\ A_1 &= \pi \left(\frac{1.5}{100} \right)^2 = 7.0686 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ A_2 &= \pi \left(\frac{0.5}{100} \right)^2 = 7.854 \times 10^{-5} \text{ m}^2\end{aligned}$$

De la ecuación de Continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$, resolviendo para v_2

$$v_2 = A_1 \frac{v_1}{A_2} = 7.0686 \times 10^{-4} \frac{40}{7.854 \times 10^{-5}} = \boxed{360.0 \text{ m/s}}$$

b. ¿Cuál es la presión manométrica en el tubo subterráneo, en Pa?

$$\begin{aligned}\text{A partir de: } p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 &= p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \text{ donde:} \\ v_1 &= 40 \text{ m/s; } p_1 = ?; y_1 = 0\end{aligned}$$

$$v_2 = 360.0 \text{ m/s}; p_2 = (101325) 0.2 = 20265.0 \text{ Pa}; y_2 = 35 \text{ m}$$

Resolviendo para p_1 :

$$p_1 = \rho g y_2 - \rho g y_1 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 = (1000) (9.80) (35) - (1000) (9.80) (0) - \frac{1}{2} (1000) (40)^2 + (20265.0) + \frac{1}{2} (1000) (360)^2$$

$$p_1 = 3.43 \times 10^5 - 0 - 8.0 \times 10^5 + 20260.0 + 6.48 \times 10^7 = \boxed{6.4363 \times 10^7 \text{ Pa}}$$

6. Datos: $h = 50 \text{ m}$, $A = 0.80 \text{ m}^2$, $P_{int} = P_0 = 1 \text{ atm} = P_{sup}$, $W = 300 \text{ N}$

$$\sum F_y = 0; -F - P_0 A - W + F_P + P_0 A = 0, \text{ despejando para } F \text{ tenemos:}$$

$$F = -W + F_P = -W + \rho g h A$$

$$\text{Calculo numérico: } F = -300 \text{ N} + (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 50 \text{ m} \times 0.80 \text{ m}^2$$

$$F = 4.0387 \times 10^5 \text{ N}$$

7. $V = 0.300 \text{ m}^3$, $\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$. La fuerza de flotación es:

$$F_B = \rho_W \times g \times V = F_B = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 0.300 \text{ m}^3 =$$

$$\text{La masa: } W + T = F_B; mg + T = F_B, \text{ despejando para la masa: } m = \frac{F_B - T}{g}$$

$$\text{El cálculo numérico es: } m = \frac{2943.0 (\text{kg}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 900 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 208.26 \text{ kg}$$

La Fracción sumergida es: a partir de $F_B = W$; $\rho g V_s = W$, luego despejando para

$$V_s = \frac{W}{\rho g}, V_s = \frac{2040 \text{ N}}{(1000 \text{ kg/m}^3) 9.81 \text{ m/s}^2} = 0.20795 \text{ m}^3, \text{ luego}$$

$$f_s = \frac{V_s}{V_T} = \frac{0.20795 \text{ m}^3}{0.300 \text{ m}^3} = 0.69317, \text{ aproximadamente el } 70\%$$

8. En el punto 1: $v_1 = 3.0 \text{ m/s}$, $y_1 = 12 \text{ m}$, $P_1 = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$, A_1 . En el punto 2: $v_2 = ? \text{ m/s}$, $y_2 = 0 \text{ m}$, $P_2 = ? \text{ Pa}$, $A_2 = 2A_1$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \text{ despejando: } v_2 = A_1 \frac{v_1}{A_2}, v_2 = \frac{v_1}{2},$$

Luego de la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2,$$

despejando para:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \rho g y_2,$$

simplificando:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + \rho g y_1 = P_1 + \frac{1}{2} \rho \left(v_1^2 - \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 \right) + \rho g y_1 = P_1 + \frac{3}{8} \rho v_1^2 + \rho g y_1$$

El calculo numérico es:

$$P_2 = 5.00 \times 10^4 \text{ Pa} + \frac{3}{8} (1000 \text{ kg/m}^3) (3.0 \text{ m/s})^2 + (1000 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) 12 \text{ m}$$

$$P_2 = 1.7110 \times 10^5 \text{ Pa}$$

10. Para el alcohol del 95%

- (a) La razón de flujo de masa o flujo másico en kg/s .

$$\text{La razón de flujo de masa: } \dot{m} = \frac{(160) (0.600) (\text{botellas}) (\text{kg})}{60.0 \text{ s}} = 1.6 \text{ Kg/s}$$

- b. la razón de flujo de volumen o flujo volumétrico en m^3/s .

La razón de flujo de volumen:

$$\dot{m} = Q\rho [=] kg/s \text{ donde } \rho = \frac{0.600Kg}{0.750 \times 10^{-3}m^3} = 800.0Kg/m^3$$

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{1.60kg/s}{800kg/m^3} = 0.002m^3/s = 2.0L/s$$

O también se puede hacer el siguiente cálculo:

$$\frac{(160botellas)(0.750L/botella)}{60.0s} = 2.0L/s$$

- c. la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2, en m/s .

La rapidez de flujo o las velocidades en los puntos 1 y 2:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.002m^3/s}{2 \times 10^{-4}m^2} = 10.0m/s$$

$$v_2 = \frac{1}{4}(10.0)m/s = 2.5m/s. \text{ Note que } A_1 = 4A_2$$

- d. la presión manométrica en el punto 1 en Pa.

La presión Manométrica en el punto 2

La ecuación de Bernoulli es:

$$P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \text{ despejando para } P_1, \text{ tenemos:}$$

$$P_1 = \rho gy_2 - \rho gy_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \text{ note que } y_2 = 0$$

$$P_1 = 0 - (800Kg/m^3)(9.80m/s^2)(1.81m) - \frac{1}{2}(800Kg/m^3)(10^2m^2/s^2) + 152000Pa + \frac{1}{2}(800)(2.5^2m^2/s^2)$$

$$P_1 = 1.0031 \times 10^5 Pa = 100.3kPa$$

Capítulo 3

Movimiento Armónico

Todo movimiento o suceso que se repita a intervalos regulares se dice que es periódico.

El cuerpo se mueve hacia delante y hacia atrás siguiendo una trayectoria determinada entre dos posiciones extremas.

Algunos ejemplos de tales movimientos son:

- Vibración de las cuerdas de una guitarra.
- Cono altoparlante (bocina).
- Oscilación de un péndulo.
- Movimiento de un pistón en un motor.
- Vibraciones de los átomos en un sólido.

Todos estos movimiento se consideran periódicos y constituyen ejemplos de oscilaciones. Una oscilación es una fluctuación periódica del valor de una cantidad física por encima y por debajo de algún valor central o de equilibrio. Las oscilaciones pueden ser mecánicas y no mecánicas. En las oscilaciones mecánicas el desplazamiento puede ser lineal o angular.

3.1 Tipos de movimientos armónicos

A los movimientos periódicos también se les conoce como movimientos armónicos ya que su descripción es hecha mediante las funciones armónicas de seno o coseno. Estos se pueden clasificar de acuerdo al tipo de fuerza impulsora que los provoca, así se tiene:

- Movimiento Armónico Simple o MAS, sin pérdida de energía (isócronas).
- Movimiento Armónico Amortiguado, con fricción o cualquier otro mecanismo que hace que disminuya la energía de la oscilación.
- Movimiento Armónico Forzado, respuesta de un sistema a una fuerza impulsora externa que varía sinusoidalmente.

3.1.1 Movimiento armónico simple o MAS

Un sistema apropiado para estudiar este tipo de las oscilaciones es un bloque de masa, m , unido a un resorte (ver Figura 14). Para ver como varía con el tiempo el desplazamiento vertical se registra este sobre una tira de papel que se mueve a una velocidad constante

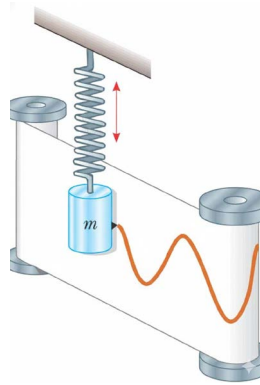


Figura 14.

La masa, m , se mueve hacia arriba y hacia abajo, la pluma en la masa traza una onda armónica a medida que transcurre el movimiento del papel. Este comportamiento también se observa si la masa se mueve en una posición horizontal.

3.1.2 MAS en un sistema masa-resorte

Para el **MAS** en un sistema masa-resorte, como el que se muestra en la figura siguiente, la fuerza restauradora o de restitución del resorte (F_S) es proporcional al desplazamiento de la masa de la posición de equilibrio ($x = 0$), Figura 15.

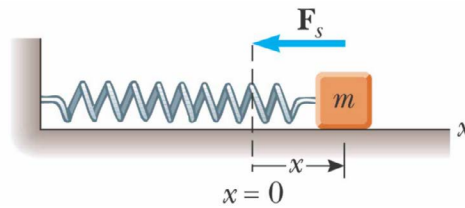


Figura 15.

Esto es

$$F_S \approx x$$

Para un resorte ideal (sin disipación de energía por fricción interna) ni rozamiento de la masa con la superficie. La masa en el resorte sólo tiene movimiento horizontal, de tal forma que la componente x de F_S está dada por (3.1):

$$F_x = -kx(t) \quad (3.1)$$

$x(t)$ muestra la dependencia de la posición x en el tiempo t , k es la constante del resorte, esta tiene unidades de $\frac{Fuerza}{Longitud} = \frac{N}{m}$. El signo negativo en la ecuación anterior muestra que la fuerza restauradora, F_x , del resorte tiene dirección contraria a la posición, x , de la masa, m .

$$F_x = \begin{cases} F_x > 0 & \text{si } x < 0 \\ F_x < 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

De igual la aceleración de la masa en el resorte tendrá la misma dirección que la fuerza F_x .

Aplicando la segunda Ley de Newton al sistema masa-resorte se tiene $F_x = ma_x$, donde a_x es la componente horizontal de la aceleración, de tal modo que:

$$ma_x = -kx(t) \quad (3.2)$$

Note que

$$a_x = -\omega^2 x = \frac{-k}{m}x \quad (3.3)$$

Por simplicidad escribimos $x(t) = x$, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.5)$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial de un oscilador armónico simple (3.5), la cual puede ser comparada con:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (3.6)$$

del movimiento circular uniforme. Al comparar ambas ecuaciones se determina que (3.7):

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{o} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

Donde ω es la frecuencia angular de la masa oscilando en el sistema masa-resorte, la unidades de ω son $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ o simplemente s^{-1} .

Otras ecuaciones importantes pueden ser recordadas fácilmente si consideramos que la conversión de frecuencia cíclica (f) a frecuencia angular (ω), así que $\omega = 2\pi f$. De tal forma que f para el sistema masa resorte es (3.8):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.8)$$

y el período (T) es (3.9):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.9)$$

El comportamiento que predice la última ecuación (3.9) es:

$$T = \begin{cases} T \text{ aumenta} & \text{si } m \text{ aumenta} & \text{mov. lento} \\ T \text{ disminuye} & \text{si } k \text{ aumenta} & \text{mov. rápido} \end{cases}$$

Note también que el **MAS** el T y la f no dependen de la amplitud (A).

3.1.3 Función de Posición, Velocidad y Aceleración en el MAS

Función de Posición $x(t)$

La ecuación diferencial de un oscilador armónico simple se resuelve al proponer que la función de posición $x(t)$ de la masa en el resorte viene dada por (3.10):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.10)$$

o por (3.11):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.11)$$

Donde φ_0 (o φ) es la constante de fase o ángulo de fase que determina en donde la masa inicia su movimiento en el tiempo $t = 0$. Ambas ecuaciones son equivalentes, ya que la función seno es la función coseno desfasada o desplazada hacia la derecha $\frac{\pi}{2}$, es decir (3.12):

$$\cos \varphi_0 = \sin\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.12)$$

Por ejemplo, si la función de posición es:

$$x(t) = 0.55 \cos 33t$$

la función equivalente en términos de senos es :

$$x(t) = 0.55 \sin\left(33t + \frac{\pi}{2}\right)$$

de igual forma:

$$x(t) = 0.20 \cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

es una función es equivalente a:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.20 \sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ x(t) &= 0.20 \sin\left(\frac{1}{2}t + 2\pi\right) \\ x(t) &= 0.20 \sin \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Función de velocidad $v(t)$

La función de velocidad (3.13) determinada a partir de $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ viene dada por:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.13)$$

Función de aceleración $a(t)$

La función de aceleración (3.14) viene dada por:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (A \cos(\omega t + \varphi_0)) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.14)$$

Valores extremos de la funciones de $v(t)$ y $a(t)$

Los valores extremos de la funciones de velocidad (3.15) y aceleración (3.16) pueden ser determinadas al considerar que los valores extremos que alcanzan las funciones $\cos(\omega t + \varphi_0)$ y $\sin(\omega t + \varphi)$ son ± 1 , así:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= -A\omega (\pm 1) \\ v_{\max} &= \pm A\omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

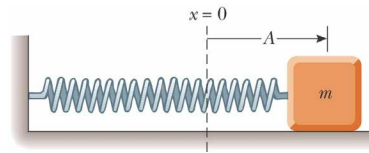
$$\begin{aligned} a_{\max} &= -A\omega^2 (\pm 1) \\ a_{\max} &= \pm A\omega^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.4 Determinación del ángulo de fase

Para determinar φ_0 es necesario conocer la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en $t = t_0$, si la masa parte del reposo $v_0 = 0$, entonces es fácil encontrar el ángulo de fase φ_0 .

1. Si la masa en el resorte se encuentra estirada $+x_0$, hacia la derecha de la posición de equilibrio, en $t_0 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \\ +x_0 &= A \cos(\varphi_0) \\ \varphi_0 &= 0 \text{ y } x_0 = A \end{aligned}$$



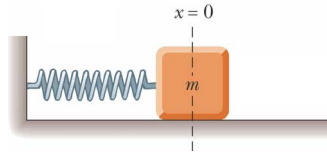
2. Si la masa en el resorte se encuentra comprimida $-x_0$, hacia la izquierda de la posición de equilibrio, en $t_0 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -x_0 &= A \cos \varphi_0 \\ \varphi_0 &= \pi \text{ y } x_0 = A \end{aligned}$$

3. Si la masa en el resorte se encuentra en la posición de equilibrio $x_0 = 0$, en $t_0 = 0$, entonces:

$$0 = A \cos(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$



4. Si la masa en el resorte se encuentra en una posición diferente a las anteriores, es necesario conocer su v_0 adicional a la x_0 en $t_0 = 0$, esto plantea dos ecuaciones una en posición y otra velocidad, a las cuales se les aplican las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = A \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$v(0) = v_0 = -A\omega \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

Al resolver este sistema se obtiene (3.17):

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-A\omega \sin \varphi_0}{A \cos \varphi_0} = -\omega \tan \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{-v_0}{\omega x_0} \right) \quad (3.17)$$

Similarmente es fácil evaluar la amplitud A (3.18):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2} \quad (3.18)$$

3.2 Energía en el MAS en el sistema masa-resorte.

La fuerza ejercida por un resorte es conservativa, lo cual significa que, en ausencia de fricción la energía del sistema bloque-resorte es constante.

$$E = K + U$$

donde E (3.21) es la energía total, K (3.19) es la energía cinética y U (3.20) es la energía potencial, cada una de ellas viene definida por:

$$K(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.19)$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.20)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

y finalmente

$$E = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (3.21)$$

Ya que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ y $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

La energía total de cualquier oscilador armónico simple es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud (Figura 16).

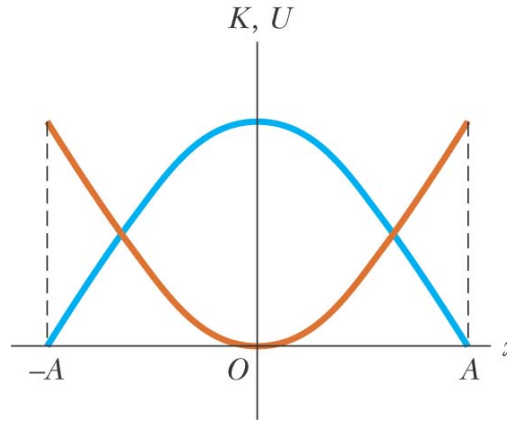


Figura 16.

La velocidad del cuerpo que sufre un desplazamiento x se puede calcular a partir de

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

y resolviendo para v (3.22):

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad (3.22)$$

De igual forma la velocidad máxima (3.23) ocurre en $x = 0$.

$$v_{\max} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2} = \pm \omega A \quad (3.23)$$

3.3 Péndulo simple

Un péndulo simple es un sistema idealizado (Figura 17) en el cual una masa puntual está suspendida del extremo de una cuerda sin masa:

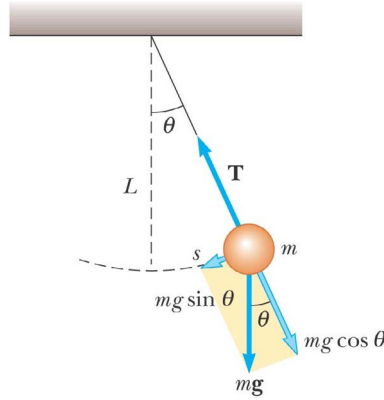


Figura 17.

Donde T es la fuerza ejercida por la cuerda, mg es la fuerza gravitacional. El movimiento ocurre en el plano vertical.

La fuerza tangencial $F = -mg \sin \theta$ (fuerza de restitución), es decir, la componente tangencial (fuerza restauradora) de la fuerza gravitatoria actúa hacia $\theta = 0$ opuesta al desplazamiento. Aplicando la segunda ley de Newton (3.24) a este sistema se tiene:

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (3.24)$$

donde $\sin \theta = \frac{s}{L}$ si θ es pequeño $\sin \theta = \theta$, de tal forma que $s = L\theta$, así que la ecuación anterior se simplifica (3.25):

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (3.25)$$

De tal forma que un péndulo simple efectúa un movimiento armónico simple con frecuencia angular (3.26):

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \text{ o } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.26)$$

Período (3.27):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.27)$$

Note que el período no depende ni de la masa ni de la amplitud θ_0 .

La solución de la ecuación (3.25) esta basada en la ecuación $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, si $A = \theta_0$ la amplitud angular, φ_0 es la constante de fase. De tal forma obtenemos (3.28):

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.28)$$

3.4 Péndulo físico

Un cuerpo extenso gira libremente alrededor de un eje que no pasa por su centro de masa (Figura 18). Tal dispositivo constituye un péndulo físico que efectúa un movimiento armónico simple para pequeños desplazamientos.

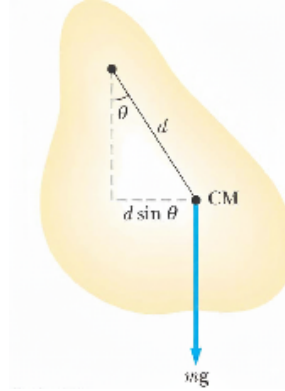


Figura 18.

La ecuación diferencial que describe este movimiento es (3.29):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad (3.29)$$

Donde d es la distancia del pivote al centro de masa. Se tiene la frecuencia angular (3.30) y el periodo (3.31)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (3.30)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (3.31)$$

donde I es el momento de inercia alrededor del eje dado.

3.5 Movimiento armónico amortiguado

Los movimientos oscilatorios que se han considerado hasta ahora han correspondido a sistemas ideales, es decir, sistemas que oscilan de manera indefinida bajo la acción de una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales las fuerzas disipativas, como la fricción, retardan el movimiento. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está amortiguado.

Un ejemplo de un oscilador amortiguado es una masa unida a un resorte y sumergida en un líquido viscoso, Figura 19.

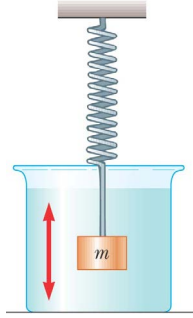


Figura 19.

Oscilación Amortiguada. La disminución de la amplitud causada por las fuerzas disipativas se denomina amortiguación y el movimiento correspondiente se le llama oscilación amortiguada.

El caso más simple para un análisis detallado es un oscilador armónico simple con la fuerza de amortiguación por fricción (3.32), directamente proporcional a la velocidad del cuerpo oscilante.

$$F \approx -v = -\frac{dx}{dt} \quad (3.32)$$

La fuerza adicional (fuerza retardadora) F sobre el cuerpo debida a la fricción tiene dirección opuesta (3.33) a v .

$$F = -bv \quad (3.33)$$

donde b es la intensidad de la fuerza de amortiguación o coeficiente de amortiguamiento, b tiene unidades de $\text{N/s} = \text{kg/s}$.

La fuerza neta (3.34) sobre el cuerpo es entonces:

$$\sum F = -kx - bv \quad (3.34)$$

Luego aplicando la segunda ley de Newton:

$$ma = -kx - bv$$

o bien:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv$$

finalmente se puede escribir:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3.35)$$

Esta ecuación diferencial (3.35) describe las oscilaciones amortiguadas mecánicas y no mecánicas. La solución (3.36) propuesta de la ecuación diferencial cuando b es pequeña es:

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.36)$$

Si b crece rápidamente las oscilaciones decrecen hacia cero también rápidamente (o rápidamente terminan las oscilaciones).

La amplitud disminuye con el tiempo (oscilador con poca amortiguación) Figura 20.

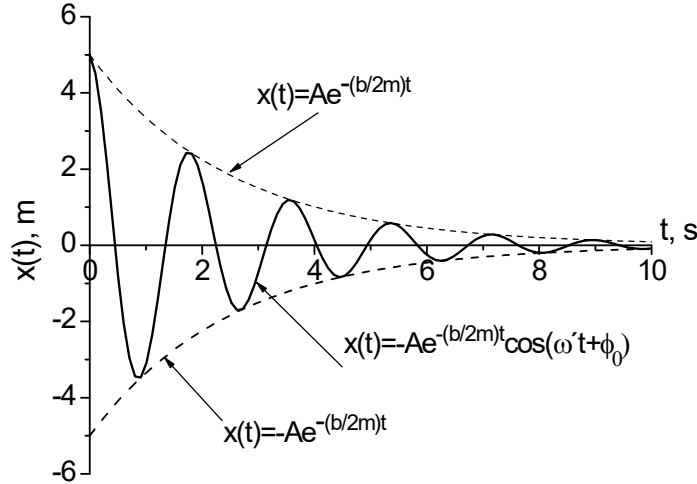


Figura 20.

La curva en azul representa el factor exponencial de la solución de la ecuación diferencial, esta curva muestra que la amplitud decae exponencialmente con el tiempo.

Para una masa y constante del resorte dadas, las oscilaciones se amortiguan con mayor rapidez a medida que el valor máximo de la fuerza retardadora se aproxima al valor máximo de la fuerza restauradora.

Donde la frecuencia angular de amortiguación es (3.37):

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.37)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular cuando no hay fuerza retardadora y se le llama frecuencia angular natural del sistema.

La frecuencia cíclica de amortiguamiento (3.38) es:

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.38)$$

Tipos de amortiguamiento

- Si $b < b_c$ el sistema oscila con una amplitud constante decreciente. Observe la gráfica y diga cual de estos sistemas se encuentra en esta condición. El sistema efectúa varias oscilaciones antes de alcanzar el equilibrio.
- Amortiguación Crítica (3.39): El sistema no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

$$b_c = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km} \quad (3.39)$$

Donde b_c es un valor crítico.

- Si $b > 2\sqrt{km}$ la condición se denomina sobreamortiguación. Existe oscilación, pero el sistema vuelve al equilibrio más lentamente que con amortiguación crítica, Figura 21. Por ejemplo el caso anterior es ligeramente mayor que el valor de b_c , note que el sistema regresa al equilibrio más lentamente. El sistema desplazado, cuando tiene libertad de moverse no oscila, sino simplemente regresa a su posición de equilibrio, pero requiere un gran tiempo para alcanzar este.

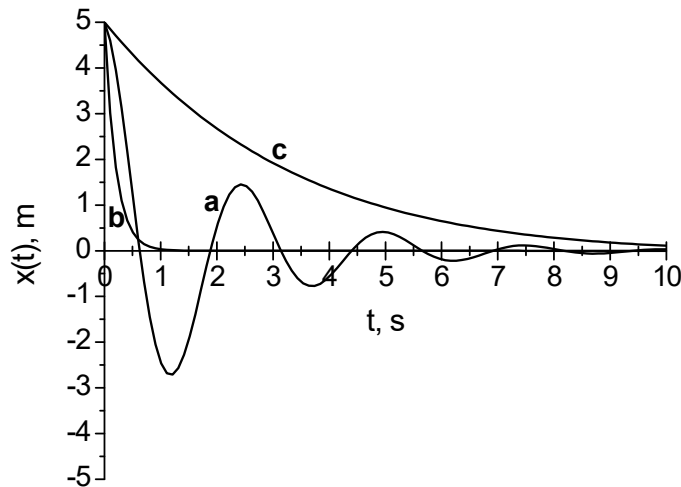


Figura 21.

3.6 Problemas propuestos

- Un elástico de "bungge" fijo a una torre se comporta como un resorte de constante $k = 20.0 \text{ N m}^{-1}$, de él cuelga una masa de 55 kg sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego se le deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento

armónico simple. La ecuación de movimiento es:

$$x(t) = 35.7 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

donde x se mide en m y t en s.

Determine:

- (a) La función de velocidad, $v(t)$
 - (b) La función de aceleración, $a(t)$
 - (c) ¿En que tiempo, en s, pasa la masa por primera vez por la posición de equilibrio?
2. El desplazamiento en el tiempo de un bloque de 60 g amarrado a un resorte horizontal con constante de $k = 35 \text{ N m}^{-1}$, está dado por:

$$x(t) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$$

donde $A = 20 \text{ cm}$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Halle:

- (a) La energía cinética (Nm) evaluada en un tiempo $t = \frac{0.3}{f}$, donde f es la frecuencia cíclica
 - (b) La energía potencial (Nm) evaluada en un tiempo $t = \frac{0.3}{f}$
 - (c) El tiempo (s) en el cual las energías cinética y potencial son iguales.
3. Una masa de 75 kg cuelga de un alambre cuya longitud no estirada es $l_0 = 2.00 \text{ m}$ y lo estira $4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$. Si se tira de la masa para bajarla otro poco y se suelta, calcule la frecuencia con que vibrará.
4. Un resorte ideal con $k = 800 \text{ N/m}$ se monta en una superficie horizontal. Un deslizador de masa 0.400 kg conectado a su extremo está en movimiento armónico simple con una amplitud de 0.075 m . No hay fuerzas de fricción sobre el deslizador. Calcule:
- (a) La velocidad máxima del deslizador.
 - (b) Su velocidad cuando está en $x = 0.030 \text{ m}$.
 - (c) La magnitud de su aceleración máxima.
 - (d) Su aceleración en $x = 0.030 \text{ m}$.
 - (e) Su energía mecánica total en cualquier punto de su movimiento.
5. Una masa de 0.400 kg se mueve en el extremo de un resorte con $k = 300 \text{ N/m}$, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv$. Determine:
- (a) Si $b = 9.00 \text{ kg/s}$, ¿qué frecuencia de oscilación tiene la masa?

- (b) ¿Con que valor de b la amortiguación será crítica?
6. Calcule la longitud de un péndulo simple que realiza 100 oscilaciones completas en 55.0 s en un lugar donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.
7. Un péndulo en la Luna. En la Tierra, cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en la Luna donde $g = 1.62 \text{ m/s}^2$?
8. Un deslizador de masa desconocida se conecta a un resorte ideal con $k = 200 \text{ N/m}$, se observa que vibra con una frecuencia de 8.0 Hz. Calcule:
- (a) El periodo
(b) La frecuencia angular.
(c) La masa del deslizador.
9. La punta de la aguja de una máquina de coser se mueve con un MAS a lo largo del eje x con una frecuencia de 2.0 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son de 1.1 cm y 8.5 m/s. Determine:
- (a) La componente de aceleración de la aguja en $t = 0$.
Escriba las ecuaciones para las componentes de:
(b) Posición, $x(t)$
(c) Velocidad, $v(t)$
(d) Aceleración, $a(t)$
10. Un objeto de 0.500 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con $k = 400 \text{ N/m}$. Cuando este objeto está a 0.012 m desde su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0.300 m/s. Calcule la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento.
11. El desplazamiento de una partícula, medido desde su posición de equilibrio está dado por $x(t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones, si hay alguna, son equivalentes?
- (a) $x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$
(b) $x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right)$
(c) $x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$
(d) $x(t) = A \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$
12. El desplazamiento de una partícula está dado por $x(t) = 0.03 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ m}$. ¿A qué tiempo por primera vez ($t > 0$) las cantidades siguientes:
- (a) el desplazamiento;

- (b) la velocidad; y
(c) la aceleración, tienen su valor máximo (> 0).
13. Una masa de 300 g está conectada a un resorte de masa despreciable de constante de fuerza 5.00 N/m , el resorte oscila libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. Si la masa se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se suelta a partir del reposo, determine:
- (a) El periodo del movimiento;
(b) La velocidad máxima y la aceleración máxima de la masa;
(c) Escriba las funciones periódicas de desplazamiento, velocidad y aceleración como función de tiempo.
(d) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando el desplazamiento es igual 2.00 cm . (Nota: se debe cumplir que $K + U = E$).
14. El desplazamiento angular de un péndulo simple está dado por:

$$\theta(t) = 0.1\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

La masa de la lenteja es de 0.4 Kg . Cuando $\theta = 0.05\pi$ halle:

- (a) la longitud del péndulo simple,
(b) la velocidad de la lenteja cuando $t = 0.25\text{ s}$.
15. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego se le deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación de movimiento es:

$$x(t) = 2\cos t + 3\sin t, t \geq 0$$

donde x se mide en cm y t en s . (Tomemos la dirección positiva la correspondiente hacia abajo.)

- (a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t .
(b) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
16. Un deslizador se encuentra unido a un resorte, en una superficie horizontal sin fricción se estira hacia la derecha una distancia de 6 cm y se suelta.
- (a) Si regresa en 2 s al punto donde se soltó y continúa vibrando con MAS, calcúlese su posición y velocidad después de 5.2 s .
(b) ¿Cuál es su velocidad máxima?
17. El desplazamiento de un bloque de 50 g amarrado a un resorte horizontal ($k = 32\text{ N m}^{-1}$) está dado por:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

donde $A = 20\text{ cm}$. Halle:

- (a) Las energías cinética y potencial en $t = 0.2T$, donde T es el periodo.
 - (b) Las energías cinética y potencial en $x = \frac{A}{2}$.
 - (c) Los tiempos en los cuales son iguales las energías cinética y potencial.
18. Un bloque de 0.5 kg se sujeta a un resorte ($k = 12.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$). La frecuencia del movimiento amortiguado es 0.2% inferior a la frecuencia del movimiento natural.
- (a) ¿Cuál es la constante de amortiguamiento?
 - (b) ¿Como varía la amplitud con el tiempo?
 - (c) ¿Cuál es la constante de amortiguamiento crítico?

3.6.1 Soluciones de problemas propuestos

1. Elástico de "bungee", $k = 20.0 \text{ N m}^{-1}$, $m = 55 \text{ kg}$.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20.0 \text{ N m}^{-1}}{55 \text{ kg}}} = 0.60302 \text{ s}^{-1}$$

$$x(t) = 35.7 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right) = 35.7 \sin\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

donde x se mide en m y t en s.

- a. La función de velocidad:

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left[35.7 \sin\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right) \right] = 21.528 \cos\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

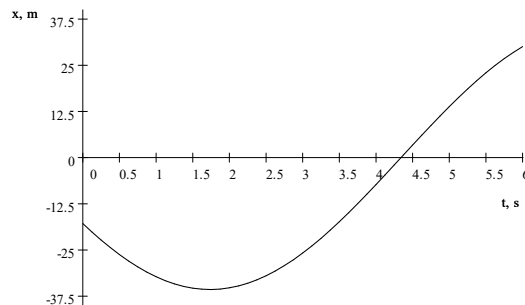
- b. La función de aceleración:

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[35.7 \sin\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right) \right] = -12.982 \sin\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

- c. En la posición de equilibrio $x(t) = 0$:

$$0 = 35.7 \sin\left(0.60302t - \frac{5\pi}{6}\right), \text{ el argumento de la función debe ser cero ya que } 0 = 35.7 \sin 0$$

$$\text{Luego: } 0.60302t - \frac{5\pi}{6} = 0, \text{ donde } t = 4.3415 \text{ s}$$



$$v = 21.528 \cos \left(0.60302t - \frac{5\pi}{6} \right)$$

2. Masa del bloque $m = 60 \text{ g} = 0.06 \text{ kg}$; $k = 35 \text{ N m}^{-1}$, el desplazamiento está dado por:

$$x(t) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{35.0 \text{ N m}^{-1}}{0.06 \text{ kg}}} = 24.152 \text{ s}^{-1}, A = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Note: } \cos \frac{\pi}{2} = 0; \sin \frac{\pi}{2} = 1.0$$

$$x(t) = A \cos \omega t \sin \varphi = 0.2 \text{ m} \cos (24.152 \text{ s}^{-1}t)$$

a. K en N m en $t = \frac{0.3}{f} = 0.3T$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{24.152 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 3.8439 \text{ Hz}$$

$$t = \frac{0.3}{3.8439 \text{ Hz}} = 7.8046 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$v(t) = \frac{d(0.2 \text{ m} \cos(24.152 \text{ s}^{-1}t))}{dt} = -4.8304 \text{ m s}^{-1} \sin 24.152 \text{ s}^{-1}t$$

Luego la velocidad en $t = 0.3T$

$$v(7.8046 \times 10^{-2} \text{ s}) = -4.8304 \text{ m s}^{-1} \sin(24.152 \text{ s}^{-1}(7.8046 \times 10^{-2} \text{ s})) = -4.594 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Energía Cinética } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.06 \text{ kg}) \left(-4.594 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0.63315 \text{ N m}$$

b. Energía Potencial U , en $t = 0.3T = 7.8046 \times 10^{-2} \text{ s}$ el desplazamiento es:

$$x(7.8046 \times 10^{-2} \text{ s}) = 0.2 \text{ m} \cos(24.152 \text{ s}^{-1}(7.8046 \times 10^{-2} \text{ s})) = -6.1806 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{Energía Potencial } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(35 \text{ N m}^{-1})(-6.1806 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 0.06685 \text{ N m}$$

$$\text{Energía Total: } E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(35 \text{ N m}^{-1})(0.2 \text{ m})^2 = 0.70 \text{ N m}$$

$$\text{Note que: } 0.63315 \text{ N m} + 0.06685 \text{ N m} \sim 0.70 \text{ N m}$$

c. Tiempo en el cual $K = U$, luego $E = K + U = 2K = 2 \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = mv^2$

$$0.70 \text{ N m} = 0.06 \text{ kg} (-4.8304 \text{ m s}^{-1} \sin 24.152 \text{ s}^{-1}t)^2, \text{ despejando para } t:$$

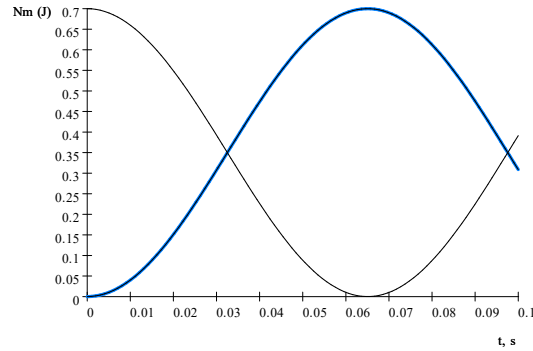
$$\frac{0.70 \text{ N m}}{0.06 \text{ kg} (-4.8304 \text{ m s}^{-1})^2} = (\sin 24.152 \text{ s}^{-1}t)^2; 0.500 = (\sin 24.152 \text{ s}^{-1}t)^2$$

$$t = \frac{\sin^{-1} \sqrt{0.500}}{24.152 \text{ s}^{-1}} = 3.2519 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Graficamente:

$$K = 0.03 (-4.8304 \sin 24.152t)^2$$

$$U = 17.5 (0.2 \cos(24.152t))^2, \text{ note que el tiempo es } 0.325 \text{ s}$$



3. $m=75 \text{ kg}$, $l_0 = 2.00 \text{ m}$, $\Delta l = 4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$.

$$F = kL, k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$$

$$k = \frac{9.81 \text{ m s}^{-2} \times 75 \text{ kg}}{4.00 \times 10^{-3} \text{ m}} = \frac{1.8394 \times 10^5}{\text{s}^2} \text{ kg}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.8394 \times 10^5}{75 \text{ kg}}}$$

$$f = 7.8818 \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = 7.881 \text{ Hz}$$

4. $k = 800 \text{ N/m}$, $m = 0.400 \text{ kg}$, en MAS

(a) $\mathbf{v}_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \sqrt{\frac{800 \text{ N/m}}{0.400 \text{ kg}}} 0.075 \text{ m}$

$$= 3.3541 \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} \text{ m} = 3.3541 \text{ m s}^{-1}$$

b. $\mathbf{v}_{x=0.030 \text{ m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{\frac{800 \text{ N/m}}{0.400 \text{ kg}}} \sqrt{(0.075 \text{ m})^2 - (0.030 \text{ m})^2}$

$$\mathbf{v}_{x=0.030 \text{ m}} = 3.0741 \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} \sqrt{\text{m}^2} = 3.0741 \text{ m s}^{-1}$$

c. $a_{\max} = -\omega^2 A = -\frac{kA}{m}$

$$a_{\max} = -\frac{800 \text{ N/m}}{0.400 \text{ kg}} 0.075 \text{ m} = -\frac{150.0}{\text{s}^2} \text{ m}$$

(b) $a|_{x=0.030 \text{ m}} = -\frac{k}{m} x = -\frac{800 \text{ N/m}}{0.400 \text{ kg}} (+0.030 \text{ m}) = -\frac{60.0}{\text{s}^2} \text{ m}$

(c) $\mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{K} = \frac{1}{2} k A = \frac{1}{2} 800 \text{ N/m} (0.075 \text{ m})^2 = 2.25 \text{ J}$

5. $m=0.400 \text{ kg}$, $k = 300 \text{ N/m}$

(a) Si $b = 9.00 \text{ kg/s}$, $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{300 \text{ N/m}}{0.400 \text{ kg}} - \frac{(9.00 \text{ kg/s})^2}{4(0.400 \text{ kg})^2}}$

$$\omega' = 24.9717 \frac{1}{\text{s}}$$

b. Amortiguación crítica, $b_c = 2\sqrt{km}$:

$$b_c = 2\sqrt{(300 \text{ N m}^{-1}) 0.400 \text{ kg}} = 21.909 \sqrt{\frac{\text{kg}^2}{\text{s}^2}} = 21.91 \text{ kg s}^{-1}$$

6. $g_T = 9.81 \text{ m/s}$, $T_T = 1.60 \text{ s}$. $T_L = ?$, donde $g_L = 1.62 \text{ m s}^{-2}$.

$$f = \frac{100}{55.0 \text{ s}} = \frac{1.8182}{\text{s}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}, \text{ resolviendo para } L:$$

$$L = \frac{g}{(2\pi f)^2} = \frac{1}{4} \frac{g}{f^2 \pi^2} = \frac{1}{4} \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{\left(\frac{1.8182}{\text{s}}\right)^2 \pi^2} = 7.5167 \times 10^{-2} \text{ m} = 7.5167 \text{ cm}$$

7. Un péndulo en la Luna.

$$T_T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_T}}, \text{ despejando para } L: L = \frac{1}{4} \frac{T_T^2}{\pi^2} g_T, \text{ luego el periodo en la luna } T_L = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_L}},$$

y despejando L: $L = \frac{1}{4} \frac{T_L^2}{\pi^2} g_L$, como la L no cambia:

$$\frac{1}{4} \frac{T_T^2}{\pi^2} g_T = \frac{1}{4} \frac{T_L^2}{\pi^2} g_L, \text{ despejando para } T_L:$$

$$T_L = \frac{1}{g_L} \sqrt{g_L g_T} T_T = \frac{1}{1.62 \text{ m s}^{-2}} \sqrt{(1.62 \text{ m s}^{-2})(9.81 \text{ m s}^{-2})} 1.60 \text{ s} = 3.9373 \text{ s}$$

8. Resorte ideal con $k = 200 \text{ N/m}$, $f = 8.0 \text{ Hz}$.

(a) Periodo: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.0 \text{ Hz}} = 0.125 \text{ s}$

(b) Frecuencia Angular: $\omega = 2\pi f = 2\pi 8.0 \text{ Hz} = \frac{50.265 \text{ rad}}{\text{s}}$

(c) La masa del deslizador: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, donde: $m = \frac{k}{\omega^2}$, donde $m = \frac{200 \text{ N/m}}{\left(\frac{50.265}{\text{s}}\right)^2} = 7.9159 \times 10^{-2} \text{ kg}$

9. $f = 2.0 \text{ Hz}$. en $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son de 1.1 cm (0.011 m) y 8.5 m/s , respectivamente.

(a) $a(t=0) = -\omega^2 x = -(2\pi f)^2 x$

$$a(t=0) = -(2\pi \times 2.0 \text{ Hz})^2 (0.011 \text{ m}) = -1.7371 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Escriba las ecuaciones para las componentes de:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi (2.0 \text{ Hz}) = 12.566 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(\frac{-8.5 \text{ m s}^{-1}}{12.566 \text{ s}^{-1} \times 0.011 \text{ m}}\right) = -1.5545$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0.011 \text{ m})^2 + \frac{(-8.5 \text{ m s}^{-1})^2}{(12.566 \text{ s}^{-1})^2}} = 0.67652 \text{ m}$$

b. Posición, $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) =$

$$x(t) = 0.67652 \text{ m} \cos\left(12.566 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t - 1.5545\right)$$

c. Velocidad, $v(t) = \frac{d(A \cos(\omega t + \varphi_0))}{dt} =$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = -8.5012 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin\left(12.566 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t - 1.5545\right)$$

d. Aceleración, $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-\omega A (\sin(\omega t + \varphi_0)))}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -106.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos\left(12.566 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t - 1.5545\right)$$

$$a(t=0) = -106.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos(-1.5545) = -1.7409 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

10. $m = 0.500 \text{ kg}$, resorte con $k = 400 \text{ N/m}$, $x = 0.012 \text{ m}$, $v = 0.300 \text{ m/s}$.

$$\text{Energía Total} = E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2} (0.500 \text{ kg}) (0.300 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} (400 \text{ N/m}) (0.012 \text{ m})^2 = 0.0513 \text{ J}$$

11. El desplazamiento de una partícula.

Recuerde que la función coseno es periódica, su periodo mínimo positivo es 2π , el argumento de la función de desplazamiento equivalente es: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$, luego la función equivalente es:

$$x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

También recuerde que $\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, entonces: $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{6}\pi$, la función de desplazamiento equivalente es:

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

RESPUESTA: **b.** y **c.**

12. Función de desplazamiento:

$$x(t) = 0.03 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right) m$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 1.885 \cos(62.832t + 0.7854)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -118.44 \sin(62.832t + 0.7854)$$

- (a) El desplazamiento máximo ocurre cuando $x(t) = 0.03 m$, el tiempo se puede determinar de $0.03 = 0.03 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$1 = \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right); \sin^{-1} 1 = 20\pi t + \frac{\pi}{4}, \text{ ó } 20\pi t + \frac{\pi}{4} = 1.5708, \text{ y el tiempo: } t = \frac{1}{20\pi} \left(1.5708 - \frac{\pi}{4}\right) = 0.0125 s$$

- (b) La velocidad máxima es: $v_{\max} = \omega A = 20\pi (0.03) = 0.6\pi = 1.885 m/s$, el tiempo en que ocurre está es:

$$1.885 = 1.885 \cos(62.832t + 0.7854), \text{ despejando para el tiempo: } t = -1.2391 \times 10^{-2}. \text{ Este tiempo es negativo, pero recordemos que la velocidad tienen su valor máximo (} > 0, \text{ positivo) y se repite cada periodo de tiempo, el periodo se puede calcular de: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} s.$$

$$\text{El tiempo es entonces: } -1.2391 \times 10^{-2} + \frac{1}{10} = 8.7609 \times 10^{-2} s \sim 0.088 s.$$

También recuerde que cuando el desplazamiento es cero la velocidad es máxima, luego t se puede determinar de: $0 = 0.03 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, y $t = -0.0125 s$, $-0.0125 + \frac{1}{10} = 0.0875 s \sim 0.088 s$.

- (c) La aceleración máxima es $a_{\max} = \omega^2 A = (20\pi)^2 (0.03) = 12.0\pi^2 = 118.44 m/s^2$
 $118.44 = -118.44 \sin(62.832t + 0.7854)$, el tiempo es: $t = -3.7357 \times 10^{-2}$, y luego su valor máximo positivo de la aceleración se da cuando: $-3.7357 \times 10^{-2} + \frac{1}{10} = 6.2643 \times 10^{-2} \sim 0.063 s$, (VEA GRAFICA PARA EL INCISO b Y c.)

13. Datos: $k = 5.00 N/m$, $A = 5.00 cm = 0.05m$, $m = 300 g = 0.3Kg$.

- (a) El periodo de su movimiento se puede calcular conociendo la frecuencia angular: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{0.3}} = 4.0825 rad/s$. Y su periodo es: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.0825} = 1.5391 s$.

- (b) La velocidad máxima es: $v_{\max} = (4.0825)(0.05) = 0.20413 m/s$; la aceleración máxima es:

$$a_{\max} = (4.0825)^2 (0.05) = 0.83334 m/s^2.$$

- (c) Funciones periódicas: es necesario encontrar el ángulo φ_0 :

$$0.05 = 0.05 \cos(4.0825(0) + \varphi_0), \text{ la solución es : } \{\varphi_0 = 0\}$$

$$0 = -(0.05)(4.0825) \sin(4.0825(0) + \varphi_0), \text{ la solución es : } \{\varphi_0 = 0\}$$

Luego $\varphi_0 = 0$. Y las funciones periódicas son:

$$x = A \cos \omega t = 0.05 \cos(4.0825t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t = -0.20413 \sin 4.0825t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t = -0.83334 \cos 4.0825t$$

- (d) Es necesario determinar la velocidad cuando $x = 0.02 \text{ m}$.

$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{5}{0.3}(0.05^2 - 0.02^2)} = \pm 0.18708 \text{ m/s}$. Los signos positivo y negativo indican que la masa podría estar moviéndose a la izquierda o hacia la derecha en ese instante.

$$\text{Energías cinética: } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0.3(0.18708)^2 = 5.2498 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{Energía potencial: } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}5(0.02)^2 = 0.001 \text{ J}$$

$$5.2498 \times 10^{-3} + 0.001 = 6.2498 \times 10^{-3} \text{ J} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}5(0.05)^2 = 0.00625 \text{ (Energía Total)}$$

14. El desplazamiento angular de este péndulo simple está dado por:

$$\theta(t) = 0.1\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

con $m = 0.4 \text{ Kg}$ y $\theta = 0.05\pi$ halle:

- (a) la longitud del péndulo simple:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \text{ luego } L = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.81}{(2\pi)^2} = 0.24849 \text{ m},$$

- (b) la velocidad de la lenteja cuando $t = 0.25 \text{ s}$:

$$v = L \frac{d\theta}{dt} = 0.24849 \frac{d\left(0.1\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)}{dt} = 0.4905 \cos(6.2832t + 0.5236), \text{ ahora la velocidad cuando } t = 0.25 \text{ s:}$$

$$v = 0.4905 \cos(6.2832(0.25) + 0.5236) = -0.24525 \text{ m/s}$$

$$\theta(t) = 0.1\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (línea negra delgada)}$$

$$v = 0.4905 \cos(6.2832t + 0.5236) \text{ (línea negra gruesa)}$$

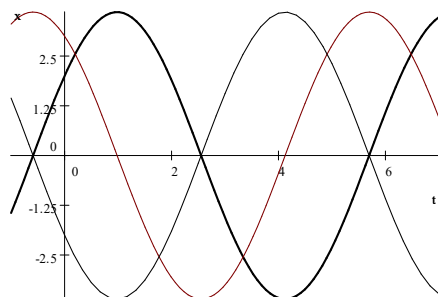
15. Ecuación del MAS: $x(t) = 2 \cos t + 3 \sin t, t \geq 0$, (Línea gruesa)

donde x se mide en cm y t en s.

$$(a) \ v(t) = \frac{d}{dt}(2 \cos t + 3 \sin t) = -2.0 \sin t + 3.0 \cos t \text{ (Línea discontinua)}$$

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2}(2 \cos t + 3 \sin t) = -2.0 \cos t - 3.0 \sin t \text{ (Línea delgada)}$$

(b) $x(t) = 2 \cos t + 3 \sin t$,



cuando pasa por la posición de equilibrio:

$$0 = 2 \cos t + 3 \sin t, \text{ o también, } -2.0 \cos t = 3.0 \sin t;$$

$$\frac{-2.0}{3.0} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t, \quad t = \tan^{-1} \left(\frac{-2.0}{3.0} \right), \text{ resolviendo:}$$

$$t = -0.588, \text{ luego como } t \geq 0,$$

$$\text{entonces } x(0) = 0 \text{ se vuelve a repetir en el tiempo } t = -0.588 + \pi = 2.5536454$$

16. Movimiento MAS: Se estira $A = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$ y se suelta en $t = 0$.

(a) El tiempo para una vibración completa es 2 s. Por lo tanto la frecuencia será

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0.5 \text{ Hz. La posición después de } 5.2 \text{ s, es: } x(t) = A \cos 2\pi f t = 0.06 \text{ m} \cos [(2\pi) (0.5 \text{ Hz}) (5.2 \text{ s})] = -4.8541 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

El signo menos indica que el deslizador se encuentra a 4.97 cm a la izquierda de su posición de equilibrio.

$$v(t) = \frac{d}{dt} (A \cos 2\pi f t) = -6.2832 A (\sin 6.2832 f t) f$$

$$v(t) = -6.2832 (0.06 \text{ m}) (\sin 6.2832 (0.5 \text{ Hz}) (5.2 \text{ s})) 0.5 \text{ Hz} = 0.1108 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) La velocidad máxima ocurre cuando el desplazamiento es cero: $v_{\max} = -2\pi f A = -2\pi (0.5 \text{ Hz}) (0.06 \text{ m}) = -0.1885 \text{ m s}^{-1}$,
velocidad máxima dirigida hacia la izquierda.

17. $m = 50 \text{ g} = 0.05 \text{ kg}$, resorte con $k = 32 \text{ N m}^{-1}$.

$$\text{Luego } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{32 \text{ N m}^{-1}}{0.05 \text{ kg}}} = 25.298 \frac{1}{\text{s}}$$

$$25.298 \frac{1}{\text{s}} = 2\pi f, \text{ donde } f = 4.0263 \text{ s}^{-1}, \text{ y el periodo:}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4.0263 \text{ s}^{-1}} = 0.24837 \text{ s}$$

Entonces el tiempo en que se evalúa la U y K es:

$$t = 0.2T = 0.2 (0.24837 \text{ s}) = 4.9674 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Donde:

$$x(t) = A \cos \omega t = 0.2 \text{ m} \cos 25.298 \frac{1}{\text{s}} t$$

$$x(4.9674 \times 10^{-2} \text{ s}) = 0.2 \text{ m} \cos 25.298 \frac{1}{\text{s}} (4.9674 \times 10^{-2} \text{ s}) = 0.0618 \text{ m}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left(0.2 \text{ m} \cos 25.298 \frac{1}{\text{s}} t \right) = -5.0596 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \frac{1}{\text{s}} \sin \frac{25.298}{\text{s}} t$$

$$v(4.9674 \times 10^{-2} \text{ s}) = -5.0596 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \sin \left(\frac{25.298}{\text{s}} 4.9674 \times 10^{-2} \text{ s} \right) = -4.812 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Finalmente con todos estos datos se puede evaluar la U y K

(a) En $t = 0.2T$

$$\text{Energía Cinética } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.05 \text{ kg}) \left(-4.812 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 0.57888 \text{ N m}$$

$$\text{Energía Potencial } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(32 \text{ N m}^{-1})(0.0618 \text{ m})^2 = 6.1108 \times 10^{-2} \text{ N m}$$

$$\text{Energía Total: } E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(32 \text{ N m}^{-1})(0.2 \text{ m})^2 = 0.64 \text{ N m}$$

$$\text{Note que: } 0.57888 \left(\text{kg} \right) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 6.1108 \times 10^{-2} \text{ N m} = 0.63999 \left(\text{kg} \right) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \sim 0.64 \text{ N m}$$

(b) Energía Potencial, en $x = \frac{A}{2}$, $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(32 \text{ N m}^{-1}) \left(\frac{0.2 \text{ m}}{2} \right)^2 = 0.16 \text{ N m}$

Energía Cinética, en $x = \frac{A}{2}$, $K = E - U = 0.64 \text{ N m} - 0.16 \text{ N m} = 0.48 \text{ N m}$.

(c) $E = K + U$ si $K = U$; entonces: $E = 2K = 2U$; $0.64 \text{ N m} = 2U$, luego $U = 0.32 \text{ N m}$;

$$0.32 \text{ N m} = \frac{1}{2}(32 \text{ N m}^{-1})x^2, \text{ resolviendo para } x = \sqrt{\frac{0.32 \text{ N m}}{16 \text{ N m}^{-1}}} = 0.14142 \text{ m},$$

este desplazamiento ocurre cuando $K = U$, en el tiempo:

$$0.14142 \text{ m} = 0.2 \text{ m} \cos 25.298 \frac{1}{\text{s}} t, \text{ donde } t = \frac{1}{25.298 \frac{1}{\text{s}}} \cos^{-1} \left(\frac{0.14142 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} \right) = 3.1046 \times 10^{-2}$$

18. Amortiguamiento: $m = 0.5 \text{ kg}$, donde $k = 12.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. $\omega' = \left(1 - \frac{0.2}{100} \right) \omega_o = 0.998 \omega_o$,

donde $\omega_o = \sqrt{\frac{12.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0.5 \text{ kg}}} = 5.0 \text{ s}^{-1}$, luego: $\omega' = 0.998 (5.0 \text{ s}^{-1}) = 4.99 \text{ s}^{-1}$

(a) La constante $\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m} \right)^2}$, despejando para b :

$$b^2 = 4\omega_o^2 m^2 - 4\omega'^2 m^2 = 4m^2 (\omega_o^2 - \omega'^2);$$

$$b = 2(0.5 \text{ kg}) \sqrt{(5.0 \text{ s}^{-1})^2 - (4.99 \text{ s}^{-1})^2} = 0.31607 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

- (b) La amplitud varia con el tiempo de acuerdo a: $x(t) = A_o e^{-\left(\frac{bt}{2m}\right)} \cos(\omega t + \phi)$, cuando ω' es real las oscilaciones son subamortiguadas. La amplitud de la oscilación decrece según:

$$x(t) = A_o e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} = A_o e^{-\left(\frac{0.31607 \frac{\text{kg}}{\text{s}} t}{2(0.5 \text{ kg})}\right)} = A_o e^{-\left(\frac{0.31607 t}{s}\right)}$$

- (c) Constante amortiguamiento crítico: $b = 2m\omega_o = 2(0.5 \text{ kg})(5.0 \text{ s}^{-1}) = 5.0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Que es considerablemente mayor que la encontrada en la parte (a).

Capítulo 4

Ondas Mecánicas

Las ondas pueden clasificarse como ondas mecánicas y no mecánicas, en este capítulo se estudian solo las primeras, el requerimiento esencial para que una onda mecánica se genere es que debe existir un medio (gas, sólido o líquido) el cual pueda ser perturbado, además de una fuente que genere esa perturbación, las ondas no mecánicas no requieren de un medio para su propagación, ejemplo de estas se tienen en las ondas electromagnética, luz, ondas de radio, etc.

Una onda mecánica es la propagación de la perturbación a través del medio, la onda mecánica transporta energía, no transporta materia. Por simplicidad se considera que el medio esta formado por partículas que se mueven alrededor de una posición de equilibrio, el desplazamiento de estas partículas puede ser horizontal o vertical. Bajo esta consideración la propagación de la onda, o perturbación, puede ser horizontal al movimiento de las partículas del medio, o puede ser vertical al movimiento de las partículas del medio, así en consideración a esto, las ondas mecánicas pueden clasificarse como longitudinales o transversales, respectivamente.

4.1 Consideraciones de las ondas mecánicas

Las características principales que se debe reunir para que una perturbación se propague y se convierta en onda son los siguientes:

1. Se requiere de una fuente de perturbación, la perturbación siempre viaja o se propaga por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de onda o velocidad de la onda. No confunda la velocidad de la onda con la rapidez con que las partículas se mueven alrededor de sus posiciones de equilibrio.
2. El medio a perturbar puede ser gas, líquido o sólido. Las características del medio tales como densidad, elasticidad, compresibilidad, etc., determinan la velocidad y el mecanismo físico de propagación de las ondas en ese medio.
3. El medio mismo no viaja por el espacio; sus partículas individuales realizan movimientos alrededor de sus posiciones de equilibrio, el movimiento que realizan estas partículas se considera que es un MAS.
4. La onda transporta energía de una región del medio a la otra, pero no materia.

4.1.1 Onda periódica

Una onda periódica es un movimiento repetitivo del medio, el cual esta siendo perturbado continuamente. El pulso de onda es el inicio del movimiento del medio, en la Figura 22, se muestra como se genera un pulso en una cuerda, el punto P representa una partícula del medio o una pedazo muy pequeño de la cuerda, la partícula P sube y baja sin cambiar de posición, flecha azul, pero la onda o perturbación se propaga, flecha roja, esto es, el medio se mueve perpendicular a la propagación de la onda este tipo de pulso es transversal.

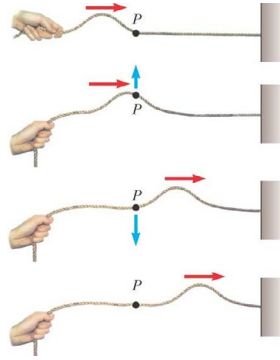


Figura 22.

Si la cuerda se mueve continuamente tal como en el mecanismo que se muestra en la figura, lo que se genera es una onda periódica, la barra flexible se mueve hacia arriba y hacia abajo en forma continua generando una onda en la cuerda que esta atada a esta barra flexible. La configuración completa puede ser representada mediante una onda senoidal, como lo muestra la Figura 23 (a, b y c).

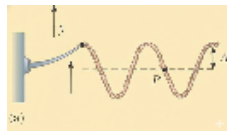


Figura 23a.

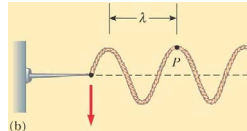


Figura 23b.

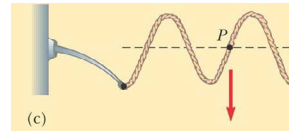


Figura 23c.

Cuando la onda senoidal pasan por la cuerda, todas las partículas del medio experimentan un movimiento armónico simple. El movimiento de cualquier partícula del medio se considera como un MAS, así que cada una de las partículas del medio tiene la características del movimiento armónico simple: amplitud, A , frecuencia cíclica, f , frecuencia angular, ω , y periodo T , tal como se definen en el MAS.

A una configuración completa se le llama longitud de onda, λ , esta es la distancia entre cresta y cresta; entre valle y valle; o entre punto correspondiente a punto correspondiente, en la siguiente repetición de la forma o configuración. Así que la velocidad de la onda, v , viene dada por (4.1):

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (4.1)$$

4.1.2 Descripción matemática de una onda

Las ondas mecánicas se representan mediante la ecuación de onda, esta función describe la posición, y , de cualquier partícula del medio en cualquier instante t . Consideremos el caso de onda que se genera en una cuerda, como anteriormente se describió, la posición de equilibrio es una línea recta en el eje- x , los desplazamientos de la partículas del medio son perpendiculares al eje- x , este desplazamiento sucede en el eje- y . Así que la posición y depende de que partícula se considera, x , y el tiempo, t , en que se observe. Por lo tanto, la ecuación de onda es función de dos variables independientes, esto es, $y(x, t)$, la cual describe la posición (y) a cualquier tiempo (t) y posición (x) de la partícula en la cuerda.

Considere el pulso de la figura siguiente, Figura 24a, se muestra el pulso en el instante $t = 0$, es decir, al inicio de generación del pulso. Se puede decir que esta figura representa la fotografía digital en el instante $t = 0$. La forma del pulso puede ser representado por:

$$y(x, 0) = f(x)$$

Esta función describe la posición transversal, y , del pedazo de cuerda localizado a cada valor x en el instante $t = 0$.

La Figura 24b presenta la fotografía digital del pulso en un tiempo posterior ($t = 1$ s). La velocidad del pulso es v ; en instante, t , el pulso ha viajado una distancia vt , la forma del pulso no cambia, su posición es ahora:

$$y = f(x - vt)$$

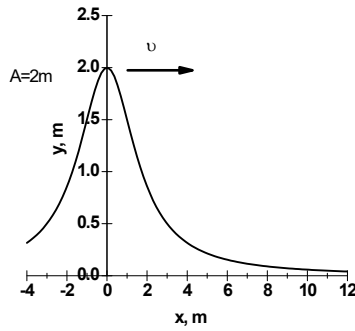


Figura 24a.

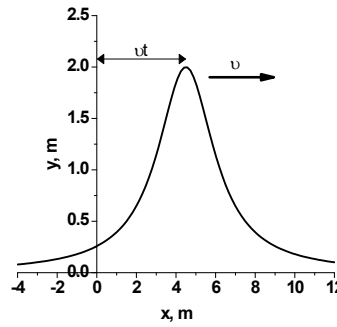


Figura 24b.

Para un pulso que viaja a la derecha la función de onda es:

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

Para un pulso que viaja a la izquierda la función de onda es:

$$y(x, t) = f(x + vt)$$

Si el t se fija en la función de onda, la función de onda se llama la forma de la onda esta define una curva que representa la forma geometría actual del pulso en el tiempo t .

4.1.3 Onda senoidales

Una onda senoidal es una onda periódica continua su función puede ser representada mediante la función de onda también $y(x, t)$ (4.2). Al igual que el pulso la ondas senoidales pueden propagarse a la izquierda o a la derecha, en la Figura 25 se muestran ondas senoidales a dos tiempos diferentes.

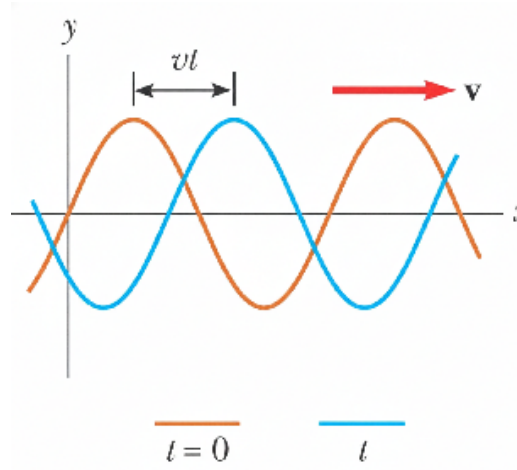


Figura 25.

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0) \quad (4.2)$$

Onda senoidal que avanza en la dirección $+x$. El hilo o la cuerda tiene un movimiento de izquierda a derecha (4.3).

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (4.3)$$

Se tiene que: $v [=]$ m/s, velocidad de desplazamiento de la onda; $A [=]$ m, amplitud; y $f [=]$ Hz $[=]$ $\frac{\text{ciclos}}{\text{s}}$, frecuencia cíclica.

4.1.4 Formas de la ecuación de onda

Si definimos $T = \frac{1}{f} [=]$ s (periodo) y $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f [=]$ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (velocidad), se tiene:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{\lambda f} \right) = A \sin 2\pi \frac{1}{T} \left(t - \frac{x}{\lambda \frac{1}{T}} \right)$$

finalmente se obtiene

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (4.4)$$

que es la ecuación (4.4) de onda en términos de la longitud de onda, λ , y del periodo, T .

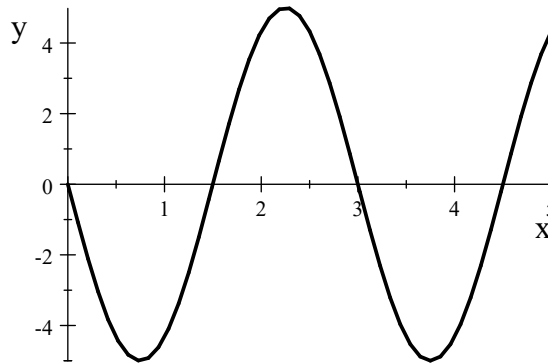
Si definimos $k = \frac{2\pi}{\lambda} [=] \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ (número de onda), luego $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, además de $f = \frac{\omega}{2\pi}$, se obtiene, si $v = \lambda f = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$ de donde $\omega = vk$ (onda periódica) (4.5).

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{vkx}{v} \right) = A \sin (\omega t - kx) \quad (4.5)$$

La forma que debe usarse dependerá de cada situación específica.

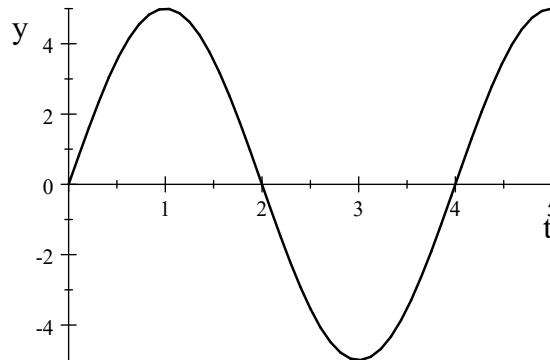
4.1.5 Casos particulares

1. $y(x, t = 0) = A \sin (\omega(0) - kx) = -A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x = -5 \sin 2.0944x$. Por ejemplo: Si $A = 5$ y $\lambda = 3$; $y(x, t = 0) = -5 \sin 2.0944x$



La gráfica representa una fotografía instantánea de la forma de la cuerda en ese instante.

2. $y(x = 0, t) = A \sin (\omega t - k(0)) = A \sin \omega t = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$. Por ejemplo: Si $A = 5$ y $\lambda = 3$, $T = 4$; $y(x = 0, t) = 5 \sin 2\pi \frac{t}{4} = 5.0 \sin 1.5708t$



La gráfica representa el desplazamiento, y , de la partícula en esa coordenada ($x = 0$) en función del tiempo.

4.1.6 Velocidad y aceleración de una partícula

1. Considere $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$

2. Velocidad: $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A \sin(\omega t - kx)] = A\omega \cos(\omega t - kx)$$

3. Aceleración: $a(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A \sin(\omega t - kx)] = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 y(x, t)$$

Es decir la aceleración de una partícula es igual a $-\omega^2$ por su desplazamiento, que es el resultado que obtuvimos en el MAS .

4. La primera derivada de $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ es la pendiente del hilo en cualquier punto. La segunda derivada parcial respecto a x es la curvatura del hilo:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A \sin(\omega t - kx)] = -Ak^2 \sin(\omega t - kx) = -k^2 y(x, t)$$

Si hacemos el cociente de:

$$\frac{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}}$$

se puede obtener la **ecuación de onda (4.6)**, la cual es una de las más importante en física.

$$\frac{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \quad (4.6)$$

Recuerde que $\omega = vk$

4.1.7 Velocidad de una onda mecánica

Si se conoce las características físicas del medio en que se propaga la onda mecánica, se puede calcular la rapidez o velocidad de la onda.

1. La rapidez o velocidad de una **onda transversal en un hilo** con tensión F y masa por unidad de longitud, μ , es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} [=] \sqrt{\frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m}^{-1}}} = \text{m s}^{-1}$$

2. La rapidez de una **onda longitudinal en un fluido** con módulo de volumen B y densidad ρ es:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} [=] \sqrt{\frac{\text{Pa}}{\text{kg m}^{-3}}} [=] \sqrt{\frac{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}}} [=] \text{ m s}^{-1}$$

Donde :

$$B = \frac{\text{cambio de presión}}{\text{Cambio fraccionario de volumen}} [=] \text{ Pa}$$

3. La rapidez de una **onda longitudinal en una varilla sólida** con módulo de Young Y y densidad, ρ :

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} [=] \sqrt{\frac{\text{Pa}}{\text{kg m}^{-3}}} [=] \sqrt{\frac{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}^{-2}}{\text{kg m}^{-3}}} [=] \text{ m s}^{-1}$$

4. La propagación del sonido en gases normalmente es un proceso adiabático. La rapidez del **sonido en un gas ideal** es:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $M = \text{masa molecular del gas} = \text{kg mol}^{-1}$ $T [=] \text{KT}$; y $R = 8.315 \text{ J/mol K}$

4.1.8 Energía en el movimiento ondulatorio

Todo movimiento ondulatorio tiene energía asociada a él. La potencia P , razón a la se hace trabajo, es (4.6):

$$P(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (4.7)$$

Si $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$, se tienen:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx)$$

y

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx)$$

y la ecuación (4.6) se convierte en:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= -F [-kA \cos(\omega t - kx)] [\omega A \cos(\omega t - kx)] \\ P(x, t) &= Fk\omega A^2 \cos^2(\omega t - kx) \end{aligned}$$

La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Tome en cuenta que $\omega = vk$, y $v = \sqrt{F/\mu}$, el valor máximo de la potencia instantánea $P(x, t)$ ocurre cuando $\cos^2 = 1$

$$P_{\max} = \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

Para obtener la potencia media, el valor medio de la función $\cos^2$ es igual a $\frac{1}{2}$ para un número entero de ciclos

$$P_{med} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$$

La razón de transferencia de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

4.2 Problemas

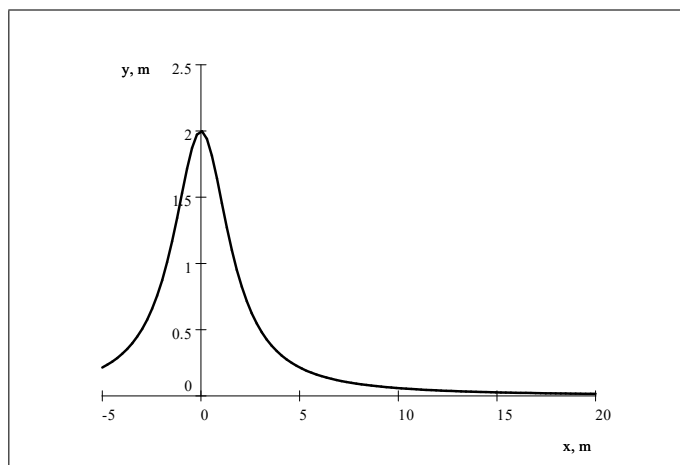
1. En el instante $t = 0$, un pulso de onda transversal en un cable viene descrito por la función:

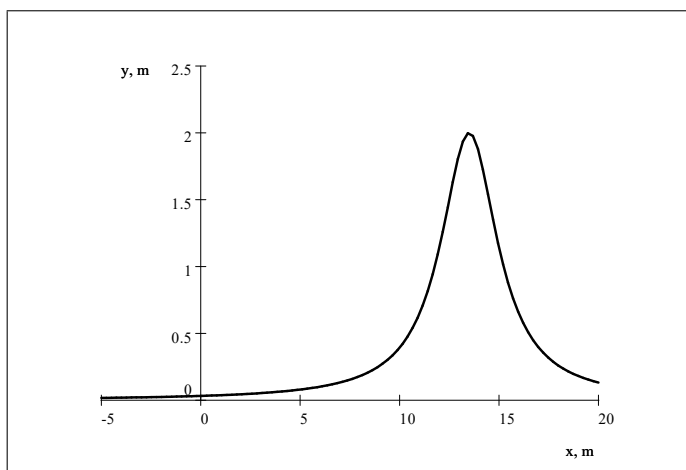
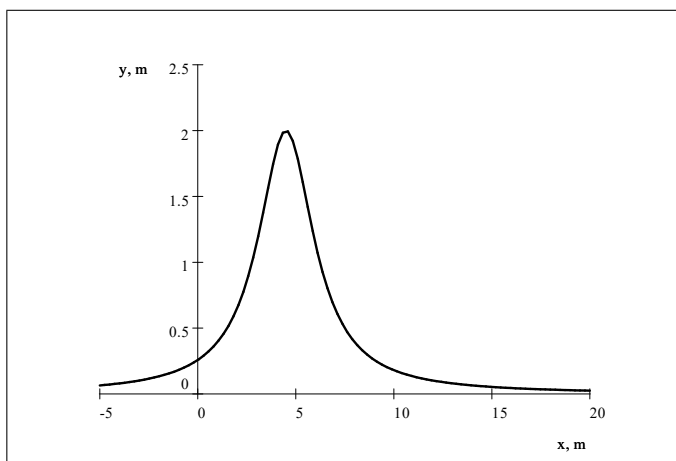
$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

donde x y y están expresadas en metros. Escribir la función $y(x, t)$ que describe esta onda, si se mueve en la dirección positiva del eje x a una rapidez de 4.50 m/s.

$$y(x, 0) = \frac{6}{x^2 + 3}$$

$$y(x - vt, 0) = y(x - vt, 0) = \frac{6}{(x - 4.50t)^2 + 3}$$





2. Una onda senoidal se mueve a lo largo de una cuerda. El oscilador que genera la onda realiza 40.0 vibraciones en 30.0 s. Además, un determinado máximo se mueve 425 cm por la cuerda en 10.0 s. ¿Cuál es la longitud de onda?

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f ; f = \frac{40.0}{30.0 \text{ s}} = 1.333 \text{ Hz},$$

$$v = \frac{0.425 \text{ m}}{10.0 \text{ s}} = 0.0425 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ así que:}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.0425 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.333 \frac{1}{\text{s}}} = 3.1875 \times 10^{-2} \text{ m}$$

3. La función de onda de una determinada onda que se mueve a lo largo de una cuerda estirada es (en unidades del Sistema Internacional).

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

- (a) ¿Cuál son la rapidez y dirección del movimiento de la onda?
- (b) ¿Cuál es el desplazamiento vertical de la cuerda en el instante $t = 0$ para la posición $x = 0.100 \text{ m}$?

(c) ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia de la onda?

(d) ¿Cuál es la magnitud máxima de la rapidez transversal de la cuerda?

a. La función: $y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$; se puede escribir como:

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin\left(-3\pi x + 10\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La onda se desplaza hacia la izquierda.

La ecuación de onda es igual: $y = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$

La velocidad es: $v = \frac{\omega}{k}$, donde $\omega = 10\pi$, $k = 3\pi$, así que: $v = \frac{10\pi}{3\pi} = \frac{10}{3} = 3.333 \text{ m/s}$

Para $t = 0$ y $x = 0.100 \text{ m}$, el desplazamiento vertical es:

$$y(x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin(-3\pi(0.100) + 10\pi(0) + \pi/4) = -5.4752 \times 10^{-2} \text{ m}$$

c. Donde $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$, luego: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3.333 \text{ m/s}}{5 \text{ s}^{-1}} = 0.666 \text{ m}$

d. $v_y = \omega A = 10\pi(0.350) = 10.996 \text{ m/s}$

4. Una onda transversal en una cuerda está descrita por la función de onda:

$$y = (0.120 \text{ m}) \sin\left(\frac{\pi x}{8} + 4\pi t\right)$$

(a) Determinar la aceleración y rapidez transversales en $t = 0.200 \text{ s}$ para un punto de la cuerda situado en la posición $x = 1.60 \text{ m}$.

(b) ¿Cuáles son la longitud de onda, el periodo y la rapidez de propagación de esta onda.

Solución

$$\text{a. } v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (0.120 \text{ m}) \sin\left(\frac{\pi x}{8} + 4\pi t\right)$$

$$v_y = 0.48\pi \text{ m} \cos\left(4\pi t + \frac{1}{8}\pi x\right)$$

$$v_y(1.60, 0.200) = 0.48\pi \text{ m} \cos\left(4\pi(0.200) + \frac{1}{8}\pi(1.60)\right) = -1.5080 \text{ m/s}$$

$$a_y = \frac{d}{dt} \left(0.48\pi \text{ m} \cos\left(4\pi t + \frac{1}{8}\pi x\right)\right)$$

$$a_y = -1.92\pi^2 \text{ m} \sin\left(4\pi t + \frac{1}{8}\pi x\right)$$

$$a_y(1.60, 0.200) = -1.92\pi^2 \text{ m} \sin\left(4\pi(0.200) + \frac{1}{8}\pi(1.60)\right)$$

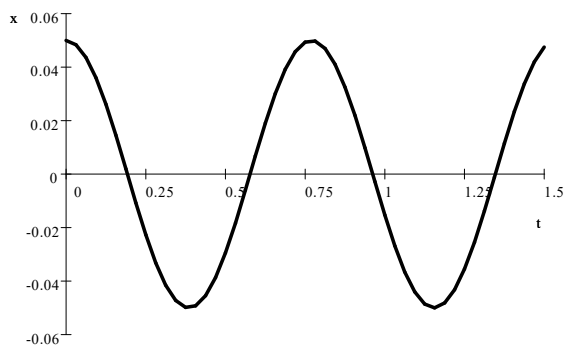
$$= -9.5671 \times 10^{-28} \text{ m/s}$$

5. Un cable telefónico tiene 4.00 m y una masa de 0.200 kg . Se genera un pulso de onda transversal moviendo uno de los extremos del cable, que ha sido tensado fijándolo por ambos extremos. El pulso recorre el cable de lado a lado cuatro veces en 0.800 s ¿Cuál es la tensión del cable?

$$\text{La velocidad } v = \frac{d_{total}}{t} = \frac{4(4.0 \text{ m} + 4.0 \text{ m})}{0.800 \text{ s}} = 40.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ así } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, T = v^2 \mu = (5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m}) \left(40.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 80.0 \text{ N}$$

6. Un resorte de masa despreciable, fijo por un extremo, se alarga 10 cm cuando se aplica una fuerza de 2.0 N. Posteriormente, a este mismo resorte se le conecta una masa de 300 g, el resorte puede oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. El MAS de este resorte se encuentra representado en la figura siguiente.



Determine:

- El periodo del movimiento (en s).
 - Las funciones periódicas de desplazamiento, velocidad y aceleración como función de tiempo, con sus respectivos valores numéricos de sus constantes.
 - Calcule la energía total del sistema (en J).
 - (Calcule la energía potencial y cinética (en J), del sistema en un tiempo de $t = 1.25$ s.
7. Una esfera de plástico flota en el agua con un 50% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con un 40% de su volumen sumergido. Determine las densidades (en kg/m^3) de la glicerina (ρ_G) y la esfera (ρ_E).
8. Un tubo de área de sección transversal que se reduce gradualmente puede utilizarse como un medidor de flujo de fluido. Si la diferencia en la presión es $p_1 - p_2 = 21.0 \text{ kPa}$, encuentre el flujo volumétrico del fluido en metros cúbicos por segundo, dado que el radio del tubo de salida es de 1.00 cm, el radio del tubo de entrada es de 2.00 cm y el fluido es gasolina ($\rho = 700 \text{ kg/m}^3$).

Determine:

- La expresión de la relación de velocidades (v_1 y v_2) con la ecuación de continuidad despejada para v_2 .
 - Obtenga una expresión simplificada de la ecuación de Bernoulli, resuelta para v_1 .
 - Obtenga el cálculo numérico de las velocidades en las partes anchas (v_1) y estrecha (v_2) del tubo, en m/s.
 - Efectue el cálculo numérico del flujo volumétrico Q , en m^3/s .
9. Una partícula se mueve en un **MAS** con una frecuencia de 3.00 *oscilaciones/s* y una amplitud de 5.00 cm. Utilice el SI.

Determine:

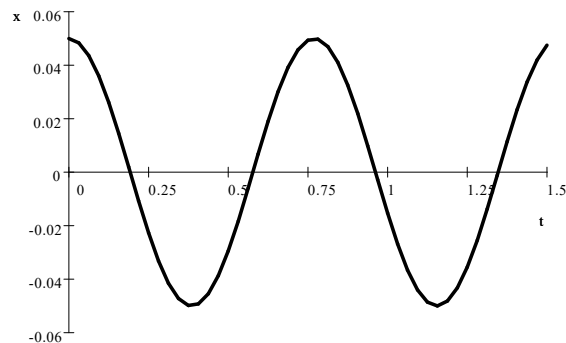
- (a) ¿Qué distancia total se desplaza la partícula durante un ciclo de su movimiento?
 - (b) ¿Cuál es su rapidez máxima? ¿Dónde ocurre está?
 - (c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. ¿En que parte de del movimiento ocurre la aceleración máxima?
 - (d) Determine la frecuencia angular y el periodo del movimiento.
10. La presión atmosférica normal es de 1.013×10^5 Pa. La aproximación de una tormenta hace que la altura del barómetro de mercurio ($\rho_{Hg} = 13.59 \text{ g/cm}^3$) disminuya 20.0 mm a partir de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica (en Pa) actual con este cambio?
11. Una esfera de plástico flota en el agua con un 45% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con un 35% de su volumen sumergido. Determine las densidades de la glicerina y la esfera.
12. Un bloque de metal de 10.0 kg que mide $12.0 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10.0 \text{ cm}$ se suspende de una balanza y se sumerge en agua, el lado de 12.0 cm está vertical, y la parte superior del bloque se encuentra 5.0 cm por debajo de la superficie del agua. **Responda los incisos siguientes:**
- (a) Determine la fuerza que actúa en la parte superior del bloque, $\mathbf{F}_S$, en unidades de N.
 - (b) Determine la fuerza que actúa en la parte inferior del bloque, $\mathbf{F}_I$, en unidades de N.
 - (c) Determine la lectura de la balanza cuando el bloque de metal se encuentra sumergido, es decir, determine el valor numérico de T , en N.
 - (d) Muestre mediante cálculo numérico que la fuerza de flotación $\mathbf{F}_B$ es igual a la diferencia entre las fuerzas en la parte superior e inferior del bloque. Es decir, $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_S$. Datos: $p_0 = 1.0130 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.
13. Un globo lleno de helio se amarra a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.050 kg de masa. El globo es esférico con un radio de 0.400 m. Cuando se suelta se levanta una longitud h de cuerda, y luego permanece en equilibrio, como se muestra en la Determine el valor de h . La envoltura del globo, es decir, el globo sin helio tiene una masa de 0.250 kg. **Responda los incisos siguientes:**
- (a) Esquematice en un diagrama de cuerpo libre las fuerzas que intervienen.
 - (b) La ecuación completa de equilibrio de las fuerzas involucradas ($\Sigma \mathbf{F} = 0$).
 - (c) Una expresión simplificada para el tramo de cuerda h que se levanta.
 - (d) El valor numérico para h , en unidades de metros. Datos: $\rho_{He} = 0.179 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{Aire} = 1.29 \text{ kg m}^{-3}$.
14. A través de una tubería de 15.0 cm de diámetro, la cual se encuentra sumergida en el río Colorado se bombea agua hasta un deposito abierto del pueblo Villa Gran Cañón, población localizada a orillas del cañón. El río está a 564 m de altura y el deposito de agua a una altura de 2096 m. ¿Cuál es la presión con que debe bombearse el agua para llevarla al deposito de esta población? Sugerencia: suponga el flujo es muy lento. Encuentre:

- (a) Una expresión simplificada de la ecuación de Bernoulli, para la presión en la entrada de la tubería.
- (b) El valor numérico de esta presión en unidades de Pa.

Capítulo 5

Problemas adicionales

1. Un resorte de masa despreciable, fijo por un extremo, se alarga 10 cm cuando se aplica una fuerza de 2.0 N. Posteriormente, a este mismo resorte se le conecta una masa de 300 g, el resorte puede oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. El MAS de este resorte se encuentra representado en la figura siguiente.



Determine:

- (a) El periodo del movimiento (en s).
 - (b) Las funciones periódicas de desplazamiento, velocidad y aceleración como función de tiempo, con sus respectivos valores numéricos de sus constantes.
 - (c) Calcule la energía total del sistema (en J).
 - (d) (Calcule la energía potencial y cinética (en J), del sistema en un tiempo de $t = 1.25$ s.
2. Una esfera de plástico flota en el agua con un 50% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con un 40% de su volumen sumergido. Determine las densidades (en kg/m^3) de la glicerina (ρ_G) y la esfera (ρ_E).

3. Un tubo de área de sección transversal que se reduce gradualmente puede utilizarse como un medidor de flujo de fluido. Si la diferencia en la presión es $p_1 - p_2 = 21.0$ kPa, encuentre el flujo volumétrico del fluido en metros cúbicos por segundo, dado que el radio del tubo de salida es de 1.00 cm, el radio del tubo de entrada es de 2.00 cm y el fluido es gasolina ($\rho = 700$ kg/m³).

Determine:

- (a) La expresión de la relación de velocidades (v_1 y v_2) con la ecuación de continuidad despejada para v_2 .
 - (b) Obtenga una expresión simplificada de la ecuación de Bernoulli, resuelta para v_1 .
 - (c) Obtenga el cálculo numérico de las velocidades en las partes anchas (v_1) y estrecha (v_2) del tubo, en m/s.
 - (d) Efectue el cálculo numérico del flujo volumétrico Q , en m³/s.
4. Una partícula se mueve en un **MAS** con una frecuencia de 3.00 oscilaciones/s y una amplitud de 5.00 cm. Utilice el SI.

Determine:

- (a) ¿Qué distancia total se desplaza la partícula durante un ciclo de su movimiento?
 - (b) ¿Cuál es su rapidez máxima? ¿Dónde ocurre está?
 - (c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. ¿En que parte de del movimiento ocurre la aceleración máxima?
 - (d) Determine la frecuencia angular y el periodo del movimiento.
5. La presión atmosférica normal es de 1.013×10^5 Pa. La aproximación de una tormenta hace que la altura del barómetro de mercurio ($\rho_{Hg} = 13.59$ g/cm³) disminuya 20.0 mm a partir de la altura normal. ¿Cuál es la presión atmosférica (en Pa) actual con este cambio?
6. Una esfera de plástico flota en el agua con un 45% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con un 35% de su volumen sumergido. Determine las densidades de la glicerina y la esfera.
7. Un bloque de metal de 10.0 kg que mide 12.0 cm $\times$ 10 cm $\times$ 10.0 cm se suspende de una balanza y se sumerge en agua, el lado de 12.0 cm está vertical, y la parte superior del bloque se encuentra 5.0 cm por debajo de la superficie del agua. Responda los incisos siguientes:

- (a) Determine la fuerza que actúa en la parte superior del bloque, F_S , en unidades de N.
- (b) Determine la fuerza que actúa en la parte inferior del bloque, F_I , en unidades de N.
- (c) Determine la lectura de la balanza cuando el bloque de metal se encuentra sumergido, es decir, determine el valor numérico de T , en N.
- (d) Muestre mediante cálculo numérico que la fuerza de flotación F_B es igual a la diferencia entre las fuerzas en la parte superior e inferior del bloque. Es decir, $F_B = F_I - F_S$. Datos: $p_0 = 1.0130 \times 10^5$ N m⁻².

8. Un globo lleno de helio se amarra a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.050 kg de masa. El globo es esférico con un radio de 0.400 m. Cuando se suelta se levanta una longitud h de cuerda, y luego permanece en equilibrio, como se muestra en la Figura 8. Determine el valor de h . La envoltura del globo, es decir, el globo sin helio tiene una masa de 0.250 kg. Responda los incisos siguientes:
- (a) Esquematice en un diagrama de cuerpo libre las fuerzas que intervienen.
 - (b) La ecuación completa de equilibrio de las fuerzas involucradas ($\Sigma F = 0$).
 - (c) Una expresión simplificada para el tramo de cuerda h que se levanta.
 - (d) El valor numérico para h , en unidades de metros. Datos: $\rho_{He} = 0.179 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_{Aire} = 1.29 \text{ kg m}^{-3}$.
9. A través de una tubería de 15.0 cm de diámetro, la cual se encuentra sumergida en el río Colorado se bombea agua hasta un depósito abierto del pueblo Villa Gran Cañon, población localizada a orillas del cañón. El río está a 564 m de altura y el depósito de agua a una altura de 2096 m. ¿Cuál es la presión con que debe bombearse el agua para llevarla al depósito de esta población? Sugerencia: suponga el flujo es muy lento. Encuentre:
- (a) Una expresión simplificada de la ecuación de Bernoulli, para la presión en la entrada de la tubería.
 - (b) El valor numérico de esta presión en unidades de Pa.

Física breve: mecánica de fluidos, movimiento armónico simple y ondas mecánicas

Se terminó de editar en noviembre de 2025

en los talleres de Astra Ediciones

Av. Acueducto No. 829

Colonia Santa Margarita, C. P. 45140

Zapopan, Jalisco, México.

33 38 34 82 36

E-mail: edicion@astraeditorial.com.mx

www.astraeditorialshop.com

ISBN: 978-607-8964-31-4



9 786078 964314



Consulta y descarga

