

Cálculo diferencial e integral con álgebra



Eduardo Paulino Hernández Aguilar

Cálculo diferencial e integral con álgebra



astra
editorial

Cálculo diferencial e integral con álgebra

Eduardo Paulino Hernández Aguilar



Cálculo diferencial e integral con álgebra. **Autor:** Eduardo Paulino Hernández Aguilar— *Chiapas, México.* 2025.

206 P. 23 cm.

Primera edición.

ISBN: 979-13-87837-33-4

DOI: <https://doi.org/10.61728/AE20254384>



D. R. © copyright 2025. Eduardo Paulino Hernández Aguilar.

La presente obra fue dictaminada bajo el sistema de doble ciego y cuenta con el aval de los dictámenes de pares académicos en el campo de las ciencias sociales en México.

Redactor: Ulysses Fernando Sántiz García

Edición y corrección: **Astra ediciones**

Todos los contenidos de esta publicación, se comparten bajo la licencia Creative Commons Atribución/Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0), Esto implica que no está autorizado el uso comercial de la obra original ni de las eventuales obras derivadas, las cuales deberán distribuirse bajo la misma licencia que rige la obra original. No obstante, se permite a terceros compartir el contenido siempre y cuando se reconozca debidamente la autoría y la publicación original en esta editorial.



HECHO EN MÉXICO | MADE IN MEXICO

Contenido

Presentación.....	9
 Capítulo 1	
Álgebra.....	11
Leyes de los exponentes.....	12
Productos notables	24
Factorización.....	37
Binomio de Newton y Triángulo de Pascal.....	60
Raíces de una ecuación	64
 Capítulo 2	
Cálculo diferencial	89
Reglas de derivación.....	90
Máximos y mínimos	110
Puntos de inflexión y sentido de concavidad	126
 Capítulo 3	
Cálculo integral	133
Integrales indefinidas	134
Integrales definidas – Área bajo la curva.....	168
Área entre funciones	182
Métodos de integración.....	190
 Bibliografía	 203

Presentación

El presente libro ha sido creado con la finalidad de proporcionar una guía comprensible y accesible para aquellos estudiantes que desean adentrarse en el mundo de las matemáticas, con el objetivo de facilitar la comprensión de los conceptos fundamentales en álgebra, cálculo diferencial y cálculo integral.

La propuesta de este trabajo es presentar los conceptos fundamentales acompañados de una serie de problemas que van desde problemas fáciles y cortos a aquellos que son más complejos, largos y requieren el uso de varias propiedades.

Autor

Eduardo Paulino Hernández Aguilar

Redactor

Ulysses Fernando Sántiz García

Capítulo 1

Álgebra

Leyes de los exponentes

La potenciación consiste en la multiplicación de un número por sí mismo varias veces, representándose como: x^n

Donde x es llamado “base” (número que se multiplicará por sí mismo) y n es el “exponente” (indica las veces que la base se multiplica por sí mismo).

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \mid \text{La base “5” se multiplica por sí mismo 2 veces}$$

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \mid \text{La base “9” se multiplica por sí mismo 3 veces}$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \mid \text{La base “2” se multiplica por sí mismo 5 veces}$$

$$x^7 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \mid \text{La base “x” se multiplica por sí mismo 7 veces}$$

$$10^n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \dots 10 \mid \text{La base “10” se multiplica por sí mismo n veces}$$

Las propiedades de la potenciación o leyes de los exponentes son los siguientes:

1) Potencia con exponente 0

Toda base elevada a 0 es igual a 1

$$a^0 = 1$$

$$1^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$y^0 = 1$$

$$e^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$b^0 = 1$$

$$n^0 = 1$$

$$0^0 = \textit{indeterminado}$$

2) Potencia con exponente 1

Toda base elevada a es igual a la base misma

$$a^1 = a$$

$$1^1 = 1$$

$$5^1 = 5$$

$$n^1 = n$$

$$e^1 = e$$

$$-8^1 = -8$$

$$10^1 = 10$$

$$-b^1 = -b$$

$$\pi^1 = \pi$$

a) Base negativa

$$-2^2 = (-2 \cdot -2) = 4$$

La base es solamente “ -2 ”; el signo “ $-$ ” no se ve afectado.

$$(-2^2) = (-2)(-2) = 4$$

La base es “ (-2) ”; el signo “ $-$ ” también se ve afectado; note el uso de paréntesis.

$$-5^3 = -(5 \cdot 5 \cdot 5) = -125$$

$$-3^0 = -(1) = -1$$

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$

$$(-3)^0 = 1$$

b) Fracción elevada a un exponente

Para calcular la potencia de una fracción, tanto el numerador como el denominador se elevan a dicho exponente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8} \qquad \left(\frac{5}{7}\right)^0 = \frac{5^0}{7^0} = \frac{1}{1} = 1$$

3) Exponente negativo

Un número elevado a una potencia negativa es igual a 1 dividido entre el número elevado a la misma potencia, pero positiva.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad (-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

$$x^{-5} = \frac{1}{x^5} \qquad -8^{-2} = -\left(\frac{1}{8^2}\right) = -\frac{1}{64}$$

a) Exponente negativo en el denominador

Si el denominador de una fracción se encuentra elevado a un exponente negativo, este puede pasar al numerador elevado al mismo exponente, pero positivo

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\frac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 25 \qquad \frac{1}{-3^{-3}} = -\frac{1}{3^{-3}} = -3^3 = -27$$

$$\frac{1}{x^{-7}} = x^7 \qquad \frac{1}{(-2)^{-4}} = (-2)^4 = 16$$

Multiplicar por el numerador si este es distinto de 1

$$\frac{b}{a^{-n}} = b \cdot a^n$$

$$\frac{3}{4^{-2}} = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48 \qquad \frac{5}{(-3)^{-3}} = 5 \cdot (-3)^3 = 5 \cdot -27 = -135$$

$$\frac{7}{-x^{-5}} = -\frac{7}{x^{-5}} = -7x^5 \qquad \frac{2}{5^{-3}} = 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 125 = 250$$

b) *Exponente negativo en el numerador*

Multiplicar por el denominador si este es distinto de 1

$$\frac{a^{-n}}{b} = \frac{1}{a^n \cdot b}$$

$$\frac{2^{-3}}{5} = \frac{1}{2^3 \cdot 5} = \frac{1}{8 \cdot 5} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{7^{-2}}{3} = \frac{1}{7^2 \cdot 3} = \frac{1}{49 \cdot 3} = \frac{1}{147}$$

$$\frac{x^{-4}}{8} = \frac{1}{x^4 \cdot 8} = \frac{1}{8x^4}$$

c) Fracción elevada a un exponente negativo

Una potencia fraccionaria de exponente negativo es igual a la inversa de la fracción (numerador y denominador intercambian posición) elevada al mismo exponente, pero positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-4} = \left(\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{y^4}{x^4}$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{-3} = \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^3}{2^3} = \frac{n^3}{8}$$

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{-3}\right)^2 = \frac{4^2}{(-3)^2} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$$

Al distribuir el exponente, si el signo del numerador o denominador es negativo, el signo negativo será parte de la base y, por tanto, será afectado por el exponente.

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-3}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{-3}\right)^3 = \frac{7^3}{(-3)^3} = \frac{343}{-27} = -\frac{343}{27}$$

O bien

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{-7}\right)^{-3} = \left(\frac{-7}{3}\right)^3 = \frac{-7^3}{(3)^3} = \frac{-343}{27} = -\frac{343}{27}$$

Recuerda

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

4) Potencia con exponente fraccionario

Una potencia de exponente fraccionario se puede transformar en una raíz cuyo:

- Índice es el denominador.
- Radicando es la base elevada al **numerador**.

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1}$$

$$e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$$

$$(-10)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(-10)^2} = \sqrt[7]{100}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$$

a) Raíz a potencia con exponente fraccionario

Una propiedad muy importante, para pasar de una raíz a una potencia:

- El índice de la raíz se vuelve el denominador; si no aparece, se sobreentiende que es 2.
- El exponente que acompaña al radicando se vuelve el numerador; si no aparece, se sobreentiende que es 1.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{w^4} = w^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt[12]{e^{11}} = e^{\frac{11}{12}}$$

$$\sqrt[9]{a^7} = x^{\frac{7}{9}}$$

b) Exponente fraccionario negativo

Es la combinación de la propiedad del exponente negativo y de la propiedad del exponente fraccionario

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

$$7^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{7^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^3}} \quad x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

c) Exponente fraccionario negativo (casos)

Exponente fraccionario negativo en el numerador. Denominador diferente de 1.

$$\frac{a^{-\frac{n}{m}}}{b} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}} \cdot b} = \frac{1}{b \cdot \sqrt[m]{a^n}}$$

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{w} = \frac{1}{w \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{w \cdot \sqrt{x}}$$

$$\frac{3^{-\frac{2}{3}}}{5} = \frac{1}{5 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

Exponente fraccionario negativo en el denominador.

$$\frac{1}{a^{-\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x^{-\frac{3}{5}}} = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$$

$$\frac{1}{4^{-\frac{2}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

Exponente fraccionario negativo en el denominador - Numerador diferente de 1.

$$\frac{b}{a^{-\frac{n}{m}}} = b \cdot a^{\frac{n}{m}} = b \cdot \sqrt[m]{a^n}$$

$$\frac{3}{9^{-\frac{2}{7}}} = 3 \cdot 9^{\frac{2}{7}} = 3 \cdot \sqrt[7]{9^2} = 3 \cdot \sqrt[7]{81}$$

$$\frac{n}{e^{-\frac{4}{5}}} = n \cdot e^{\frac{4}{5}} = n \cdot \sqrt[5]{e^4}$$

5) Multiplicación de potencias con la misma base

El producto de potencias con base idéntica es igual a una potencia de igual base, elevada a la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^2 \cdot a^4 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^6 \mid \text{La base "a" se repite 6 veces}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$x^{-10} \cdot x^{-2} = x^{-10+(-2)} = x^{-10-2} = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$$

$$w^{\frac{2}{3}} \cdot w^{\frac{1}{2}} = w^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = w^{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}} = w^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{w^7} = w \cdot \sqrt[6]{w}$$

$$5^{10} \cdot 5^{-\frac{3}{5}} = 5^{10+(-\frac{3}{5})} = 5^{\frac{50}{5}-\frac{3}{5}} = 5^{\frac{47}{5}} = \sqrt[5]{5^{47}} = 5^9 \sqrt[5]{5^2}$$

$$10^4 \cdot 10^9 \cdot 10^5 \cdot 10^7 = 10^{4+9+5+7} = 10^{25}$$

$$64 \cdot 4^5 = (4)^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$

a) Multiplicación de potencias con el mismo exponente

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n \quad 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 70^2$$

$$3^w \cdot 5^w = (3 \cdot 5)^w = 15^w \quad x^{10} \cdot 3^{10} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{10} = \left(x \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3x\pi}{4}\right)^{10}$$

6) División de potencias con la misma base

La división de potencias de igual base es igual a la misma base cuyo exponente es la resta de los exponentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^6}{a^4} = \frac{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a \cdot a \cdot a}} = a \cdot a = a^2$$

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

$$\frac{4x^7}{x^2} = 4x^{7-2} = 4x^5$$

$$\frac{p^5}{p^{10}} = p^{5-10} = p^{-5} = \frac{1}{p^5}$$

$$\frac{s^3}{s^{-6}} = s^{3-(-6)} = s^{3+6} = s^9$$

$$\frac{6r^2}{r^3} = 6r^{2-3} = 6r^{-1} = \frac{6}{r}$$

$$\frac{w^6}{5w^9} = \frac{w^{6-9}}{5} = \frac{w^{-3}}{5} = \frac{1}{5w^3}$$

$$\frac{9^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{5}{5}}} = 9^{\frac{1}{3}-\frac{5}{5}} = 9^{\frac{5}{15}-\frac{6}{15}} = 9^{-\frac{1}{15}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{15}}} = \frac{1}{\sqrt[15]{9}}$$

$$\frac{625}{5^2} = \frac{(5)^4}{5^2} = 5^2$$

a) División de potencias con la misma base (resta en el denominador)

Una manera de acortar el procedimiento cuando el exponente del denominador es más grande que el del numerador.

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$$

$$\frac{2x^3}{x^5} = 2x^{3-5} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

Forma convencional: al exponente del numerador se le resta el del denominador; note que tras la resta se aplica la propiedad del exponente negativo.

$$\frac{2x^3}{x^5} = \frac{2}{x^{5-3}} = \frac{2}{x^2}$$

En esta otra forma, al exponente del denominador se le resta el del numerador; note que en el numerador se queda el coeficiente que acompañaba a la base de la potencia.

$$\frac{w}{w^6} = \frac{1}{w^{6-5}} = \frac{1}{w^1}$$

$$\frac{t^4}{4t^{10}} = \frac{1}{4t^{10-4}} = \frac{1}{t^6}$$

$$\frac{3s^5}{s^7} = \frac{3}{s^{7-5}} = \frac{3}{s^2}$$

7) Potencia de una potencia

La potencia de una potencia es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(4^2)^5 = 4^{2 \cdot 5} = 4^{10}$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 8} = 5^{\frac{8}{2}} = 5^4$$

$$(3^7)^{-3} = 3^{7 \cdot -3} = 3^{-21} = \frac{1}{3^{21}}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{2^{10}}$$

$$\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{e}$$

a) Propiedad distributiva de una potencia

La potencia se distribuye a cada término dentro del paréntesis, posteriormente, se pueden aplicar otras propiedades (principalmente la propiedad de una potencia a otra potencia). Esta propiedad se usa cuando los términos dentro del paréntesis están elevados a otro exponente

$$(x^a \cdot y^b)^n = x^{an} \cdot y^{bn}$$

$$(5^3 \cdot 2^{11})^6 = (5^3)^6 \cdot (2^{11})^6 = 5^{18} \cdot 2^{66}$$

$$\left(3^3 \cdot 7^{-\frac{1}{5}}\right)^{-2} = (3^3)^{-2} \cdot \left(7^{-\frac{1}{5}}\right)^{-2} = 3^{-6} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3^6} \cdot \sqrt[5]{7^2} = \frac{\sqrt[5]{7^2}}{3^6}$$

$$(2^{-4} \cdot 8)^9 = (2^{-4})^9 \cdot (8)^9 = 2^{-36} \cdot 8^9 = \frac{1}{2^{36}} \cdot (2^3)^9 = \frac{2^{27}}{2^{36}} = 2^{27-36} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$$

Productos notables

Los productos son polinomios que se obtienen de la multiplicación entre dos o más polinomios que poseen características especiales o expresiones particulares, lo que hace que el resultado pueda ser escrito sin necesidad de efectuar la multiplicación.

Binomio al cuadrado – Cuadrado de una suma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Si algún término es acompañado de un coeficiente, tanto el coeficiente como la variable deben elevarse al cuadrado (propiedad distributiva de la potencia).

$$(x + 4w)^2 = x^2 + 2(x)(4w) + (4w)^2 = x^2 + 8xw + 16w^2$$

$$4^2w^2$$

Si ambos términos poseen coeficiente, en el segundo término estos se multiplicarán con el 2 y las variables quedarán tal cual.

$$(5x + 3y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3y) + (3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$$

Los coeficientes se multiplican con el 2

Además, si algún término posee una variable elevada a un exponente, deberá efectuarse la propiedad de una potencia elevada a otra potencia

$$(2t^3 + 8n)^2 = (2t^3)^2 + 2(2t^3)(8n) + (8n)^2 = 4t^6 + 32nt^3 + 64n^2$$

$$2^2(t^3)^2 \longrightarrow 4t^{3 \cdot 2}$$

$$(6y^2 + 5z^4)^2 = (6y^2)^2 + 2(6y^2)(5z^4) + (5z^4)^2 = 36y^4 + 60y^2z^4 + 25z^8$$

Binomio al cuadrado – Cuadrado de una diferencia

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{Segundo término} & & & & & \\ \text{Primer término} & \downarrow & & \text{Resta} & & \text{Suma} & \\ (a - b)^2 = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Primer término al cuadrado} & & \text{El doble del primer término por el segundo} & & \text{Segundo término al cuadrado} \\ & \text{Resta} & & & & \end{array}$$

Forma desarrollada

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(5 - x)^2 = 5^2 - 2(5)(x) + x^2 = 25 - 10x + x^2$$

$$(3x - z)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(z) + z^2 = 9x^2 - 6xz + z^2$$

$$(2r^4 - 3s^2)^2 = (2r^4)^2 - 2(2r^4)(3s^2) + (3s^2)^2 = 4r^8 - 12r^4s^2 + 9s^4$$

Diferencia de cuadrados

Dos binomios que comparten los mismos términos pero diferente signo

Términos al cuadrado

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) = & a^2 & - & b^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Suma} & & \text{Resta} & & \text{Resta} \end{array}$$

Forma desarrollada

$$(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(3r^2 + w)(3r^2 - w) = (3r^2)^2 - w^2 = 9r^4 - w^2$$

$$(10z^3 + 4a^6)(10z^3 - 4a^6) = (10z^3)^2 - (4a^6)^2 = 100z^6 - 16a^{12}$$

Propiedad distributiva

$$x(a + b) = xa + xb$$

La propiedad distributiva consiste en que la multiplicación de un número por una expresión es igual a la suma y/o resta de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los términos de la expresión.

$$x(3 + 2) = 3x + 2x = 5x$$

$$w(5 - y) = 5w - wy$$

¡Note cómo se van complicando los ejemplos cada vez más!

$$y(5x + 2) = 5xy + 2y$$

$$z(9t - 7z) = 9tz - 7z^2$$

$$2n(5a^2 + 9b^3) = 10a^2n + 18b^3n$$

$$t^2(2c - 10t) = 2ct^2 - 10t^3$$

$$-3(2a^n + b^m) = -6a^n - 3b^m$$

$$-r(-2s + 6t) = 2sr - 6tr$$

$$-4y^4(10f^3 - 3g^5 + 7h^2 - 3y^8) = -40f^3y^4 + 12g^5y^4 - 28h^2y^4 + 12y^{32}$$

Término común

Ambos términos positivos

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + (ab)$$

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + x(3 + 5) + (3)(5) = x^2 + 8x + 15$$

$$(y + 2)(y + 7) = y^2 + y(2 + 7) + (2)(7) = y^2 + 9y + 14$$

Ambos términos negativos

$$(x - a)(x - b) = x^2 - x(a + b) + (ab)$$

$$(x - 10)(x - 7) = x^2 - x(10 + 7) + (10)(7) = x^2 - 17x + 70$$

$$(z - 2)(z - 5) = z^2 - z(2 + 5) + (2)(5) = z^2 - 7z + 10$$

Un término positivo y otro negativo

Para este caso no existe una fórmula como tal; lo que podemos notar en este tipo de situaciones es que el segundo término llevará el signo del número más grande.

El tercer término siempre será negativo.

$$(x + 8)(x - 4) = x^2 + x(+8 - 4) - (8)(4) = x^2 + 4x - 32$$

$$(x + 6)(x - 9) = x^2 + x(6 - 9) - (6)(9) = x^2 + x(-3) - 54 = x^2 - 3x - 54$$

$$(x - 3)(x + 7) = x^2 + x(-3 + 7) - (3)(7) = x^2 + 4x - 21$$

$$(x - 12)(x + 4) = x^2 + x(-12 + 4) - (12)(4) = x^2 + x(-8) - 48 = x^2 - 8x - 48$$

Binomio al cubo – Cubo de una suma

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Diagrama de etiquetas:

- Primer término: a
- Segundo término: b
- Suma: $a + b$
- Cubo del primer término: a^3
- El triple del cuadrado del primer término por el segundo término: $3a^2b$
- El triple del primer término por el cuadrado del segundo término: $3ab^2$
- Cubo del segundo término: b^3

$$(x + 4)^3$$

1. El cubo del primer término: x^3
2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:

$$3(x)^2(y) = 3x^2y$$

3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:

$$3(x)(4)^2 = 3x(16) = 48x$$

4. El cubo del segundo término: $4^3 = 64$

5.- Juntar partes

El valor de la x decrece →

$$(x + 4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$(x + y)^3$$

1. El cubo del primer término: x^3

2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:

$$3(x)^2(y) = 3x^2y$$

3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:

$$3(x)(y)^2 = 3xy^2$$

4. El cubo del segundo término: y^3

5. Juntar partes

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

El valor de la x decrece →

$$(x + y)^3 = x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3$$

→ El valor de la y aumenta

$$(2w + 5z)^3$$

1. El cubo del primer término: $(2w)^3 = 2^3w^3 = 8w^3$ Note el uso de la propiedad distributiva de un exponente

2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:

$$3(2w)^2(5z) = 15z(4w^2) = 60w^2z$$

3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:

$$3(2w)(5z)^2 = 6w(25z^2) = 150wz^2$$

4. El cubo del segundo término: $(5z)^3 = 125z^3$

5. Juntar partes

$$(2w + 5z)^3 = 8w^3 + 60w^2z + 150wz^3 + 125z^3$$

$$(3t^2 + 7s^3)^3$$

1. El cubo del primer término: $(3t^2)^3 = 2^3(t^2)^3 = 8t^{2 \cdot 3} = 8t^6$ Note el uso de la propiedad distributiva de un exponente y de la potencia de una potencia

2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término: $3(3t^2)^2(7s^3) = 21s^3(9t^4) = 189t^4s^3$

3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término: $3(3t^2)(7s^3)^2 = 9t^2(49s^6) = 441t^2s^6$

4. El cubo del segundo término: $(7s^3)^3 = 343s^9$

5. Juntar partes

$$(3t^2 + 7s^3)^3 = 8t^6 + 189t^4s^3 + 441t^2s^6 + 343s^9$$

El valor de la t decrece en 2

$$(3t^{\color{red}{2}} + 7s^{\color{blue}{3}})^3 = 8t^6s^0 + 189t^4s^3 + 441t^2s^6 + 343t^0s^9$$

El valor de la s aumenta en 3

Binomio al cubo – Cubo de una diferencia

Diagram illustrating the expansion of $(a - b)^3$ using the binomial theorem. The terms are labeled as follows:

- Primer término: a
- Segundo término: $-b$
- Suma: $+$
- Cubo del primer término: a^3
- El triple del cuadrado del primer término por el segundo término: $-3a^2b$
- El triple del primer término por el cuadrado del segundo término: $+3ab^2$
- Cubo del segundo término: $-b^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(5 - w)^3$$

1. El cubo del primer término: $5^3 = 125$
2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:
 $3(5)^2(w) = 3w(25) = 75w$
3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:
 $3(5)(w)^2 = 15w^2$
4. El cubo del segundo término: w^3
5. Juntar partes y asignar signos

$$(5 - w)^3 = 125 - 75w + 15w^2 - w^3$$

El valor de la w aumenta

$$(4a - 3b)^3$$

1. El cubo del primer término: $(4a)^3 = 4^3a^3 = 64a^3$ Note el uso de la propiedad distributiva de un exponente
2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:
 $3(4a)^2(3b) = 9b(16a^2) = 144a^2b$
3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:
 $3(4a)(3b)^2 = 12a(9b^2) = 108ab^2$
4. El cubo del segundo término: $(3b)^3 = 27b^3$
5. Juntar partes y asignar signos

$$(4a - 3b)^3 = 64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3$$

El valor de la variable del primer término **decrece**

$$(4a - 3b)^3 = 64a^3b^0 - 144a^2b^1 + 108a^1b^2 - 27a^0b^3$$

El valor de la variable del segundo término **aumenta**

$$(2x^2y^3 - 5x^3y^2)^3$$

1. El cubo del primer término: $(2x^2y^3)^3 = 2^3(x^2)^3(y^3)^3 = 8x^6y^9$ Note el uso de la propiedad distributiva de un exponente y de la potencia de una potencia
2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:
 $3(2x^2y^3)^2(5x^3y^2) = 15x^3y^2(4x^4y^6) = 60x^{3+4}y^{2+6} = 60x^7y^8$
 Note el uso de la propiedad al multiplicar potencias de la misma base
3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:
 $3(2x^2y^3)(5x^3y^2)^2 = 6x^2y^3(25x^6y^4) = 150x^{2+6}y^{3+4} = 150x^8y^7$
- 4.-El cubo del segundo término: $(5x^3y^2)^3 = 125x^9y^6$
5. Juntar partes y asignar signos
 $(2x^2y^3 - 5x^3y^2)^3 = 8x^6y^9 - 60x^7y^8 + 150x^8y^7 - 125x^9y^6$
 Los exponentes crecen (x) y decrecen (y) de manera secuencial (de uno en uno)

$$(3n^4m^5 - 4t^2s^3)^3$$

1. El cubo del primer término: $(3n^4m^5)^3 = 3^3(n^4)^3(m^5)^3 = 27n^{12}m^{15}$
 Note el uso de la propiedad distributiva de un exponente y de la potencia de una potencia
2. El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:
 $3(3n^4m^5)^2(4t^2s^3) = 12t^2s^3(9n^8m^{10}) = 108n^8m^{10}t^2s^3$
3. El triple del cuadrado del segundo término por el primer término:

$$3(3n^4m^5)(4t^2s^3)^2 = 9n^4m^5(16t^4s^6) = 144n^4m^5t^4s^6$$

4. El cubo del segundo término: $(4t^2s^3)^3 = 64t^6s^9$

5. Juntar partes y asignar signos

$$(3n^4m^5 - 4t^2s^3)^3 = 27n^{12}m^{15} - 108n^8m^{10}t^2s^3 + 144n^4m^5t^4s^6 - 64t^6s^9$$

Los exponentes crecen y decrecen de manera secuencial

Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Este producto notable se caracteriza por combinar los términos de 2 en 2

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Combinaciones:

xy, xz, yz

$$(2w + 3k + 7u)^2$$

1. Elevar cada término al cuadrado:

$$(2w)^2 = 4w^2$$

$$(3k)^2 = 9k^2$$

$$(7u)^2 = 49u^2$$

2. Combinar los términos:

$$(2w)(3k)$$

$$(2w)(7u)$$

$$(3k)(7u)$$

3. Multiplicar cada pareja de términos:

$$(2w)(3k) = 6kw$$

$$(2w)(7u) = 14uw$$

$$(3k)(7u) = 21ku$$

4. Multiplicar cada resultado obtenido por dos:

$$2(6kw) = 12kw$$

$$2(14uw) = 28uw$$

$$2(21ku) = 42ku$$

5. Juntar partes

$$(2w + 3k + 7u)^2 = 4w^2 + 9k^2 + 49u^2 + 12kw + 28uw + 42ku$$

$$(5x^2 + 10y^3 + 8z^4)^2$$

1. Elevar cada término al cuadrado:

$$(5x^2)^2 = 25x^4$$

$$(10y^3)^2 = 100y^6$$

$$(8z^4)^2 = 64z^8$$

2. Combinar los términos:

$$(5x^2)(10y^3)$$

$$(5x^2)(8z^4)$$

$$(10y^3)(8z^4)$$

3. Multiplicar cada pareja de términos:

$$(5x^2)(10y^3) = 50x^2y^3$$

$$(5x^2)(8z^4) = 40x^2z^4$$

$$(10y^3)(8z^4) = 80y^3z^4$$

4. Multiplicar cada resultado obtenido por dos:

$$2(50x^2y^3) = 100x^2y^3$$

$$2(40x^2z^4) = 80x^2z^4$$

$$2(80y^3z^4) = 160y^3z^4$$

5. Juntar partes

$$(5x^2 + 10y^3 + 8z^4)^2 = 25x^4 + 100y^6 + 64z^8 + 100x^2y^3 + 80x^2z^4 + 160y^3z^4$$

Trinomio al cubo

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

Diagrama de anotaciones para el desarrollo del trinomio al cubo:

- Primer término:** a
- Segundo término:** b
- Tercer término:** c
- Cubo de cada término:** $a^3 + b^3 + c^3$
- El triple del cuadrado del primer término por el tercer término:** $3a^2c$
- El triple del cuadrado del segundo término por el tercer término:** $3b^2c$
- El triple del producto del segundo término por el cuadrado del tercer término:** $3bc^2$
- El triple del cuadrado del primer término por el segundo término:** $3a^2b$
- El triple del primer término por el cuadrado del segundo:** $3ab^2$
- El triple del primer término por el cuadrado del tercer término:** $3ac^2$
- Seis veces el producto de los 3 términos:** $6abc$

Este producto notable es más complejo que el anterior, puesto que tenemos que combinar los términos al cuadrado con los originales.

$$(2a + 4b + 6c)^3$$

1. Elevar cada término al cubo:

$$(2a)^3 = 8a^3$$

$$(4b)^3 = 64b^3$$

$$(6c)^3 = 216c^3$$

2. Elevar cada término al cuadrado:

$$(2a)^2 = 4a^2$$

$$(4b)^2 = 16b^2$$

$$(6c)^2 = 36c^2$$

3. Combinar los términos al cuadrado con los términos originales, un término al cuadrado y otro sin elevar, sin repetir variables:

$$(4a^2)(4b)$$

$$(16b^2)(2a)$$

$$(36c^2)(2a)$$

$$(4a^2)(6c)$$

$$(16b^2)(6c)$$

$$(36c^2)(4b)$$

4. Multiplicar cada pareja:

$$(4a^2)(4b) = 16a^2b$$

$$(16b^2)(2a) = 32ab^2$$

$$(36c^2)(2a) = 72ac^2$$

$$(4a^2)(6c) = 24a^2c$$

$$(16b^2)(6c) = 96b^2c$$

$$(36c^2)(4b) = 144bc^2$$

5. Multiplicar cada resultado obtenido por dos:

$$2(16a^2b) = 32a^2b$$

$$2(32ab^2) = 64ab^2$$

$$2(72ac^2) = 144ac^2$$

$$2(24a^2c) = 48a^2c$$

$$2(96b^2c) = 192b^2c$$

$$2(144bc^2) = 288bc^2$$

6. Multiplicar los tres términos originales

$$(2a)(4b)(6c) = 48abc$$

7. Multiplicar el resultado obtenido por 6

$$6(48abc) = 288abc$$

8. Juntar todas las partes

$$(2a + 4b + 6c)^3 = 8a^3 + 64b^3 + 216c^3 + 32a^2b + 48ac^2 + 64ab^2 + 192b^2c + 144ac^2 + 288bc^2 + 288abc$$

Binomio de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Factorización

La factorización consiste en la descomposición de una expresión matemática (un número o una suma) en forma de un producto de dos o más expresiones.

$$10 = 2 \cdot 5$$

Factores

$$300 = 75 \cdot 4 = 75 \cdot 2 \cdot 2 = 25 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Factores compuestos

Factores primos

Factores

Factorización por término común – Factor común

Consiste en hallar una expresión que se repita en cada término; podemos considerarlo como el procedimiento inverso a la propiedad distributiva, ya que lo que no se repite queda entre paréntesis y fuera de este la expresión en común.

$$ax + ay = a(x + y)$$

$$4nx - 6ny = n(4x - 6y)$$

$$3az + 3cz = 3z(a + c)$$

Los coeficientes también pueden descomponerse en sus factores; el coeficiente de menor valor es el que suele usarse para descomponer a los otros factores, o bien, si son múltiplos de un número.

$$4t + 12s = 4t + 4 \cdot 3s = 4(t + 3s)$$

$$6a - 72b = 6a - 6 \cdot 12b = 6(a - 12b)$$

$$49x + 21y = 7 \cdot 7x + 7 \cdot 3y = 7(7x + 3y)$$

Los coeficientes son múltiplos de 7

En caso de que cada término tenga una **variable en común** pero elevado a diferentes exponentes, se elige el **exponente de menor grado**, y este se restará a cada exponente. La expresión elegida dejará al coeficiente que acompaña la base, a menos que también sea un elemento en común se deja un 1.

$$a^2 + 10a^7 = a^2(1 + 10a^{7-2}) = a^2(1 + 10a^5)$$

$$5x^2 + 7x^5 - 2x^9 = x^2(5 + 7x^{5-2} - 2x^{9-2}) = x^2(5 + 7x^3 - 2x^7)$$

$$3w^6 + 12w^3 - 24w^5 = 3w^6 + 3 \cdot 4w^3 - 3 \cdot 8w^5 = 3w^3(w^{6-3} + 4 - 8w^{5-3}) = 3w^3(w^3 + 4 - 8w^2)$$

Dos variables en común

$$3n^2m^8 - 6n^7m^3 - 21n^4m^6 = 3n^2m^3(m^{8-3} - 2n^{7-2} - 7n^{4-2}m^{6-3}) = 3n^2m^3(m^5 - 2n^5 - 7n^2m^3)$$

Se eligen los exponentes de menor grado de cada variable, las variables con exponentes de mayor grado y los coeficientes que no se repitan quedan entre paréntesis. A las variables que queden dentro del paréntesis, se les resta el valor del exponente de menor grado de la variable correspondiente

$$3n^2m^3(m^{8-3} - 2n^{7-2} - 7n^{4-2}m^{6-3}) = 3n^2m^3(m^5 - 2n^5 - 7n^2m^3)$$

Factorización por agrupación de términos

El proceso consiste en formar grupos o agrupar términos en cantidades iguales (de dos en dos, o de tres en tres, etc.), para luego factorizar cada grupo por factor común y finalmente volver a factorizar por factor común, en donde el paréntesis que debe quedar repetido en cada grupo es el factor común.

4 términos, factorizamos de 2 en 2

$$\underline{a^2 + ab} + \underline{ax + bx} = \underline{a(a + b)} + \underline{x(a + b)} = (a + b)(a + x)$$

Primer grupo

Segundo grupo

Obtenemos un nuevo factor común

Los términos no comunes
quedan en otro paréntesis

Note el paso de una suma
a una multiplicación

Note cómo la siguiente expresión llega al mismo resultado de dos maneras

$$wb + wm + bn + mn = w(b + m) + n(b + m) = (b + m)(w + n)$$

Reordenando términos

$$wb + wm + bn + mn = w\color{red}{b} + \color{red}{b}n + w\color{green}{m} + \color{green}{m}n = \color{red}{b}(w + n) + \color{green}{m}(w + n) = (w + n)(b + m)$$

En este otro ejemplo, los términos pueden agruparse de acuerdo a si los coeficientes son múltiplos del mismo número.

$$6am - 4ac - 3bm + 2bc$$

También podemos factorizar directamente de esta manera

Reordenando términos

$$6am - 3bm - 4ac + 2bc = \color{red}{3} \cdot 2\color{red}{a}m - \color{red}{3}bm - \color{green}{2} \cdot 2\color{green}{a}c + \color{green}{2}bc$$

Al factorizar nos podemos encontrar con el siguiente problema

¿Qué signos colocar?

$$\color{red}{3} \cdot 2\color{red}{a}m - \color{red}{3}bm - \color{green}{2} \cdot 2\color{green}{a}c + \color{green}{2}bc = \quad 3m(2a \quad b) \quad 2c(2a \quad b)$$

¿Qué signos colocar?

$$+\color{red}{3} \cdot 2\color{red}{a}m - \color{red}{3}bm - \color{green}{2} \cdot 2\color{green}{a}c + \color{green}{2}bc = +3m(2a - b) - 2c(2a + b)$$

Si colocamos los signos tal cual, no obtenemos ningún término en común (debido a los signos)

$$+\color{red}{3} \cdot 2\color{red}{a}m - \color{red}{3}bm - \color{green}{2} \cdot 2\color{green}{a}c + \color{green}{2}bc = +3m(2a - b) - 2c(2a - b)$$

Obtenemos un nuevo término en común

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \color{red}{+} \cdot \color{red}{-} = \color{red}{-} \quad \quad \color{green}{-} \cdot \color{green}{-} = \color{green}{+} \end{array}$$

El factor común lleva el signo del primer término, la operación entre los términos no comunes llevan el signo que al multiplicar por el signo del primer término nos da el signo del segundo término

$$3m(2a - b) - 2c(2a - b) = (2a - b)(3m - 2c)$$

$$\begin{array}{c} \color{green}{2} \cdot \color{green}{3} \quad \quad \color{red}{x}^{3-2} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -\color{red}{x}^3 + \color{red}{3x}^2 + \color{green}{2x} - \color{green}{6} = -\color{red}{x}^2(\color{red}{x} - \color{red}{3}) + \color{green}{2}(\color{green}{x} - \color{green}{3}) = (\color{red}{x} - \color{red}{3})(\color{green}{2} - \color{green}{x}^2) \end{array}$$

$$\color{red}{-} \cdot \color{red}{-} = \color{red}{+}$$

$$\color{green}{+} \cdot \color{green}{-} = \color{green}{-}$$

En este ejemplo, agruparemos los términos de 3 en 3

$$18x - 12 - 3xy + 2y + 15xz - 10z$$

Primero ordenaremos los términos de la manera más conveniente en este caso el primer, tercer y quinto término ya que contienen y y sus coeficientes son múltiplos de 3. Los demás términos irán juntos, sus coeficientes son múltiplos de 2.

$$18x - 3xy + 15xz - 12 + 2y - 10z = 3x(6 - y + 5z) - 2(6 - y + 5z) = (6 - y + 5z)(3x - 2)$$

Los signos siguen el mismo patrón que el ejemplo anterior, el término común lleva el signo del primer término, los otros dos signos son aquellos que al multiplicar el signo del término en común nos den el signo del segundo y tercer signo respectivamente.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline + \cdot + = + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline - \cdot + = - \\ \hline \end{array} \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 3 \cdot 6x - 3xy + 3 \cdot 5xz - 2 \cdot 6 + 2y - 2 \cdot 5z = 3x(6 - y + 5z) - 2(6 - y + 5z) = (6 - y + 5z)(3x - 2) \\
 \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\
 \begin{array}{|c|} \hline + \cdot - = - \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline - \cdot - = + \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Factorización por diferencia de cuadrados

Este tipo de factorización es sencillo ya que se trata de una resta de solamente dos términos que poseen raíz cuadrado exacta.

$$x^2 - 4$$

1. Obtener la raíz cuadrada de cada término:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{4} = 2$$

2. Formar un binomio con ambas raíces y multiplicarlo por su conjugado (binomio con los mismos términos pero signo contrario):

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$9x^4 - 64$$

1. Obtener la raíz cuadrada de cada término:

$$\sqrt{9x^4} = \sqrt{9}\sqrt{x^4} = 3x^{\frac{4}{2}} = 3x^2$$

Note el uso de la propiedad distributiva de la radicación y de raíz a exponente, el exponente fraccionario se simplifica en un número entero

$$\sqrt{64} = 8$$

2. Formar un binomio con ambas raíces y multiplicarlo por su conjugado

$$9x^4 - 64 = (3x^2 + 8)(3x^2 - 8)$$

$$81y^8 - 100z^6$$

1. Obtener la raíz cuadrada de cada término:

$$\sqrt{81y^8} = \sqrt{81}\sqrt{y^8} = 9y^{\frac{8}{2}} = 3y^4$$

$$\sqrt{100z^6} = \sqrt{100}\sqrt{z^6} = 10z^{\frac{6}{2}} = 10z^3$$

2. Formar un binomio con ambas raíces y multiplicarlo por su conjugado:

$$81y^8 - 100z^6 = (3y^4 - 10z^3)(3y^4 + 10z^3)$$

$$36k^{10}n^4 - 25t^8s^{12}$$

1. Obtener la raíz cuadrada de cada término:

$$\sqrt{36k^{10}n^4} = \sqrt{36}\sqrt{k^{10}}\sqrt{n^4} = 6k^{\frac{10}{2}}n^{\frac{4}{2}} = 6k^5n^2$$

$$\sqrt{25t^8s^{12}} = \sqrt{25}\sqrt{t^8}\sqrt{s^{12}} = 5t^{\frac{8}{2}}s^{\frac{12}{2}} = 5t^4s^6$$

2. Formar un binomio con ambas raíces y multiplicarlo por su conjugado:

$$36k^{10}n^4 - 25t^8s^{12} = (6k^5n^2 + 5t^4s^6)(6k^5n^2 - 5t^4s^6)$$

Factorización por suma o resta de cubos

Tener en cuenta que:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Segundo término} & & & \text{Cuadrado de la raíz del} & \text{Cuadrado de la raíz del} \\
 & \downarrow & & & \text{primer término} & \text{segundo término} \\
 \text{Primer término} & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 a^3 & + & b^3 & = & (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \text{Suma} & & & \text{Suma de las raíces} & & \text{Producto de} \\
 & & & & \text{cúbicas} & & \text{ambas raíces} \\
 & & & & \sqrt[3]{a^3} = a & & \\
 & & & & \sqrt[3]{b^3} = b & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Segundo término} & & & \text{Cuadrado de la raíz del} & \text{Cuadrado de la raíz del} \\
 & \downarrow & & & \text{primer término} & \text{segundo término} \\
 \text{Primer término} & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 a^3 & - & b^3 & = & (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \text{Resta} & & & \text{Resta de las raíces} & & \text{Producto de} \\
 & & & & \text{cúbicas} & & \text{ambas raíces} \\
 & & & & \sqrt[3]{a^3} = a & & \\
 & & & & \sqrt[3]{b^3} = b & &
 \end{array}$$

$$x^3 + 27$$

1. Obtener la raíz cúbica de cada término

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

2. Formar un binomio con ambas raíces, observar el signo del problema
 $(x + 3)$

3. Multiplicar ambas raíces

$$(x)(3) = 3x$$

4. Elevar cada raíz al cuadrado

$$x^2$$

$$3^2 = 9$$

5. Juntar partes, acomodar términos y asignar signos conforme a la fórmula

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$64f^9 - 8g^{12}$$

1. Obtener la raíz cúbica de cada término

$$\sqrt[3]{64f^9} = \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{f^9} = 4f^{\frac{9}{3}} = 4f^3$$

Note el uso de la propiedad distributiva de la radicación y de raíz a exponente, el exponente fraccionario se simplifica en un número entero

$$\sqrt[3]{8g^{12}} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{g^{12}} = 2g^{\frac{12}{3}} = 2g^4$$

2. Formar un binomio con ambas raíces, observar el signo del problema

$$(4f^3 - 2g^4)$$

3. Multiplicar ambas raíces

$$(4f^3)(2g^4) = 8f^3g^4$$

4. Elevar cada raíz al cuadrado

$$(4f^3)^2 = 4^2(f^3)^2 = 16f^{3 \cdot 2} = 16f^6$$

Note el uso de la propiedad distributiva de la potencia y de la potencia de una potencia

$$(2g^4)^2 = 2^2(g^4)^2 = 4g^{4 \cdot 2} = 4g^8$$

5. Juntar partes, acomodar términos y asignar signos conforme a la fórmula

$$64f^9 - 8g^{12} = (4f^3 - 2g^4)(16f^6 + 8f^3g^4 + 4g^8)$$

Trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Este tipo de factorización busca, a partir de tres términos, obtener un binomio al cuadrado; el binomio resulta ser la suma o resta de las raíces cuadradas del primer y tercer término (o de los términos que puedan tenerlo). El segundo término (o el restante) se usa para comprobar si el procedimiento es correcto.

$$a^2 + 2ab + b^2$$

1. Obtener las raíces cuadradas del primer y tercer término

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{b^2} = b$$

2. Obtener el doble del producto de ambas raíces

$$2(a)(b) = 2ab$$

3. Si con el paso anterior, el resultado es igual al segundo término (sin importar el signo), formar un binomio al cuadrado con ambas raíces. Colocar el signo del segundo término

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$y^2 - 10y + 25$$

1. Obtener las raíces cuadradas del primer y tercer término

$$\sqrt{y^2} = y$$

$$\sqrt{25} = 5$$

2. Obtener el doble del producto de ambas raíces

$$2(y)(5) = 10y$$

3. Si con el paso anterior el resultado resulta ser igual al segundo término, formar un binomio al cuadrado con ambas raíces.

$$y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2$$

$$42x^3 + 9x^2 + 49x^4$$

1. Observar los términos que probablemente poseen raíz cuadrada perfecta, obtener la raíz cuadrada

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2} &= \sqrt{9}\sqrt{x^2} = 3x \\ \sqrt{49x^4} &= \sqrt{49}\sqrt{x^4} = 7x^{\frac{4}{2}} = 7x^2\end{aligned}$$

Note el uso de la propiedad distributiva de la radicación y de raíz a exponente, el exponente fraccionario se simplifica en un número entero

2. Obtener el doble del producto de ambas raíces

$$2(3x)(7x^3) = 42x^4$$

3. Si con el paso anterior, el resultado resulta ser igual al término restante, formar un binomio al cuadrado con ambas raíces. Colocar el signo del término restante

$$+42x^3 + 9x^2 + 49x^4 = (3x + 7x^2)$$

$$9a^2y - 30ax\sqrt{y} + 25x^2$$

1. Obtener las raíces cuadradas del primer y tercer término

$$\begin{aligned}\sqrt{9a^2y} &= \sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{y} = 3a\sqrt{y} \\ \sqrt{25x^2} &= \sqrt{25}\sqrt{x^2} = 5x\end{aligned}$$

2. Obtener el doble del producto de ambas raíces

$$2(3a\sqrt{y})(5x) = 30ax\sqrt{y}$$

3. Si con el paso anterior, el resultado resulta ser igual al segundo término, formar un binomio al cuadrado con ambas raíces.

$$9a^2y - 30ax\sqrt{y} + 25x^2 = (3a\sqrt{y} - 5x)^2$$

Factorización especial I – TCP y diferencia de cuadrados

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$$

TCP

1. Obtener las raíces de los términos que posean raíz cuadrada perfecta del TCP

$$\sqrt{x} = x$$

$$\sqrt{4y^2} = \sqrt{4}\sqrt{y^2} = 2y$$

2. Obtener el doble del producto de ambas raíces

$$2(x)(2y) = 4xy$$

3. Comprobar con el término restante y forma binomio con las raíces obtenidas, asignar el signo del término restante

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 1 = (x - 2y)^2 - 1$$



Tenga en cuenta que $1 = 1^2$

$$(x - 2y)^2 - 1^2$$

Diferencia de cuadrados

4. Obtener la raíz cuadrada de cada término:

$$\sqrt{(x - 2y)^2} = (x - 2y)$$

$$\sqrt{1^2} = 1$$

5. Formar un binomio con ambas raíces y multiplicarlo por su conjugado

$$(x - 2y)^2 - 1^2 = (x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$$

Por lo tanto

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 1 = (x - 2y + 1)(x - 2y - 1)$$

Factorización especial II – Completar TCP y diferencia de cuadrados

$$144 + 23n^6 + 9n^{12}$$

Si quisiéramos resolver por TCP, obtendríamos que:

$$\sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{9n^{12}} = 3n^6$$



$$2(12)(3n^6) = 72n^6$$



$$72n^6 \neq 23n^6$$

Para completar TCP, podemos sumar a la expresión la cantidad que hace falta, pero para no alterar la expresión la cantidad que agreguemos debemos restarla.

$$72n^6 - 23n^6 = 49n^6$$

Cantidad a agregar

$$144 + 72n^6 + 9n^{12} - 49n^6$$

TCP



$$(12 + 3n^6)^2 - 49n^6$$

Diferencia de cuadrados

Resolver ahora por diferencia de cuadrados

$$\sqrt{(12 + 3n^6)^2} = 12 + 3n^6$$

$$\sqrt{49n^6} = 7n^3$$

Resultado

$$(12 + 3n^6)^2 - 49n^6 = (12 + 3n^6 + 7n^3)(12 + 3n^6 - 7n^3)$$

Por lo tanto

$$144 + 23n^6 + 9n^{12} = (12 + 3n^6 + 7n^3)(12 + 3n^6 - 7n^3)$$

Factorización especial III – Término común, TCP y diferencia de cuadrados

$$4a^4 - 8a^2 + 4$$

Término común

$$4a^4 - 4 \cdot 2a^2 + 4 = 4(a^4 - 2a^2 + 1)$$

TCP

$$4(a^4 - 2a^2 + 1) \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{a^4} = a^2 \\ \sqrt{1} = 1 \end{matrix} \Rightarrow 2(a^2)(1) = 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = 2a^2$$

Tenga en cuenta que $1 = 1^n$

$$4(a^4 - 2a^2 + 1) = 4[(a^2 - 1)^2] \Rightarrow 4(a^4 - 2a^2 + 1) = 4[(a^2 - 1^2)^2]$$

Diferencia de cuadrados

$$4[(a^2 - 1^2)^2] \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{a^2} = a \\ \sqrt{1^2} = 1 \end{matrix} \Rightarrow 4[(a^2 - 1^2)] = 4[(a + 1)(a - 1)]^2$$

Propiedad distributiva de la potencia

$$4[(a+1)(a-1)]^2 = 4(a+1)^2(a-1)^2 = 4(a+1)(a+1)(a-1)(a-1)$$

Por lo tanto

$$4a^4 - 8a^2 + 4 = 4(a+1)(a+1)(a-1)(a-1)$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El famoso caso donde dos números sumados dan el término lineal (o segundo término) y multiplicados el término independiente (o tercer término).

$$x^2 + 10x + 16$$

1. Obtener la raíz cuadrada del término cuadrático, el resultado se coloca en ambos factores

$$\sqrt{x^2} = x$$

2. Buscar dos términos que, sumados, den el término lineal y, multiplicados, el término independiente

$$6 + 4 = 10 \Rightarrow 6 \cdot 4 = 24 \times$$

$$5 + 5 = 10 \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25 \times$$

$$2 + 8 = 10 \Rightarrow 2 \cdot 8 = 16 \checkmark$$

3. Formar los factores

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$$

$$x^2 + 2x - 24$$

1. Obtener la raíz cuadrada del término cuadrático; el resultado se coloca en ambos factores

$$x^2 + 2x - 24$$

2. Buscar dos términos que, sumados, den el término lineal y, multiplicados, el término independiente

$$-1 \cdot 24 = -24 \Rightarrow -1 + 24 = 23 \times$$

$$-2 \cdot 12 = -24 \Rightarrow -2 + 12 = 10 \times$$

$$-3 \cdot 8 = -24 \Rightarrow -3 + 8 = 5 \times$$

$$-6 \cdot 4 = -24 \Rightarrow -6 + 4 = -2 \times$$

$$1 \cdot -24 = -24 \Rightarrow 1 - 24 = -23 \times$$

$$2 \cdot -12 = -24 \Rightarrow 2 - 12 = -10 \times$$

$$3 \cdot -8 = -24 \Rightarrow 3 - 8 = -5 \times$$

$$6 \cdot -4 = -24 \Rightarrow 6 - 4 = 2 \checkmark$$

Generalmente, nos fijamos en hallar primero el término independiente para luego comprobar la suma de estos; si la suma resulta ser el valor del término lineal, pero con signo contrario, cambiamos el signo de ambos sumandos. Con la práctica esto se vuelve más fácil

3. Formar los factores

$$x^2 + 2x - 24 = (x + 6)(x - 4)$$

Para este tipo de factorización debe dominarse la ley de los signos para la suma.

$$x^2 - 4x - 21$$

1. Obtener la raíz cuadrada del término cuadrático, el resultado se coloca en ambos factores

$$\sqrt{x^2} = x \quad \Rightarrow \quad (x)(x)$$

2. El primer factor lleva el signo del término lineal

$$(x - \text{red})(x + \text{red})$$

3. El segundo factor, lleva el signo que resulta de multiplicar el signo del término lineal con el término independiente

$$- \cdot - = + \quad \Rightarrow \quad (x -) (x +)$$

4. Buscar dos términos que, sumados, den el término lineal, y, multiplicados, el término independiente

$3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow -3 + 7 = 4$
 $3 - 7 = -4 \checkmark$
 Comprobación

5. Formar los factores, el término más grande va en el primer factor

$$x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$$

$$x^2 - 12x + 32$$

1. Obtener la raíz cuadrada del término cuadrático, el resultado se coloca en ambos factores

$$\sqrt{x^2} = x \Rightarrow (x)(x)$$

2. El primer factor lleva el signo del término lineal

$$(x - \text{ }) (x \text{ })$$

3. El segundo factor lleva el signo que resulta de multiplicar el signo del término lineal con el término independiente

$$- \cdot + = - \Rightarrow (x - \text{ }) (x - \text{ })$$

4. Buscar dos términos que, sumados, den el término lineal, y, multiplicados, el término independiente

$$4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow 4 + 8 = 12 \checkmark$$

$$2 \cdot 16 = 32 \Rightarrow 2 + 16 = 18 \times$$

5. Formar los factores, el término más grande va en el primer factor

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 8)(x - 4)$$

$$x^6 - 21x^3m + 98m^2$$

En este ejemplo, x ya no está elevada al cuadrado, no obstante, sigue siendo un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ ya que ningún coeficiente acompaña a la x , así mismo los exponentes de mayor grado de ambas variables son múltiplos de los exponentes de menor grado de sus respectivas variables.

1. Obtener la raíz cuadrada del término que contenga la variable con el exponente más alto, el resultado se coloca en ambos factores

$$\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3 \Rightarrow (x^3)(x^3)$$

Note que el valor de la raíz cuadrada se halla también en otro término

2. El primer factor lleva el signo del término que posee el mismo valor de la raíz cuadrada de la variable con el exponente más alto

$$(x^3 -)(x^3)$$

3. El segundo factor lleva el signo que resulta de multiplicar el signo del término anterior con el término restante

$$- \cdot + = - \Rightarrow (x^3 -)(x^3 -)$$

4. Buscar dos términos que, sumados, den el coeficiente del término que posea el mismo valor de la raíz cuadrada de la variable con el exponente más alto y, multiplicados, el coeficiente del término restante

$$7 \cdot 14 = 98 \Rightarrow -7 + 14 = 7$$

$$7 - 14 = -21 \checkmark$$

Comprobación

5. Para hallar la literal que acompañará a los términos anteriores, obtenga la raíz cuadrada de la variable restante con el exponente más alto

$$\sqrt{m^2} = m \Rightarrow 7m, 14m$$

6. Formar los factores, el término más grande va en el primer factor

$$x^6 - 21x^3m + 98m^2 = (x^3 - 14m)(x^3 - 7m)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ – Aspa simple

Este tipo de trinomio se caracteriza porque el término cuadrático está acompañado de un coeficiente diferente de 1.

$$6x^2 + 7x + 2$$

La idea de este método empieza descomponiendo el término cuadrático (o de mayor exponente) y el término independiente (o de menor exponente) en sus factores.

$$6x^2 + 7x + 2$$

$3x$		2
$2x$		1

Multiplicamos los factores en diagonal

$6x^2 + 7x + 2$		
$3x$		$2 = 4x$
$2x$		$1 = 3x$

Comprobamos que la suma/resta de cada multiplicación nos dé el resultado del término lineal

$6x^2 + 7x + 2$		
$3x$		$2 = 4x$
$2x$		$1 = 3x$
		$7x$

Si los valores coinciden, los factores se forman agrupando los términos en línea recta

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 6x^2 + 7x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$3x$	$\rightarrow$	2	$(3x + 2)$
$2x$	$\rightarrow$	1	$(2x + 1)$



$$6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)$$

Una de las cosas que hacen que este método sea tedioso es en cuestión de los signos

$$3x^2 - 5x - 12$$

Para que el término lineal sea negativo, un factor del término independiente debe ser positivo y el otro negativo.

$$3x^2 - 5x - 12$$

$3x$	-4
x	3

Multiplicar factores en diagonal y comprobar que la suma/resta de cada multiplicación nos dé el resultado del término lineal

$$3x^2 - 5x - 12$$

$3x$	$\rightarrow$	$-4 = -4x$
x	$\rightarrow$	$3 = 9x$
		$5x$

Si nos da el valor del término, pero con signo contrario, debemos cambiar el signo de los factores del término independiente

$$3x^2 - 5x - 12$$

$3x$	$4 = 4x$
x	$-3 = -9x$
	$-5x$

Si los valores coinciden, los factores se forman agrupando los términos en línea recta

$3x^2 - 5x - 12$	
$3x \rightarrow 4$	$(3x + 4)$
$x \rightarrow -3$	$(x - 3)$

 $\Rightarrow 3x^2 - 5x - 12 = (3x + 4)(x - 3)$

$$13y + 20y^2 - 15$$

Reordenando términos

$$20y^2 + 13y - 15$$

Para que el término lineal sea negativo, un factor del término independiente debe ser positivo y el otro negativo.

$$20y^2 + 13y - 15$$

$5y$	-3
$4y$	5

Multiplicar factores en diagonal y comprobar que la suma/resta de cada multiplicación nos dé el resultado del término lineal

$$20y^2 + 13y - 15$$

5y	-3 = -12y
4y	5 = 25y
13y	

Si los valores coinciden, los factores se forman agrupando los términos en línea recta

$$20y^2 + 13x - 15$$

5y	→ -3	(5y - 3)
4y	→ 5	(4y + 5)

⇒

$$20y^2 + 13x - 15 = (5y - 3)(4y + 5)$$

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

Como el término independiente (de x) es positivo y el término con la x de menor grado es negativo, los factores del término independiente (de x) deben ser negativos

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

3x ²	-2y
5x ²	-y

Multiplicar factores en diagonal y comprobar que la suma/resta de cada multiplicación nos dé el resultado del término lineal

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

$3x^2$	$\rightarrow$	$-2y = -10x^2y$
$5x^2$	$\rightarrow$	$-y = -3x^2y$
		$\underline{-13x^2y}$

En caso de no coincidir, cambiar de orden los factores de cualquier columna

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

$5x^2$	$\rightarrow$	$-2y = -6x^2y$
$3x^2$	$\rightarrow$	$-y = -5x^2y$
		$\underline{-11x^2y}$

Si los valores coinciden, los factores se forman agrupando los términos en línea recta

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

$5x^2$	$\rightarrow$	$-2y$	$(5x^2 - 2y)$
$3x^2$	$\rightarrow$	$-y$	$(3x^2 - y)$



$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2 = (5x^2 - 2y)(3x^2 - y)$$

Binomio de Newton y Triángulo de Pascal

El binomio de Newton es una expresión que nos permite calcular cualquier binomio elevado n , el desarrollo del binomio de Newton guarda una estrecha relación con el triángulo de Pascal.

El triángulo de Pascal es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico. Se empieza con un 1 en la primera fila, y en las filas siguientes se van colocando números de forma que cada uno de ellos sea la suma de los dos números que tiene encima, de forma que los bordes del triángulo están formados por unos.

Cada fila del triángulo de Pascal corresponde a los coeficientes del desarrollo de la potencia respectiva del binomio de Newton.

TRIÁNGULO DE PASCAL

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

POTENCIA DE UNA SUMA

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= 1a + 1b \\
 (a + b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a + b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a + b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
 (a + b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5
 \end{aligned}$$

En el caso en que en el binomio figure un signo menos, es decir se trate de una resta, tan solo hay que alternar los signos del desarrollo de la forma $+ - + - + - \dots$.

POTENCIA DE UNA RESTA

$$\begin{aligned}
 (a - b)^0 &= 1 \\
 (a - b)^1 &= 1a - 1b \\
 (a - b)^2 &= 1a^2 - 2ab + 1b^2 \\
 (a - b)^3 &= 1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3 \\
 (a - b)^4 &= 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4 \\
 (a - b)^5 &= 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5
 \end{aligned}$$

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7
1	8	28	56	70	56	28
1	9	36	84	126	126	84
1	10	45	120	210	252	210
1	11	55	165	330	462	330
1	12	66	220	495	792	495
1	13	78	286	672	1092	672
1	14	91	364	858	1365	858
1	15	105	455	1050	1716	1050
1	16	120	560	1287	2184	1287
1	17	136	680	1593	2730	1593
1	18	153	816	1980	3360	1980
1	19	171	969	2431	4074	2431
1	20	190	1140	2966	4862	2966
1	21	210	1330	3585	5733	3585
1	22	231	1540	4284	6690	4284
1	23	253	1771	5067	7735	5067
1	24	276	2024	5940	8868	5940
1	25	300	2300	6895	10080	6895
1	26	325	2600	7944	11368	7944
1	27	351	2925	9089	12732	9089
1	28	378	3276	10332	14172	10332
1	29	406	3654	11685	15688	11685
1	30	435	4060	13140	17280	13140
1	31	465	4495	14699	18948	14699
1	32	496	4960	16376	20692	16376
1	33	528	5456	18173	22512	18173
1	34	561	5984	20094	24408	20094
1	35	595	6545	22143	26380	22143
1	36	630	7140	24324	28428	24324
1	37	666	7770	26641	30552	26641
1	38	703	8436	29098	32752	29098
1	39	741	9139	31699	35028	31699
1	40	780	9880	34448	37380	34448
1	41	820	10660	37350	39808	37350
1	42	861	11481	40409	42312	40409
1	43	903	12344	43630	44892	43630
1	44	946	13250	47017	47548	47017
1	45	990	14200	50576	50280	50576
1	46	1035	15195	54313	53088	54313
1	47	1081	16237	58234	55972	58234
1	48	1128	17327	62345	58932	62345
1	49	1176	18467	66653	61968	66653
1	50	1225	19659	71165	65080	71165
1	51	1275	20904	75888	68268	75888
1	52	1326	22204	80830	71532	80830
1	53	1378	23560	85999	74872	85999
1	54	1431	24973	91394	78288	91394
1	55	1485	26445	97024	81780	97024
1	56	1540	27977	102897	85348	102897
1	57	1596	29571	109012	88992	109012
1	58	1653	31228	115369	92712	115369
1	59	1711	32950	121978	96508	121978
1	60	1770	34738	128850	100380	128850
1	61	1830	36594	135985	104328	135985
1	62	1891	38519	143394	108352	143394
1	63	1953	40515	151078	112452	151078
1	64	2016	42584	159038	116628	159038
1	65	2080	44728	167285	120880	167285
1	66	2145	46948	175820	125208	175820
1	67	2211	49246	184645	129612	184645
1	68	2278	51624	193772	134092	193772
1	69	2346	54084	203213	138648	203213
1	70	2415	56628	212970	143280	212970
1	71	2485	59258	223045	147988	223045
1	72	2556	61976	233450	152772	233450
1	73	2628	64784	244187	157632	244187
1	74	2701	67684	255268	162568	255268
1	75	2775	70678	266705	167580	266705
1	76	2850	73768	278500	172668	278500
1	77	2926	76956	290665	177832	290665
1	78	3003	80244	303202	183072	303202
1	79	3081	83634	316123	188388	316123
1	80	3160	87128	329440	193780	329440
1	81	3240	90728	343165	199248	343165
1	82	3321	94436	357310	204792	357310
1	83	3403	98254	371887	210412	371887
1	84	3486	102184	386908	216108	386908
1	85	3570	106228	402385	221880	402385
1	86	3655	110388	418330	227728	418330
1	87	3741	114666	434755	233652	434755
1	88	3828	119064	451672	239652	451672
1	89	3916	123584	469093	245728	469093
1	90	4005	128228	487030	251880	487030
1	91	4095	133000	505495	258108	505495
1	92	4186	137892	524500	264412	524500
1	93	4278	142908	544057	270792	544057
1	94	4371	148050	564178	277248	564178
1	95	4465	153320	584875	283780	584875
1	96	4560	158720	606160	290388	606160
1	97	4656	164252	628045	297072	628045
1	98	4753	169918	650542	303832	650542
1	99	4851	175720	673663	310668	673663
1	100	4950	181660	697420	317580	697420

← Coeficientes de un binomio

← Coeficientes de un binomio al **cuadrado**

← Coeficientes de un binomio al **cubo**

← Coeficientes de un binomio a la **cuarta**

← Coeficientes de un binomio a la **quinta**

El exponente que acompaña a la x (o variable del primer término) va disminuyendo progresivamente en 1 unidad, partiendo desde n hasta hacerse 0.

El exponente que acompaña a la y (o variable del segundo término) va aumentando progresivamente en 1 unidad comenzando desde 0 hasta n .

$$(x + y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + 1x^0y^6$$

$$(3x + 4y)^4$$

Identificar quien es x y quién y

$$\left(\frac{3x}{x} + \frac{4y}{y}\right)^4$$

Desarrollar el Binomio de Newton, colocando y con los exponentes en su respectivo orden

$$(3x)^4(\cancel{4y})^0 + (3x)^3(\cancel{4y})^1 + (3x)^2(\cancel{4y})^2 + (3x)^1(\cancel{4y})^3 + (\cancel{3x})^0(\cancel{4y})^4$$

Con la ayuda del triángulo de Pascal, anotar los coeficientes

			1			
		1	1			
	1	2	1			
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7

$$1(3x)^4 + 4(3x)^3(4y) + 6(3x)^2(4y)^2 + 4(3x)(4y)^3 + 1(4y)^4$$

Aplicar propiedad $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$(3^4x^4) + 4(3^3x^3)(4y) + 6(3^2x^2)(4^2y^2) + 4(3x)(4^3y^3) + (4^4y^4)$$

Simplificar

$$(81x^4) + 4(27x^3)(4y) + 6(9x^2)(16y^2) + 4(3x)(64y^3) + (256y^4)$$

Multiplicar los coeficientes de cada término

$$(3x + 4y)^4 = 81x^4 + 432x^3y + 864x^2y^2 + 708xy^3 + 256y^4$$

$$(3z^2 + 4t^3)^3$$

Identificar quién es x y quién es y

$$\left(\underbrace{3z^2}_x - \underbrace{4t^3}_y\right)^3$$

Desarrollar el binomio de Newton, colocando los exponentes en su respectivo orden y alternando signos, empezando por

$$(3z^2)^3(4t^3)^0 - (3z^2)^2(4t^3)^1 + (3z^2)^1(4t^3)^2 - (3z^2)^0(4t^3)^3$$

Con la ayuda del triángulo de Pascal, anotar los coeficientes

			1			
		1	1			
	1	2	1			
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7

$$1(3z^2)^3 - 3(3z^2)^2(4t^3)^1 + 3(3z^2)^1(4t^3)^2 - 1(4t^3)^3$$

Aplicar propiedad $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$1[3^3(z^2)^3] - 3[3^2(z^2)^2](4t^3) + 3(3z^2)[4^2(t^3)^2] - 1[4^3(t^3)^3]$$

Aplicar propiedad $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$1[27z^6] - 3[9z^4](4t^3) + 3(3z^2)[16t^6] - 1[64t^9]$$

Multiplicar los coeficientes de cada término

$$(3z^2 - 4t^3)^3 = 27z^6 - 108z^4t^3 + 144z^2t^6 - 64t^9$$

Raíces de una ecuación

La raíz de una ecuación es aquel valor de la variable independiente que hace que el resultado de la ecuación sea cero. De manera gráfica se representa como el corte al eje x .

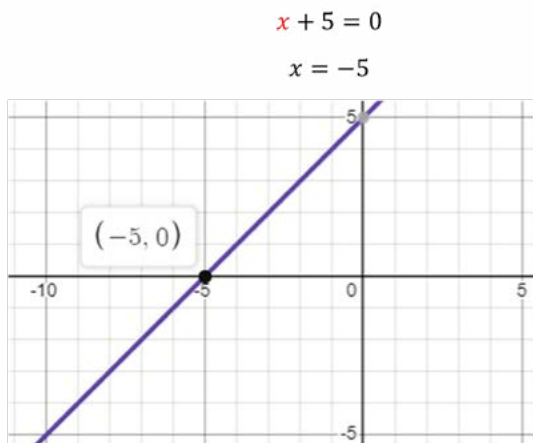
El teorema fundamental del álgebra nos dice que un polinomio de grado n (el exponente más alto de toda la ecuación), tendrá precisamente n raíces. Así pues, una ecuación lineal o de primer grado tendrá una sola raíz; una ecuación cuadrática o de segundo grado poseerá dos raíces; una ecuación cúbica o de tercer grado tendrá tres raíces, y así sucesivamente.

Ecuación de primer grado

Su fórmula general es: $ax + b = 0$

Las ecuaciones de primer grado (x elevado a 1) son también llamadas ecuaciones lineales, ya que, al representarlas gráficamente, describen una línea recta inclinada.

Para hallar las raíces de una ecuación, debemos despejar la variable x



Si x es **positiva** la línea recta irá de abajo hacia arriba.

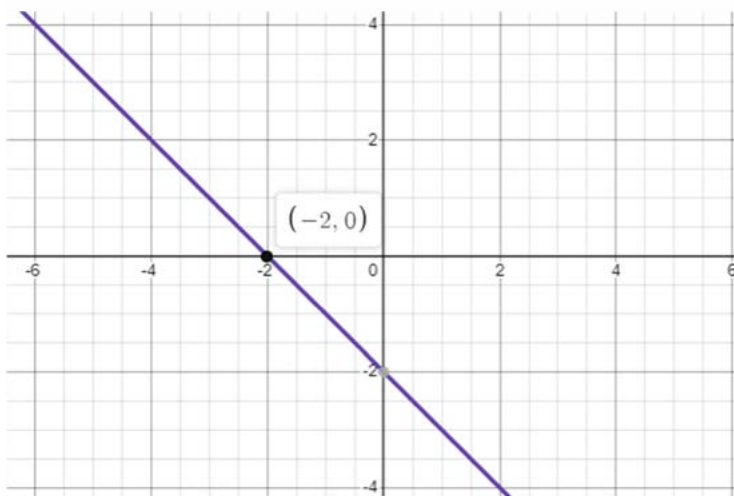
$$-x - 2 = 0$$

$$-x = 2$$

En este caso es negativa, pero para hallar la raíz, x debe ser positiva; lo que podemos hacer es multiplicar por (-1) ambos lados de la ecuación (esto generalmente se realiza antes de cualquier despeje).

$$(-1)(-x) = (-1)(2)$$

$$x = -2$$



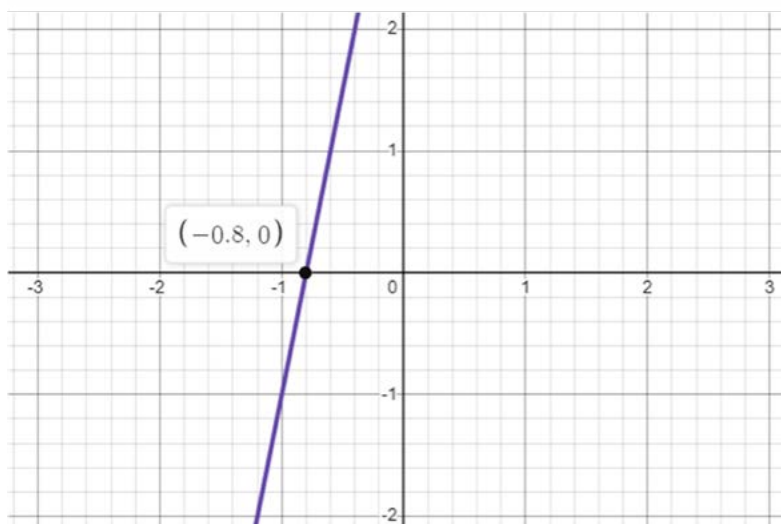
Si la x es **negativa**, irá de arriba hacia abajo.

$$5x + 4 = 0$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

$$x = -0.8$$



Los coeficientes que acompañan a x hacen que la recta esté más o menos inclinada, a **mayor valor** más inclinada estará, a **menor valor** menos inclinada estará.

$$-\frac{1}{2}x + 7 = 0$$

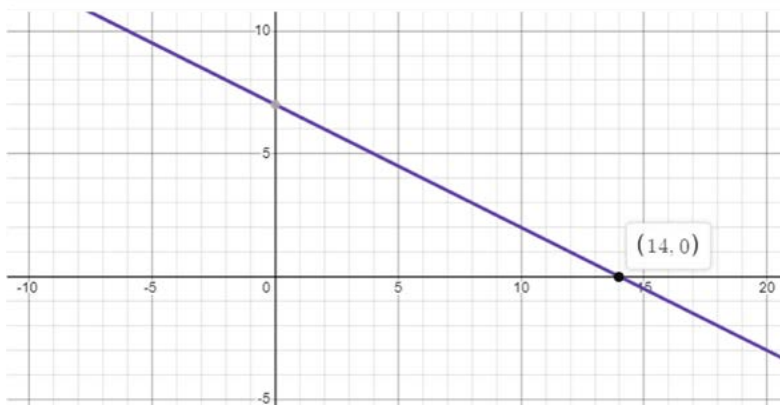
$$-\frac{1}{2}x = -7$$

Si el coeficiente que acompaña a x tiene signo negativo, este pasará dividiendo con todo y el signo, es decir, el signo no cambia

$$x = -\frac{7}{-\frac{1}{2}} = \frac{-7}{-\frac{1}{2}}$$

$$x = +\frac{14}{1}$$

$$x = 14$$

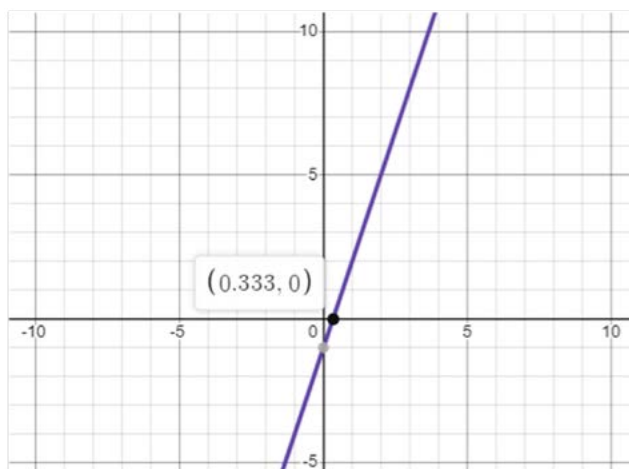


Algunas raíces puede ser **racionales** y tener infinitos decimales repetidos:

$$3x - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3} = 0.\overline{33}$$



Al hacer la gráfica de manera manual, necesitamos realizar una tabulación, es decir, dar valores arbitrarios a x (los valores que queramos) y evaluarlos en la ecuación para hallar las coordenadas que nos servirán para graficar la ecuación. Las raíces al ser evaluadas nos darán como resultado 0 en y .

$$y = -3x - 6$$

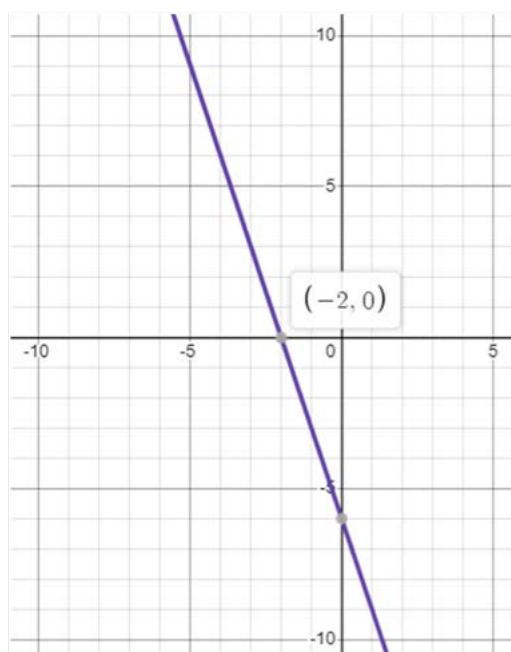
$$-3x - 6 = 0$$

$$-3x = 6$$

$$x = \frac{6}{-3}$$

$$x = -2$$

	$y = -3x - 6$	(x, y)
-2	$-3(-2) - 6; 6 - 6 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$-3(-1) - 6; 3 - 6 = -3$	$(-1, -3)$
0	$-3(0) - 6; 0 - 6 = -6$	$(0, -6)$
1	$-3(1) - 6; -3 - 6 = -9$	$(1, -9)$
2	$-3(2) - 6; -6 - 6 = -12$	$(2, -12)$



Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado, llamada también cuadrática, es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2 .

Su fórmula general es $ax^2 + bx + c$

Donde ax^2 es el término cuadrático, bx el término lineal, y c el término independiente.

Las ecuaciones de segundo grado tienen 2 raíces.

Existen dos tipos de ecuaciones cuadráticas: Ecuaciones cuadráticas incompletas y ecuaciones cuadráticas completas

Ecuación cuadrática incompleta

Una ecuación cuadrática incompleta es aquella donde falta ya sea el término lineal (bx) o el término independiente (c), o incluso ambas.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

Para hallar las raíces, obtenemos la raíz cuadrada de ambos términos:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

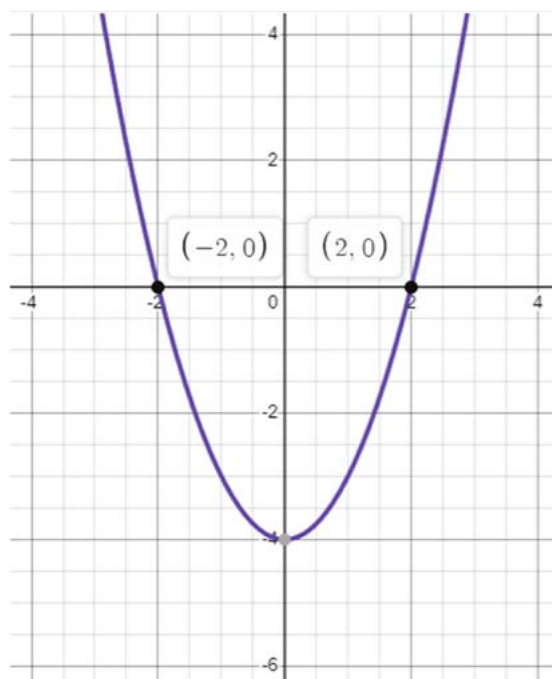
Recuerda que la solución de una raíz cuadrada lleva el signo $\pm$, ya que al elevar una cantidad negativa al cuadrado, esta se vuelve positiva:

$$x = \pm 2$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2$$

La gráfica de una ecuación de segundo grado es una parábola. Esta posee un eje de simetría, ya que al elevar una cantidad con signo positivo y luego con signo negativo al cuadrado, obtendremos el mismo valor.

Si x^2 es **positiva** la parábola poseerá un punto mínimo (vértice) por lo que los valores irán hacia arriba.



$$-x^2 + 25 = 0$$

$$-x^2 = -25$$

$$(-1)(-x^2) = (-1)(-25)$$

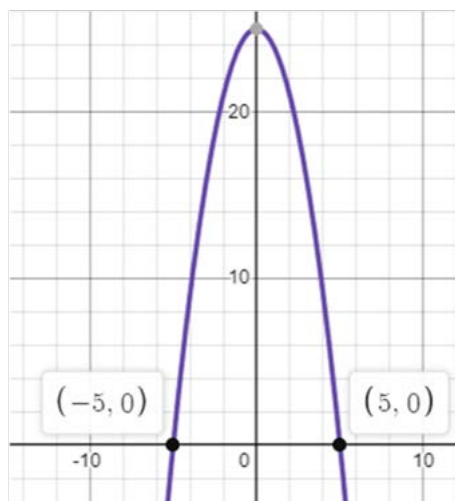
$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

$$x_1 = 5; x_2 = -5$$

Si x^2 es **negativa** la parábola poseerá un punto máximo (vértice) por lo que los valores irán hacia abajo



$$2x^2 + 4x = 0$$

Este tipo de ecuaciones cuadráticas se resuelven por factorización por término común, se sabe que una de las raíces es , ya que al sustituir por todo se cancelará.

$$2x(x + 2) = 0$$

Tenemos dos despejes:

$$(x + 2) = \frac{0}{2x}$$

$$x + 2 = 0$$

$$x_1 = -2$$

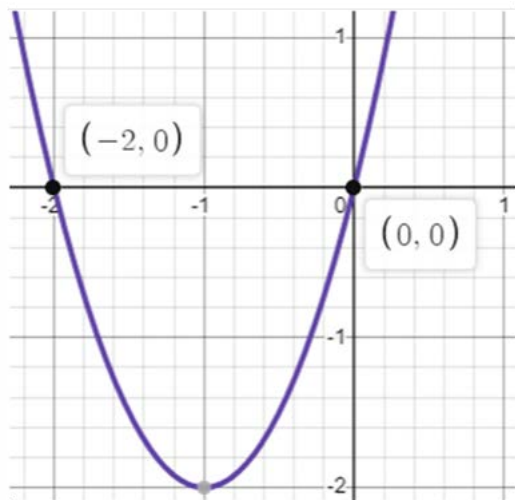
$$2x = \frac{0}{(x + 2)}$$

$$2x = 0$$

$$x = \frac{0}{2}$$

$$x_2 = 0$$

El coeficiente que acompaña a x^2 al encontrarse más alejado a cero, hará que la parábola sea **más estrecha**, pero al encontrarse más cercano a cero, hará que la parábola sea **menos estrecha**.



$$-\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$$

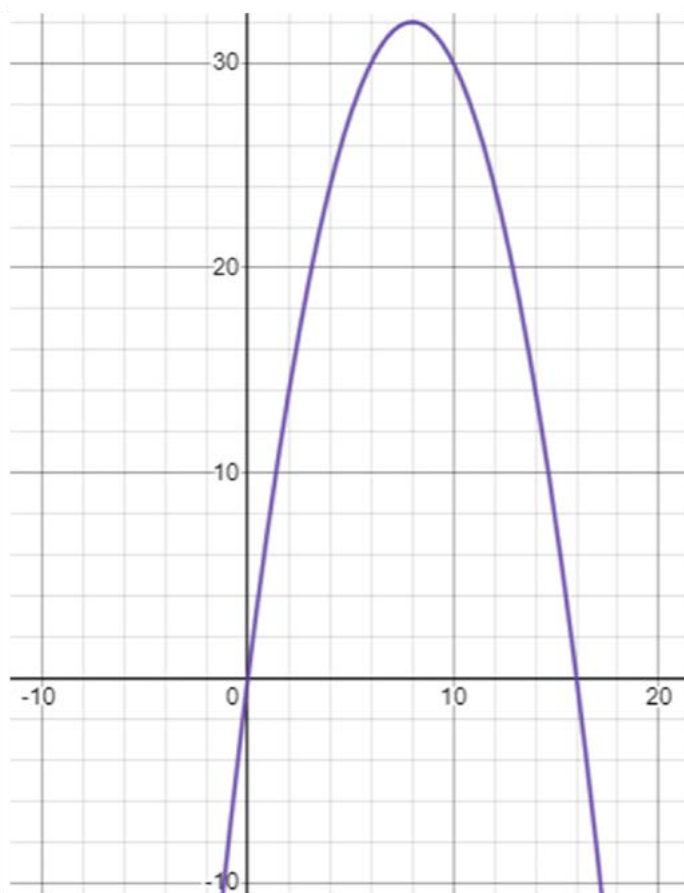
$$\frac{1}{2}x(-x + 16) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-x = -16$$

$$(-1)(-x) = (-1)(-16)$$

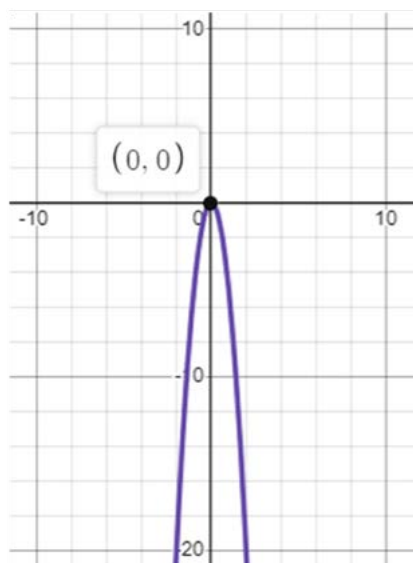
$$x_2 = 16$$



$$5x^2 = 0$$

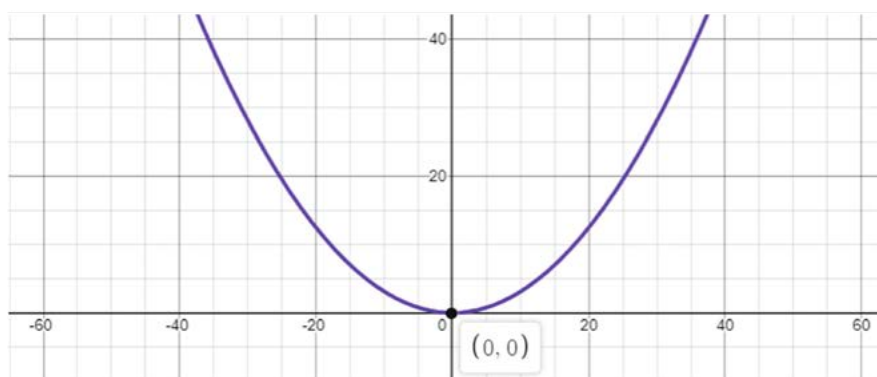
El caso más fácil, ya que x solo posee una raíz; al sustituir 0 por x todo se cancelará. La raíz coincide con el vértice.

$$x = 0$$



$$\frac{1}{8}x^2 = 0$$

$$x = 0$$



Ecuación cuadrática completa

Estas ecuaciones tienen todos los términos (cuadrática, lineal e independiente). Para hallar las raíces, podemos factorizar por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ si x^2 no se acompaña de ningún coeficiente diferente a 1, o por aspa simple si es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$x^2 + 7x + 10$$

Para factorizar por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ si x^2 buscamos dos números que sumados den el coeficiente del término lineal y multiplicados den el término independiente.

$$(x + 2)(x + 5)$$

Igualas la expresión a 0, y despejamos cada factor:

$$(x + 2)(x + 5) = 0$$

$$(x + 2) = \frac{0}{(x + 5)}$$

$$x + 2 = 0$$

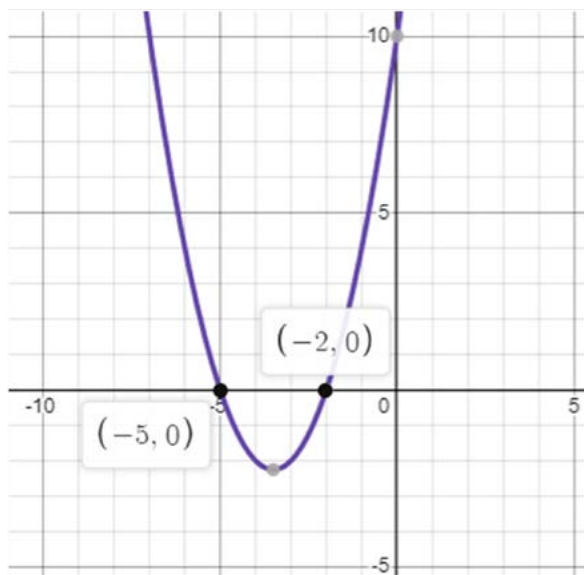
$$x = -2$$

$$(x + 2)(x + 5) = 0$$

$$(x + 5) = \frac{0}{(x + 2)}$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$



$$-2x^2 + 10x - 7$$

En este caso, no podemos factorizar por trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ ya que las raíces son **racionales**, ante ello, debemos usar la fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b, c son los coeficientes de los términos cuadrático, lineal e independiente respectivamente con sus respectivos signos.

$$a = -2$$

$$b = 10$$

$$c = -7$$

$$\frac{-(10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(-2)(-7)}}{2(-2)}$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100 - 56}}{-4} = \frac{-10 \pm \sqrt{44}}{-4} = \frac{-10 \pm 6.63}{-4}$$

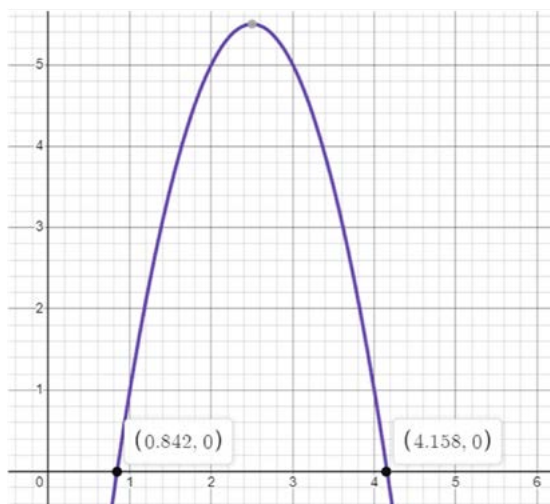
Note que el signo $\pm$ nos dirige a dos soluciones

$$x_1 = \frac{-10 + 6.63}{-4} = \frac{-3.37}{-4}$$

$$x_1 = 0.8425$$

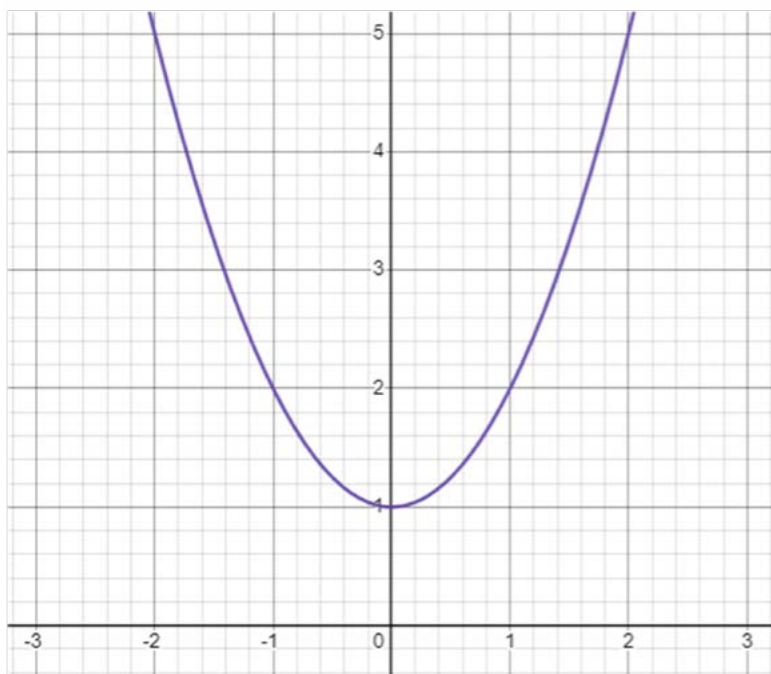
$$x_2 = \frac{-10 - 6.63}{-4} = \frac{-16.63}{-4}$$

$$x_2 = 4.1575 \approx 4.158$$



Observe la siguiente ecuación y su gráfica:

$$y = x^2 + 1$$



La gráfica no corta al eje x , y si intentamos despejar x para hallar las raíces:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

$$x = \sqrt{-1}$$

La raíz cuadrada de un número negativo no existe, o por lo menos en los números reales. Entonces, para hallar la raíz de un número negativo, se emplean los números complejos (o imaginarios) i .

De tal manera que la raíz de menos 1 es igual a $\pm i$

$$x = \pm i$$

Comprobación:

$$i^2 = -1$$

$$(-i)^2 = (-i)(-i) = +i^2 = -1$$

Entonces las raíces de $x^2 + 1$ son:

$$x_1 = i$$

$$x_2 = -i$$

En ecuaciones de mayor grado, una expresión puede tener raíces reales y complejas (imaginarias) al mismo tiempo.

Para conocer la naturaleza de las raíces de una expresión cuadrática, podemos utilizar el **discriminante**.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, tendremos dos raíces reales diferentes.

Si $\Delta = 0$, tendremos dos raíces reales iguales (una sola solución).

Si $\Delta < 0$, No tendremos raíces reales, sino que dos raíces complejas diferentes.

$$x^2 - 2x + 5$$

Obteniendo el discriminante:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = 5$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20$$

$$\Delta = -16$$

La ecuación posee dos raíces complejas.

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{16 \cdot -1}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 + \frac{4i}{2}$$

$$x_1 = 1 + 2i$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{\sqrt{16 \cdot -1}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 - \frac{4i}{2}$$

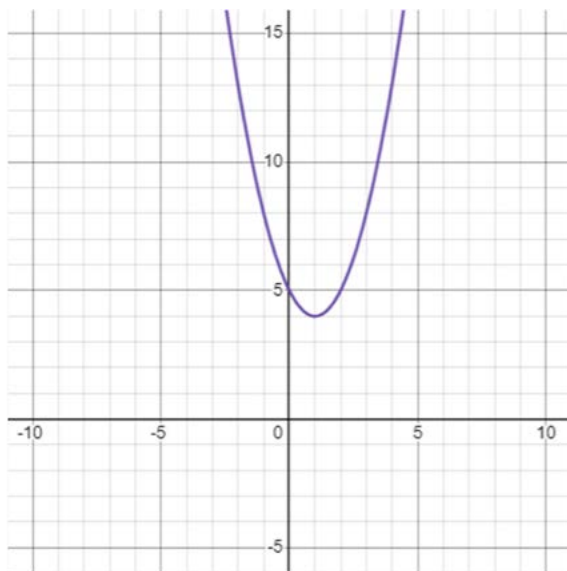
$$x_2 = 1 - 2i$$

Los números complejos se componen de una **parte real** y una **parte imaginaria**.

Las raíces complejas de una ecuación cuadrática resultan ser conjugados entre sí, es decir mismo términos pero con signos cambiado).

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i$$



Ecuación de tercer grado

Las ecuaciones de tercer grado son conocidas también como ecuaciones cúbicas, caracterizadas por tener su mayor exponente el tres.

La denotación general de la ecuación de tercer grado es $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Para hallar las raíces de una ecuación cúbica, usamos la regla de Ruffini. Que consiste en ordenar los términos de mayor a menor (según el exponente de x) para luego escribir solo los coeficientes (si falta algún término, se coloca 0) a continuación, se baja el primer coeficiente y se multiplica por el número a evaluar; el resultado se suma o resta al siguiente coeficiente. Tras esto el residuo se multiplica por el número a evaluar y el resultado se suma o resta al siguiente número, y así hasta llegar al último coeficiente donde la suma o resta nos debe dar 0 para que sea una raíz, en caso contrario, no será una raíz.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Para obtener los números a evaluar, de acuerdo al teorema de Gauss para polinomios, obtendremos los divisores del término cúbico y los divisores del término independiente.

$$x^3 \rightarrow 1, -1$$

$$6 \rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Dividimos cada divisor del término independiente entre cada divisor del término cúbico para obtener el conjunto de posibles números que sean raíces; en este caso quedará igual.

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Regla de Ruffini:

	1	-4	1	6
1		1	-3	-2
	1	-3	-2	4

El residuo, al no ser 0, el 1 no es raíz

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

Al ser el residuo 0, $x = 2$

Si queremos escribirlo como factor, despejamos la raíz $(x - 2)$

Para encontrar las otras raíces podemos seguir evaluando los divisores, pero sería algo tardado; por suerte, gracias a la regla de Ruffini, lo que nos queda al final es un polinomio de un grado menor, es decir $ax^2 + bx + c$

$$x^2 - 2x - 3$$

La expresión completa sería

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 3)$$

A partir de aquí podemos factorizar por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$(x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

Las raíces, por tanto serían

$$x - 2 = 0$$

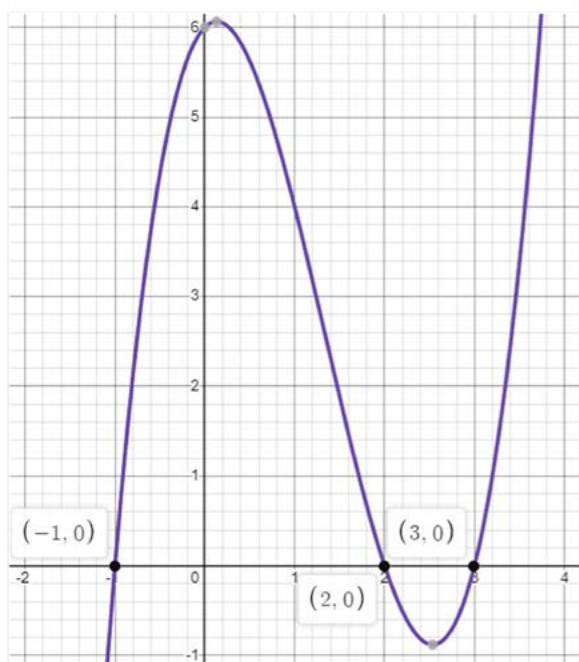
$$x_1 = 2$$

$$x - 3 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x + 1 = 0$$

$$x_3 = -1$$



$$x^3 + x^2 + 9x + 9$$

Obtenemos los divisores del término cúbico y del término independiente:

$$x^3 \rightarrow \pm 1$$

$$9 \rightarrow \pm 1, \pm 3, \pm 9$$

Dividimos cada divisor del término independiente entre cada divisor del término cúbico, en este caso, los divisores quedan igual.

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9$$

Regla de Ruffini:

	1	1	9	9
-1		-1	0	-9
	1	0	9	0

Al ser el residuo 0, la primera raíz es:

$$x_1 = -1$$

Bajando un grado al polinomio, nos queda:

$$x^2 + 9$$

Al obtener las otras raíces nos queda que:

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

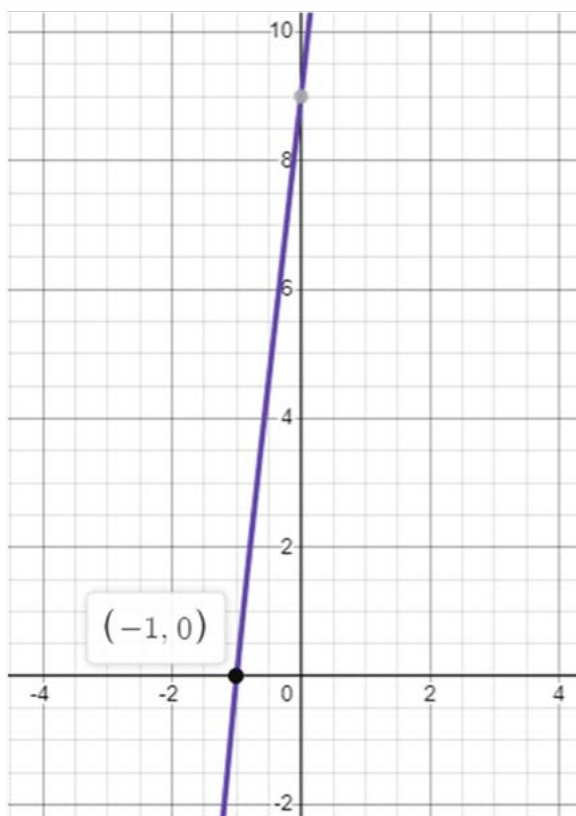
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9}$$

Obtenemos raíces complejas

$$x_{1,2} = \pm 3i$$

Las raíces de esta ecuación cúbica son:

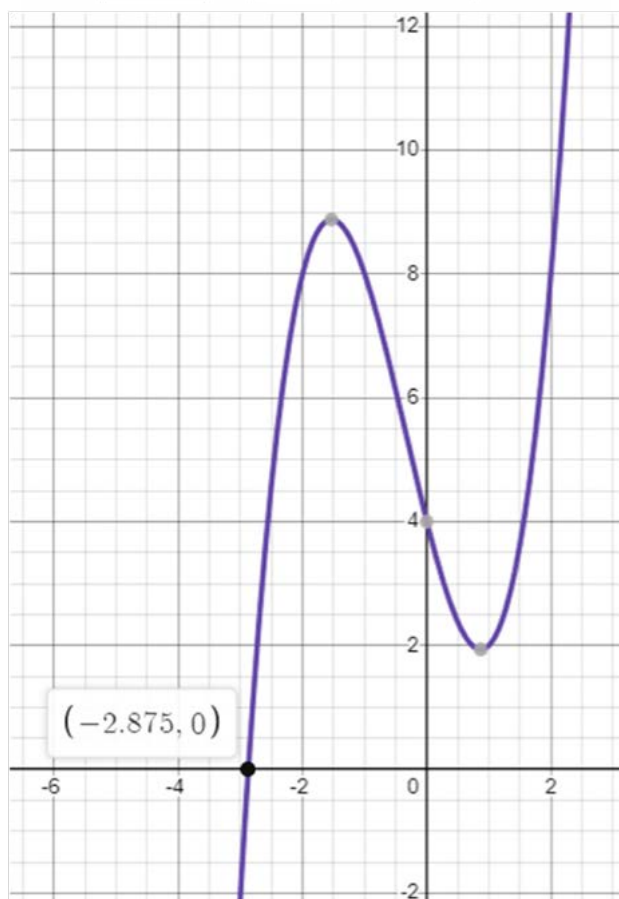
$$x_1 = -1, x_2 = 3i, x_3 = -3i$$



Note que la gráfica solo corta una vez el eje x, aunque no tenga la forma característica, es una ecuación cúbica.

Si bien usando la regla de Ruffini podemos encontrar las raíces reales, cuando estas poseen muchos decimales se vuelve complicado, por lo que usar otros métodos como el de Newton–Raphson, la fórmula de Cardano o la gráfica, podemos hallar las raíces reales.

$x^3 + x^2 - 4x + 4$				
1	1	-4	4	-2.8751
	-2.8751	5.3911	-3.99	
	-1.8751	1.3911	≈ 0	



Capítulo 2

Cálculo diferencial

Reglas de derivación

1. Derivada de una constante

La derivada de una constante es cero

$$\frac{dy}{dx}(\text{constante}) = 0$$

$$\begin{array}{llllll} y = 5 & y = 967 & y = -78 & y = \frac{2}{3} & y = -\frac{8}{12} & y = \pi \\ y' = 0 & y' = 0 & y' = 0 & y' = 0 & y' = 0 & y' = 0 \end{array}$$

2. Derivada de una variable

La derivada de una variable es el cociente que lo acompaña (respetando su signo)

$$\frac{dy}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(3x) = 3 \quad \frac{dy}{dx}(-6x) = -6 \quad \frac{dy}{dx}(\pi x) = \pi \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-\frac{6}{7}x\right) = -\frac{6}{7} \quad \frac{dy}{dx}(1.33x) = 1.33$$

3. Regla de la potencia

La derivada de una variable elevada a un exponente numérico es igual al valor del exponente numérico multiplicado por la variable elevada a la cantidad del exponente numérico menos uno.

$$\frac{dy}{dx}(x)^n = nx^{n-1}$$

$$y' = \frac{y = x^4}{4x^{4-1}} = 4x^3 \quad y' = \frac{y = 3x^5}{(5)3x^{5-1}} = 15x^4 \quad y' = \frac{y = x^{11}}{11x^{11-1}} = 11x^{10}$$

$$y' = \frac{y = -10x^3}{(3)(-10x)^{3-1}} = -30x^2 \quad y' = \frac{y = \frac{2}{3}x^2}{(2)\frac{2}{3}x^{2-1}} = \frac{4}{3}x^1 = 1\frac{1}{3}x$$

$$y' = \frac{y = -\frac{3}{5}x^4}{(4)(-\frac{3}{5}x)^{4-1}} = \frac{12}{5}x^3 = 2\frac{2}{5}x^3$$

Ahora, veremos casos donde se aplican las propiedades de los exponentes

Regla de la potencia – exponente negativo

$$y = x^{-4}$$

Derivamos de acuerdo a la regla de la potencia

$$y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

Aplicar propiedad $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ($n \neq 0$)

$$y' = -4 \frac{1}{x^5}$$

$$y' = -\frac{4}{x^5}$$

$$w = 5x^{-6}$$

Derivamos de acuerdo a la regla de la potencia

$$w' = (-6)5x^{-6-1} = -30x^{-7}$$

Aplicar propiedad $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$w' = -30 \frac{1}{x^7}$$

$$w' = -\frac{30}{x^7}$$

Regla de la potencia – exponente fraccionario

$$y = \sqrt{x^1}$$

Aplicar propiedad $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

Derivar de acuerdo a la regla de la potencia

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicar propiedad $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Aplicar propiedad $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$y' = \frac{1}{2^2 \sqrt{x^1}}$$

Note el uso de las propiedades de la potenciación, pero al revés

Regla de la potencia – exponente fraccionario negativo

$$y = x^{-\frac{2}{3}}$$

Derivar de acuerdo a la regla de la potencia

$$y' = -\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}}$$

Aplicar propiedad $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

Aplicar propiedad $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

Aplicar propiedad $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^2}}$$

Aplicar propiedad $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

Regla de la potencia – potencia negativa en el denominador

$$z = \frac{3}{x^{-5}}$$

Aplicar propiedad $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$$z = 3x^5$$

Derivar de acuerdo a la regla de la potencia

$$z' = (5)3x^{5-1}$$

$$z' = 15x^4$$

4. Derivada de la raíz enésima de una función

Una forma de acortar la regla de la potencia aplicada a un exponente fraccionario

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{u}) = \frac{\frac{du}{dx}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$\frac{dy}{dx} \sqrt[5]{3x}$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 3x = 3$$

Reemplazar valores en la fórmula

$$\frac{dy}{dx} \sqrt[5]{3x} = \frac{3}{5\sqrt[5]{(3x)^{5-1}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{(3x)^4}}$$

5. Regla de la suma–resta

La regla de la suma/resta establece que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma/resta de sus derivadas

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$

$$y = \frac{u}{3x} + \frac{v}{5x^2} + \frac{w}{\sqrt{x}} \qquad y' = \frac{u'}{3} + \frac{v'}{10x} + \frac{w'}{\sqrt{x}}$$

$$h = \frac{u}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{x^{-\frac{1}{5}}} \qquad h' = \frac{u'}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

6. Regla de la cadena

Teniendo una variable y que depende de u , y si esta (u) depende a la variable x , entonces la derivada será el producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u respecto a x .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = (4x^2 + 5x)^3$$

$$y' = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d}{du}[(2)4x^{2-1} + 5]$$

$$y' = 3(4x^2 + 5x)^2(8x + 5)$$

Aplicar propiedad distributiva entre el término que queda solo y el factor (polinomio) que no está elevado a ningún exponente

$$y' = 3(4x^2 + 5x)^2(8x + 5)$$

$$y' = (4x^2 + 5x)^2(24x + 15)$$

7. Regla del producto

La derivada de un producto de dos funciones es la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$y = (6x^2 + 4x)^3 \cdot (5x^5 + 7x^2)^2$$

Identificar quién es u y quien es v

$$y = \underbrace{(6x^2 + 4x)^3}_u \cdot \underbrace{(5x^5 + 7x^2)^2}_v$$

Derivar u y v

$$u' = 3(6x^2 + 4x)^2(12x + 4) \quad v' = 2(5x^5 + 7x^2)(25x^4 + 14x)$$

$$u' = (6x^2 + 4x)^2(36x + 12) \quad v' = 2(5x^5 + 7x^2)(25x^4 + 14x)$$

Sustituir los valores anteriores en la fórmula

$$y' = \overbrace{(6x^2 + 4x)^3}^u \overbrace{(5x^5 + 7x^2)^2}^{v'} \overbrace{(50x^4 + 28x)}^v + \overbrace{(5x^5 + 7x^2)^2}^v \overbrace{(6x^2 + 4x)^2(36x + 12)}^{u'}$$

Simplificar factorizando por términos en común, elegir el exponente de menor grado para cada término

$$y' = (6x^2 + 4x)^3(5x^5 + 7x^2)(50x^4 + 28x) + (5x^5 + 7x^2)^2(6x^2 + 4x)^2(36x + 12)$$

$$y' = (6x^2 + 4x)^2(5x^5 + 7x^2)[(6x^2 + 4x)^{3-2}(50x^4 + 28x) + (5x^5 + 7x^2)^{2-1}(36x + 12)]$$

$$y' = (6x^2 + 4x)^2(5x^5 + 7x^2)[(6x^2 + 4x)(50x^4 + 28x) + (5x^5 + 7x^2)(36x + 12)]$$

Aplicar propiedad distributiva a los factores dentro del corchete

$$y' = (6x^2 + 4x)^2(5x^5 + 7x^2)[300x^6 + 144x^3 + 200x^5 + 112x^2 + 180x^6 + 60x^5 + 252x^3 + 84x^2]$$

Agrupar términos semejantes

$$y' = (6x^2 + 4x)^2(5x^5 + 7x^2)[480x^6 + 260x^5 + 396x^3 + 196x^2]$$

8. Regla del Cociente (de la división)

La derivada de un cociente de funciones, se hace tomando el denominador multiplicado por la derivada del numerador restado al numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y = \frac{(4x^2 + 7x)^3}{5x^6}$$

Identificar quién es u y quien es v

$$y = \frac{(4x^2 + 7x)^3}{5x^6} \quad \begin{array}{l} \leftarrow u \\ \leftarrow v \end{array}$$

Derivar u y v

$$u' = 3(4x^2 + 7x)^2(8x + 7)$$

$$u' = (4x^2 + 7x)^2(24x + 21)$$

$$v' = 30x^5$$

Sustituir los valores anteriores en la fórmula

$$y' = \frac{\frac{v}{5x^6} \frac{u'}{(4x^2 + 7x)^2(24x + 21)} - \frac{u}{(4x^2 + 7x)^3} \frac{v'}{30x^5}}{\frac{(30x^5)^2}{v^2}}$$

Simplificar

$$y' = \frac{(4x^2 + 7x)^2(120x^7 + 105x^6) - (4x^2 + 7x)^3 30x^5}{30x^{10}}$$

9. Derivadas de funciones exponenciales

Función exponencial de base a

La derivada de la función exponencial es igual a la misma función por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada del exponente.

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = 4^{5x^2}$$

$$y' = 4^{5x^2} \cdot \ln 4 \cdot \overbrace{2(5)x^{2-1}}^{u'} = 4^{5x^2} \cdot \ln 4 \cdot 10x$$

Función exponencial de base e

Si la base de la función exponencial es el número su derivada es igual a elevado al mismo exponente por la derivada del exponente

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = e^{3x^7}$$

$$y' = e^{3x^7} \cdot 3(7)x^{7-1} = e^{3x^7} \cdot 21x^6$$

Derivada de una función elevada a una función

$$\frac{d}{dx} (u^v) = \overbrace{vu^{v-1}}^{u'} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \overbrace{u^v}^{v'} \frac{dv}{dx}$$

$$y = x^x$$

$$y' = (\overbrace{x}^{u'}) x^{x-1} (1) + \ln x \cdot \overbrace{x^x}^{v'} (1)$$

Aplicar propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$y' = x^{1+x-1} + \ln x \cdot x^x$$

$$y' = x^x + \ln x \cdot x^x$$

Factorizar por término común

$$y' = x^x(1 + \ln x)$$

10. Derivadas de funciones logarítmicas

Logaritmo de base a

La derivada de un logaritmo de base a aplicado a una función u es igual a la derivada de u entre u por logaritmo natural (ln) de la base (a).

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u \cdot \ln a}$$

$$y = \log_{10}(3x + 10)$$

$$y' = \frac{\frac{u'}{3}}{(3x + 10) \ln 10}$$

$$w = \log_2 24x^3$$

$$w' = \frac{(24)3x^{3-1}}{24x^3 \cdot \ln 2} = \frac{72x^2}{24x^3 \cdot \ln 2}$$

Aplicar propiedad $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$

$$w' = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{24}}{\cancel{24} x^{3-2} \cdot \ln 2}$$

$$w' = \frac{3}{x \cdot \ln 2}$$

Otra manera de resolver este tipo de derivadas es usando la propiedad de los logaritmos que nos permite quitar exponentes del argumento.

$$t = \log_{18} 15x^{12}$$

Aplica r propiedad $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$$t' = 12 \log_{18} 15x$$

Sacar la constante $\frac{d}{dx}(cu) = c \cdot \frac{du}{dx}$

$$t' = 12 \frac{d}{dx} \log_{18} 15x$$

$$t' = 12 \left(\frac{\frac{u'}{15}}{\cancel{15}x \cdot \ln \cancel{18}} \right)$$

$$t' = 12 \left(\frac{1}{x \cdot \ln 18} \right) = \frac{12}{x \cdot \ln 18}$$

Logaritmo de base e (Logaritmo natural/Logaritmo neperiano)

La derivada de un logaritmo natural (o logaritmo neperiano) es el cociente de la derivada del argumento del logaritmo dividido entre la función del argumento.

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$y = \ln(3x^5 + 12x)^7$$

$$y' = \frac{\overbrace{7(3x^5 + 12)^6(15x^4 + 12)}^{u'}}{\underbrace{(3x^5 + 12)^7}_u}$$

10. Derivadas de funciones logarítmicas

Logaritmo de base a

La derivada de un logaritmo de base a aplicado a una función u es igual a la derivada de u entre u por logaritmo natural (ln) de la base (a).

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u \cdot \ln a}$$

$$y = \log_{10}(3x + 10)$$

$$y' = \frac{\frac{u'}{3}}{(3x + 10) \ln 10}$$

$$w = \log_2 24x^3$$

$$w' = \frac{(24)3x^{3-1}}{24x^3 \cdot \ln 2} = \frac{72x^2}{24x^3 \cdot \ln 2}$$

Aplicar propiedad $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$

$$w' = \frac{\cancel{3 \cdot 24}}{\cancel{24} x^{3-2} \cdot \ln 2}$$

$$w' = \frac{3}{x \cdot \ln 2}$$

Otra manera de resolver este tipo de derivadas es usando la propiedad de los logaritmos que nos permite quitar exponentes del argumento.

$$t = \log_{18} 15x^{12}$$

Aplica r propiedad $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$$t' = 12 \log_{18} 15x$$

Sacar la constante $\frac{d}{dx}(cu) = c \cdot \frac{du}{dx}$

$$t' = 12 \frac{d}{dx} \log_{18} 15x$$

$$t' = 12 \left(\frac{\frac{u'}{15}}{\cancel{15}x \cdot \ln 18} \right)$$

$$t' = 12 \left(\frac{1}{x \cdot \ln 18} \right) = \frac{12}{x \cdot \ln 18}$$

Logaritmo de base e (Logaritmo natural/Logaritmo neperiano)

La derivada de un logaritmo natural (o logaritmo neperiano) es el cociente de la derivada del argumento del logaritmo dividido entre la función del argumento.

$$\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$y = \arcsin(2x)$$

$$y' = \frac{\frac{v'}{2}}{\sqrt{1-(2x)^2}}$$

Factorizar por diferencia de cuadrados tenga en cuenta que $1^2 = 1$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1^2 - (2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1+2x)(1-2x)}}$$

Arcocoseno

$$\frac{d}{dx}(\arccos v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$y = (\arccos(8x+4))$$

$$y' = -\frac{\frac{v'}{8}}{\sqrt{1-(8x+4)^2}}$$

Factorizar por diferencia de cuadrados, tenga en cuenta que $1^2 = 1$

$$y' = -\frac{8}{\sqrt{1^2 - (8x + 4)^2}} = -\frac{8}{\sqrt{[1 + (8x + 4)][1 - (8x + 4)]}}$$

$$y' = -\frac{8}{\sqrt{[1 + 8x + 4][1 - 8x - 4]}} = -\frac{8}{\sqrt{[8x + 5][-8x - 3]}}$$

$$y' = -\frac{8}{\sqrt{[1 + 8x + 4][1 - 8x - 4]}} = -\frac{8}{\sqrt{[8x + 5][-8x - 3]}}$$

Arcotangente

$$\frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}$$

$$y = \arctan(5x^3)$$

$$y' = \frac{\frac{v'}{(3)5x^{3-1}}}{1 + (5x^3)^2} = \frac{15x^2}{1 + (5x^3)^2}$$

Aplicar propiedad $(ab)^n = a^n b^n$

$$y' = \frac{15x^2}{1 + (5^2)(x^3)^2}$$

Aplicar propiedad $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$$y' = \frac{15x^2}{1 + 25x^6}$$

Arcocotangente

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,ctg} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}$$

$$y = \operatorname{arc\,ctg}(\sqrt[5]{x})$$

Reescribir el argumento; es más fácil trabajar con exponentes

$$\text{Aplicar propiedad } \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$y = \operatorname{arc\,ctg}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)$$

Derivar

$$y' = -\frac{\overset{v'}{\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}}}{1+\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2} = -\frac{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{1+\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2}$$

$$\text{Aplicar propiedad } (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$y' = -\frac{\frac{x^{-\frac{4}{5}}}{5}}{1+x^{\frac{1}{5} \cdot 2}} = -\frac{\frac{x^{-\frac{4}{5}}}{5}}{1+x^{\frac{2}{5}}}$$

$$\text{Aplicar ley de sándwich } \frac{x^{\frac{m}{n}}}{a} = \frac{1}{a \cdot x^{\frac{m}{n}}}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}}{1+x^{\frac{2}{5}}} = -\frac{\frac{1}{\left[5x^{\frac{4}{5}}\right]}}{\frac{\left[1+x^{\frac{2}{5}}\right]}{1}}$$

Aplicar ley de sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$y' = -\frac{1}{\left[5x^{\frac{4}{5}}\right]\left[1+x^{\frac{2}{5}}\right]}$$

Aplicar propiedad $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$y' = -\frac{1}{\left[5\sqrt[5]{x^4}\right]\left[1+\sqrt[5]{x^2}\right]}$$

Arcosecante

$$\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

$$y = \arcsin(\ln 8x^2)$$

$$y' = \frac{\frac{8}{8x} \leftarrow v'}{\ln 8x \sqrt{(\ln 8x)^2 - 1}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln 8x \sqrt{(\ln 8x)^2 - 1}} = \frac{\frac{1}{(x)}}{\frac{(\ln 8x \sqrt{(\ln 8x)^2 - 1})}{1}}$$

Aplicar ley de sándwich $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$y' = \frac{1}{(x)(\ln 8x \sqrt{(\ln 8x)^2 - 1})}$$

Aplicar propiedad $(\ln x)^n = \ln^n x$

$$y = \frac{1}{x \ln 8x \sqrt{\ln^2 8x - 1}}$$

Arcocosecante

$$\frac{d}{dx} (\arcsin v) = - \frac{\frac{dv}{dx}}{v \sqrt{v^2 - 1}}$$

$$y = \arcsin e^{3x^2}$$

$$y' = - \frac{\frac{v'}{e^{3x^2} (2) 3x^{2-1}}}{e^{3x^2} \sqrt{(e^{3x^2})^2 - 1}} = - \frac{e^{3x^2} (6x)}{e^{3x^2} \sqrt{(e^{3x^2})^2 - 1}} = - \frac{(6x)}{\sqrt{(e^{3x^2})^2 - 1}}$$

Aplicar propiedad $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$$y' = -\frac{(6x)}{\sqrt{e^{3x^2 \cdot 2} - 1}} = -\frac{(6x)}{\sqrt{e^{6x^2} - 1}}$$

Arccoversen

$$\frac{d}{dx}(\text{arc vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}$$

$$y = \text{arc vers } (\ln 4x^3)$$

$$y' = \frac{\frac{(3)4x^{3-1}}{4x^3}}{\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{12x^2}{4x^3}}{\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}}$$

Aplicar propiedad $\frac{ax^n}{x^m} = \frac{a}{x^{m-n}}$

$$y' = \frac{\frac{\cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}x^{3-2}}}{\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}} = \frac{\frac{3}{x}}{\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{3}{x}}{\left[\frac{\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}}{1} \right]}$$

Aplicar ley de sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

$$y' = \frac{3}{x\sqrt{2(\ln 4x^3) - (\ln 4x^3)^2}}$$

Factorizar por término común

$$y' = \frac{3}{x\sqrt{(\ln 4x^3)[2 - (\ln 4x^3)^{2-1}]}} = \frac{3}{x\sqrt{(\ln 4x^3)[2 - (\ln 4x^3)]}}$$

Aplicar propiedad

$$y' = \frac{3}{x\sqrt{(3\ln 4x)[2 - (3\ln 4x)]}}$$

Máximos y mínimos

Los máximos y mínimos en una función son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma la función, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo su dominio (extremos absolutos).

Una particularidad es que después de un máximo o un mínimo la gráfica cambia de dirección.

Para calcular los máximos y mínimos hacemos uso de la primera y segunda derivada de la función.

Las funciones de segundo grado tienen un máximo (si x^2 es negativo) o un mínimo (si x^2 es positivo). Estos puntos coinciden con el vértice de la parábola.

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

Criterio de la primera derivada:

- Si $f'(x) > 0$ la función posee un máximo.
- Si $f'(x) < 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f'(x) = 0$ la función no posee máximo ni mínimo.

Derivamos la función

$$f'(x) = 2x + 4$$

Igualamos la derivada de la función a 0

$$2x + 4 = 0$$

Hallar el valor

$$2x = -4$$

$$x = -\frac{4}{2}$$

$$x = -2 \quad \leftarrow \text{Punto crítico, la función posee un mínimo}$$

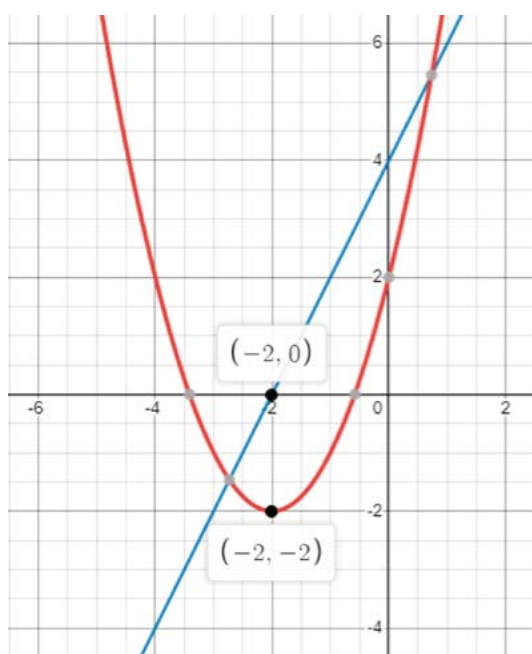
Para saber dónde se ubica el máximo o mínimo reemplazamos el valor anterior en la función original:

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2$$

$$f(-2) = 4 - 8 + 2$$

$$f(-2) = -2$$

Mínimo $(-2, -2)$



Note la relación función – derivada, donde la derivada corta al eje x , se encuentra el mínimo.

De izquierda al punto crítico, la ecuación es decreciente, del punto crítico a la derecha, la ecuación es creciente.

Criterio de la primera derivada – Función creciente o decreciente:

- Si $f'(x)$ **cambia de + a –** la función posee un máximo.
- Si $f'(x)$ **cambia de – a +** la función posee un mínimo.
- Si $f'(x)$ **no cambia de signo**, el punto crítico no es máximo ni mínimo.

Derivamos la función

$$f'(x) = 2x + 4$$

Igualamos la derivada de la función a 0

$$2x + 4 = 0$$

Despejamos x

$$2x = -4$$

$$x = -\frac{4}{2}$$

$$x = -2 \leftarrow \text{Punto crítico, debe ser evaluado}$$

Elegir un valor antes y un valor después al punto crítico

$$x = -3, \quad x = -1$$

Evaluar los valores anteriores en la derivada de la función y revisar signo del resultado

$$f'(-3) = 2(-3) + 4 = -6 + 4$$

$$f'(-3) = -2 (-)$$

$$f'(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4$$

$$f'(-1) = 2 (+)$$

$f'(x)$ pasa de $-$ a $+$, por lo tanto -2 es un mínimo.

La función se divide en dos intervalos:

$$(-\infty, -2)$$

$$(2, \infty)$$

Para saber en qué intervalo la función es creciente y cuál decreciente, tomaremos dos valores que estén incluidos en ambos intervalos y los evaluaremos en la derivada de la función.

$$(-\infty, -2) \rightarrow -5$$

$$(2, \infty) \rightarrow 4$$

Nos fijaremos solamente en los signos, si el signo es $-$ el intervalo es **decreciente**; si el signo es $+$ el intervalo es **creciente**.

$$f'(-5) = 2(-5) + 4 = -10 + 4$$

$$f'(-5) = -6$$

$$f'(4) = 2(4) + 4 = 8 + 4$$

$$f'(4) = +12$$

Por lo tanto

$$(-\infty, -2) \rightarrow \text{Decreciente}$$

$$(2, \infty) \rightarrow \text{Creciente}$$

Criterio de la segunda derivada:

- Si $f''(x) > 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f''(x) < 0$ la función posee un máximo.
- Si $f''(x) = 0$ no concluyente.

Derivamos la función (primera derivada)

$$f'(x) = 2x + 4$$

Derivamos nuevamente la función (segunda derivada)

$$f''(x) = 2$$

Igualemos la primera derivada a 0

$$2x + 4 = 0$$

Hallar el valor de x

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

Evaluamos el resultado obtenido en la segunda derivada

$$f''(2) = 2 \leftarrow \text{La función posee un mínimo}$$

En ambos criterios, lo que nos interesa más que el resultado final es el signo del resultado. Curiosamente, pareciera que los enunciados del criterio de la primera derivada están al revés en el criterio de la segunda derivada.

$$f(x) = -2x^2 + 7x - 5$$

Criterio de la primera derivada:

- Si $f'(x) > 0$ la función posee un máximo.
- Si $f'(x) < 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f'(x) = 0$ la función no posee máximo ni mínimo.

Derivamos la función

$$f'(x) = -4x + 7$$

Igualemos la derivada de la función a 0

$$-4x + 7 = 0$$

Hallar el valor de x

$$-4x = 7$$

$$x = -\frac{7}{4}$$

$x = 1.75$ ← Punto crítico, la función posee un máximo.

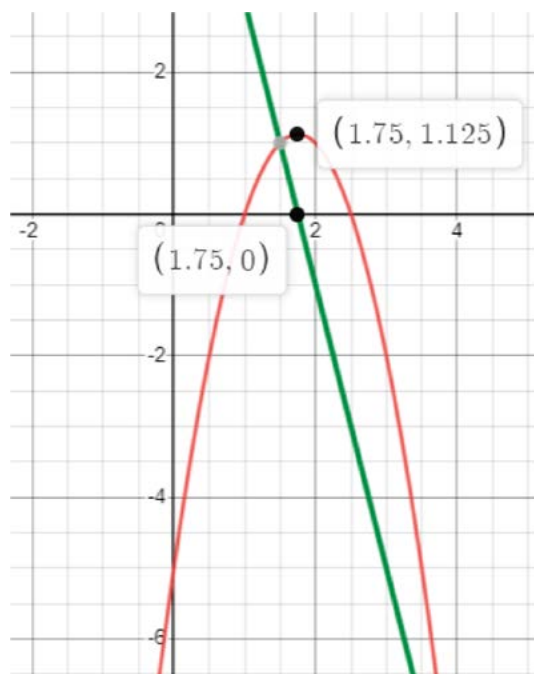
Obtener las coordenadas del máximo o mínimo

$$f(1.75) = -2(1.75)^2 + 7(1.75) - 5$$

$$f(1.75) = -2(3.0625) + 12.25 - 5 = -6.125 + 12.25 - 5$$

$$f(1.75) = 1.125$$

Máximo (1.75, 1.125)



Criterio de la segunda derivada:

- Si $f''(x) > 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f''(x) < 0$ la función posee un máximo.
- Si $f''(x) = 0$ no concluyente.

Derivamos la función (primera derivada)

$$f'(x) = -4x + 7$$

Derivamos nuevamente la función (segunda derivada)

$$f''(x) = -4$$

Igualamos la primera derivada a 0

$$-4x + 7 = 0$$

Hallar el valor de x

$$-4x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-4}$$

$$x = 1.75$$

Evaluamos el resultado obtenido en la segunda derivada

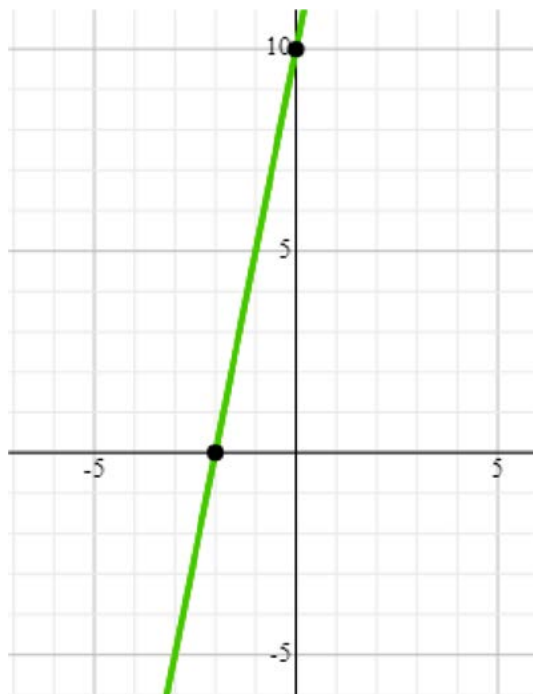
$$f''(1.75) = -4 \quad \leftarrow \text{la función posee un máximo}$$

Las funciones lineales no poseen máximos ni mínimos

$$f(x) = 5x + 10$$

$$f'(x) = 5$$

$$f''(x) = 0 \quad \leftarrow \text{la función no posee máximo ni mínimo}$$



Las funciones cúbicas se caracterizan por poseer un máximo y un mínimo

$$2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$$

Criterio de la primera derivada:

- Si $f'(x) > 0$ la función posee un máximo.
- Si $f'(x) < 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f'(x) = 0$ la función no posee máximo ni mínimo.

Derivamos la función

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Igualamos la derivada de la función a 0

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

Hallar los valores de x

$$\frac{6x^2 + 6x - 12}{6} = \frac{0}{6}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2 \quad \leftarrow \text{Punto crítico, la función posee un mínimo}$$

$$x_2 = 1 \quad \leftarrow \text{Punto crítico, la función posee un máximo}$$

Obtener las coordenadas del máximo y mínimo

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 3$$

$$f(-2) = 2(-8) + 3(4) + 24 + 3$$

$$f(-2) = -16 + 12 + 24 + 3$$

$$f(-2) = 23$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 3$$

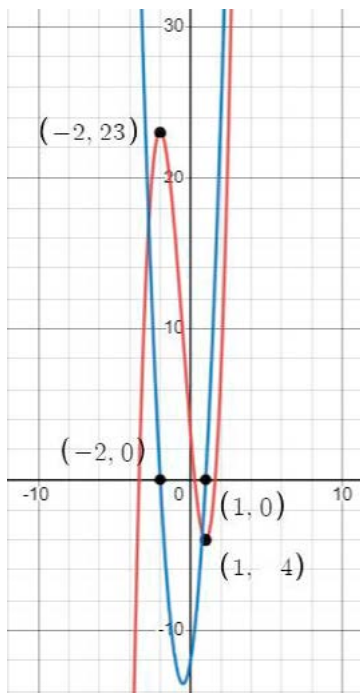
$$f(1) = 2(1) + 3(1) - 12 + 3$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + 3$$

$$f(1) = -4$$

Mínimo $(-2, 23)$

Máximo $(1, -4)$



Criterio de la segunda derivada:

- Si $f''(x) > 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f''(x) < 0$ la función posee un máximo.
- Si $f''(x) = 0$ no concluyente.

Derivamos la función (primera derivada)

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Derivamos nuevamente la función (segunda derivada)

$$f''(x) = 12x + 6$$

Igualemos la primera derivada a 0

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

Hallar los valores de x

$$\frac{6x^2 + 6x - 12}{6} = \frac{0}{6}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

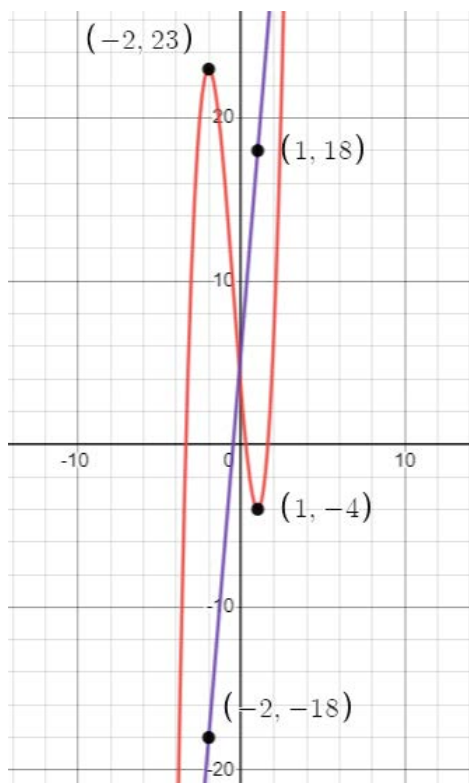
Evaluamos los resultados obtenidos en la segunda derivada

$$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -24 + 6$$

$$f''(-2) = -18 \leftarrow \text{La función posee un máximo}$$

$$f''(1) = 12(1) + 6 = 12 + 6$$

$$f''(1) = 18 \leftarrow \text{La función posee un mínimo}$$



El valor de x es positivo justo donde se encuentra el mínimo, así también el valor de x es negativo justo donde se encuentra el máximo.

$$x^3 + 2x^2 - 24x$$

Criterio de la primera derivada:

- Si $f'(x) > 0$ la función posee un máximo.
- Si $f'(x) < 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f'(x) = 0$ la función no posee máximo ni mínimo.

Derivamos la función

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 24$$

Igualamos la derivada de la función a 0

$$3x^2 + 4x - 24 = 0$$

Hallar los valores de x

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$c = -24$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-24)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 288}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{304}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 17.43}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 17.43}{6} = \frac{13.43}{6}$$

$$x_1 = 2.23 \leftarrow \text{Punto crítico. La función posee un máximo.}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 17.43}{6} = \frac{-21.43}{6}$$

$$x_2 = -3.57 \leftarrow \text{Punto crítico. La función posee un mínimo.}$$

Obtener las coordenadas del máximo y mínimo

$$f(2.23) = (2.23)^3 + 2(2.23)^2 - 24(2.23)$$

$$f(2.23) = 11.08 + 2(4.97) - 53.52$$

$$f(2.23) = 9.94 - 42.44$$

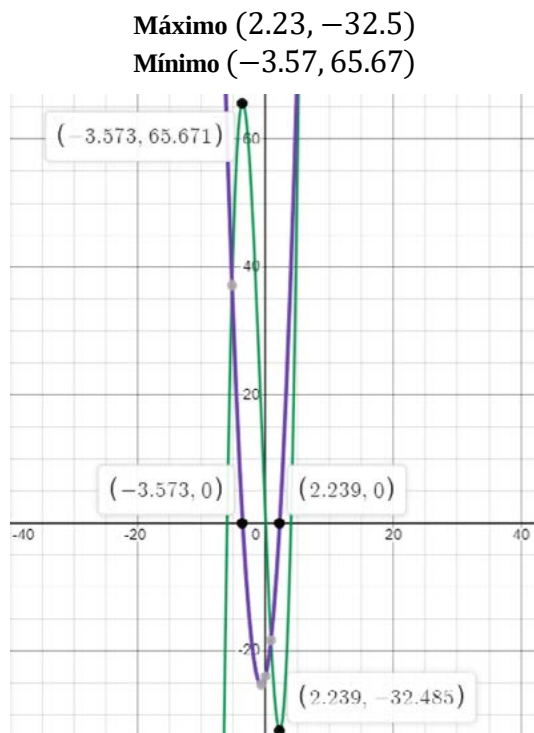
$$f(2.23) = -32.5$$

$$f(-3.57) = (-3.57)^3 + 2(-3.57)^2 - 24(-3.57)$$

$$f(2.23) = -45.49 + 2(12.74) + 85.68$$

$$f(2.23) = 25.48 + 40.19$$

$$f(2.23) = 65.67$$

**Criterio de la segunda derivada:**

- Si $f''(x) > 0$ la función posee un mínimo.
- Si $f''(x) < 0$ la función posee un máximo.
- Si $f''(x) = 0$ no concluyente.

Derivamos la función (primera derivada)

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 24$$

Derivamos nuevamente la función (segunda derivada)

$$f''(x) = 6x + 4$$

Igualamos la primera derivada a 0

$$3x^2 + 4x - 24 = 0$$

Hallar los valores de x

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$c = -24$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-24)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 288}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{304}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 17.43}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 17.43}{6} = \frac{13.43}{6}$$

$$x_1 = 2.23$$

$$x_2 = \frac{-4 - 17.43}{6} = \frac{-21.43}{6}$$

$$x_2 = -3.57$$

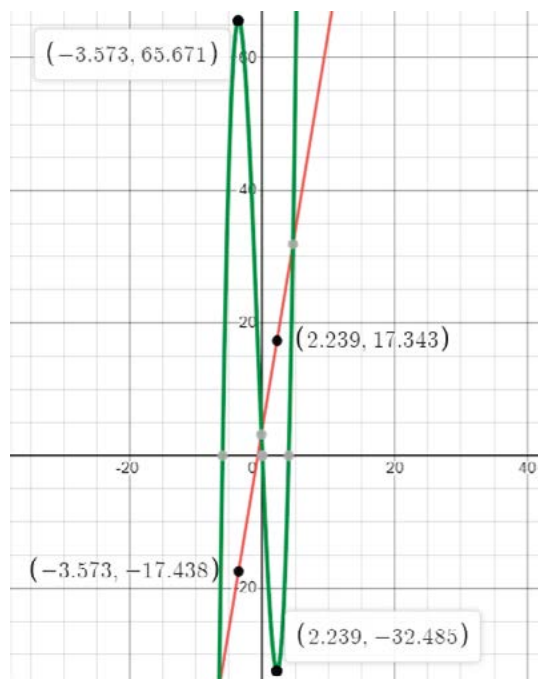
Evaluamos los resultados obtenidos en la segunda derivada

$$f''(2.23) = 6(2.23) + 4 = 13.38 + 4$$

$$f''(2.23) = 17.38 \leftarrow \text{La función posee un mínimo.}$$

$$f''(-3.57) = 6(-3.57) + 4 = -21.42 + 4$$

$$f''(-3.57) = -17.42 \leftarrow \text{La función posee un máximo.}$$



Puntos de inflexión y sentido de concavidad

Los puntos de inflexión son aquellos puntos donde la función cambia de concavidad. Si en la gráfica la función pareciera ir de abajo hacia arriba, se dice que es cóncava hacia arriba (o simplemente cóncava); en cambio, si pareciera ir de arriba hacia abajo, se dice que es cóncava hacia abajo (o convexa).

Una manera de visualizar los puntos de inflexión es que, si al trazar la gráfica de una función la realizamos en un solo trazo, la función no posee puntos de inflexión, pero si la gráfica la realizamos en dos o más trazos, cambiamos el sentido del movimiento de la muñeca (esto coincide con el sentido de concavidad), la función poseerá puntos de inflexión.

Para hallar los puntos de inflexión hacemos uso de la segunda derivada, ya que donde esta corta al eje x , se encuentre el punto de inflexión.

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 29$$

Para hallar los puntos de inflexión y sentido de concavidad:

1. Obtener la segunda derivada de la función

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

2. Igualar la segunda derivada a 0

$$6x - 18 = 0$$

3. Hallar el valor de x

$$6x = 18$$

$$x = \frac{18}{6}$$

$$x = 3 \longleftarrow \text{Punto de inflexión}$$

4. Obtener la coordenada del punto de inflexión

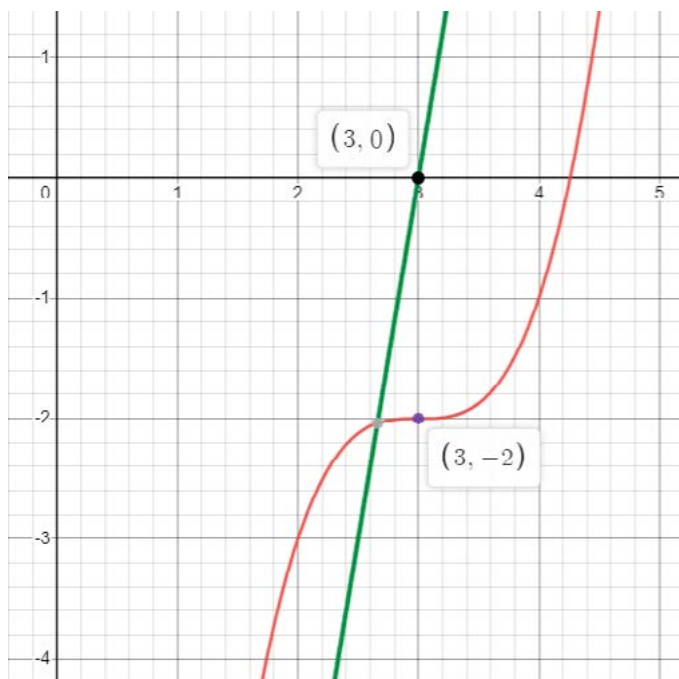
$$f(3) = (3)^3 - 9(3)^2 + 27(3) - 29$$

$$f(3) = 27 - 9(9) + 81 - 29$$

$$f(3) = 27 - 81 + 81 - 29$$

$$f(3) = -2$$

Punto de inflexión $(3, -2)$



Note que la derivada corta al eje x justo donde se encuentra el punto de inflexión.

5. Para encontrar el sentido de concavidad, tomar un valor antes y un valor después del punto de inflexión, evaluar ambos valores en la segunda derivada:
 - Si $f''(x) > 0$ cóncava hacia arriba (convexa).
 - Si $f''(x) < 0$ cóncava hacia abajo.
 - Si $f''(x) = 0$ punto de inflexión.

$$x = 2 \quad x = 4$$

$$f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18$$

$$f''(2) = -6 \text{ (Cóncava)}$$

$$f''(4) = 6(4) - 18 = 12 - 18$$

$$f''(4) = +6 \text{ (Convexa)}$$

6. Escribir los intervalos de concavidad

$$(-\infty, 3), (3, \infty)$$

$$x^4 - 4x^2 + 4$$

1. Obtener la segunda derivada de la función

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

2. Igualar la segunda derivada a 0

$$12x^2 - 8 = 0$$

3. Hallar el valor de x

$$\frac{12x^2 - 8}{2} = \frac{0}{2}$$

$$6x^2 - 4 = 0$$

$$6x^2 = 4 \quad \leftarrow \text{Punto de inflexión}$$

$$x^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \leftarrow \text{Puntos de inflexión}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.81$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -0.81$$

4. Obtener coordenadas de los puntos de inflexión

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 4$$

$$f(0.81) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 4$$

$$f(0.81) = \frac{4}{9} - 4\left(\frac{6}{9}\right) + \frac{36}{9}$$

$$f(0.81) = \frac{40}{9} - \frac{24}{9}$$

$$f(0.81) = \frac{16}{9}$$

$$f(0.81) = 1.77$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 - 4\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 4$$

$$f(-0.81) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 4$$

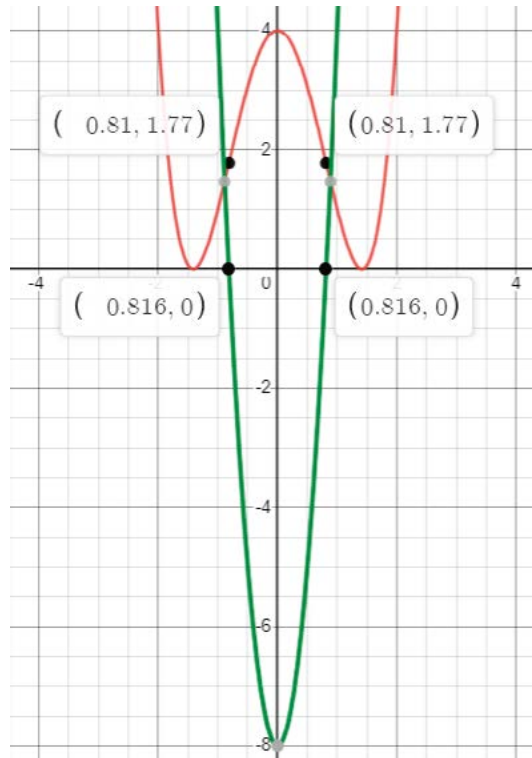
$$f(-0.81) = \frac{4}{9} - 4\left(\frac{6}{9}\right) + \frac{36}{9}$$

$$f(-0.81) = \frac{40}{9} - \frac{24}{9}$$

$$f(-0.81) = \frac{16}{9}$$

$$f(-0.81) = 1.77$$

Puntos de inflexión $(-0.81, 1.77), (0.81, 1.77)$



5. Encontrar el sentido de concavidad, elegir un valor antes y valor después de cada punto de inflexión
- Si $f''(x) > 0$ cóncava hacia arriba (convexa).
 - Si $f''(x) < 0$ cóncava hacia abajo.
 - Si $f''(x) = 0$ punto de inflexión.

Del primer punto de inflexión

$$x = -1 \quad x = 0$$

$$f''(-1) = 12(-1)^2 - 8 = 12(1) - 8 = 12 - 8$$

$$f''(-1) = +4 \text{ (Convexa)}$$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 8 = 0 - 8$$

$$f''(0) = -8 \text{ (Cóncava)}$$

Del segundo punto de inflexión

$$x=0 \quad x=1$$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 8 = 0 - 8$$

$$f''(0) = -8 \text{ (Cóncava)}$$

$$f''(1) = 12(1)^2 - 8 = 12 - 8$$

$$f''(1) = +4 \text{ (Convexa)}$$

Note que un mismo punto se encuentra entre los dos puntos de inflexión

6. Escribir los intervalos de concavidad

$$(-\infty, -0.81), (-0.81, 0.81), (0.81, \infty)$$

Capítulo 3

Cálculo integral

Integrales indefinidas

La integral indefinida de una función se refiere a la integral que no es evaluada con ningún límite y es expresada como una función de x e incluye una constante de integración.

1. Integral de una 0

La integral de cero es igual a una constante cualquiera, ya que la derivada (procedimiento inverso) de una constante es cero.

$$\int 0 \, dx = C$$

2. Integral de una constante

La integral de una constante es igual al producto de dicha constante por la variable más la constante de integración.

$$\int a \, dx = ax + C$$

$$\int 2 \, dx = 2x \quad \int -5 \, dx = -5x \quad \int \frac{2}{3} \, dx = \frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$$

$$\int -\frac{3}{7} \, dx = -\frac{3}{7}x = -\frac{3x}{7} \quad \int n \, dx = nx \quad \int -t \, dx = -tx$$

$$\int 1 \, dx = \int dx = x$$

3. Integral de una potencia

La integral de x elevado a una potencia es igual a x elevado a la potencia más uno y dividido por la potencia más uno, más la constante de integración.

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2} + C \quad \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + C$$

Las constantes pueden salir de la integral

$$\int 8x^3 dx = 8 \int x^3 dx = 8 \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{8x^4}{4} = 2x^4 + C$$

$$\int \frac{x^5}{3} dx = \int \frac{1}{3} x^5 dx = \frac{1}{3} \int x^5 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^6}{6} = \frac{x^6}{18} + C$$

Potencia en el denominador

Para este tipo de problemas usamos la propiedad $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, después de integrarr nos quedará otro exponente negativo, por lo cual deberemos usar la propiedad anterior al revés $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

Recuerda que si el numerado es diferente de 1 al aplicar la propiedad, este multiplicara a x^n .

$$\int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = 3 \int x^{-4} dx = 3 \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{3x^{-3}}{-3} = -x^{-3} = -\frac{1}{x^3} + C$$

Si la x^n va acompañada de un coeficiente, podemos separar la expresión en dos fracciones dejando $\frac{1}{x^n}$ la otra expresión saldrá fuera de la integral.

$$\int \frac{2}{3x^3} dx = \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \frac{2}{3} \int x^{-3} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{2x^{-2}}{-6} + C$$

Al aplicar la propiedad de regreso, en el numerador quedará solo el coeficiente que acompaña a x^{-n}

$$\frac{2x^{-2}}{-6} = -\frac{2}{6x^2} = -\frac{1}{3x^2} + C$$

En este caso, el numerador es un polinomio; al aplicar la propiedad, todo el denominador debe considerarse un único factor, esto evitará confusiones. Recuerda que la integral es con respecto de

$$\begin{aligned} \int \frac{2a+1}{x^8} dx &= \int x^{-8}(2a+1) dx = (2a+1) \int x^{-8} dx = (2a+1) \frac{x^{-8+1}}{-8+1} \\ (2a+1) \frac{x^{-8+1}}{-8+1} &= \frac{(2a+1)x^{-7}}{-7} = \frac{2a+1}{-7x^7} = \frac{-2a+1}{7x^7} + C \end{aligned}$$

Potencia fraccionaria

Para resolver este tipo de ejercicios, hacemos uso de la propiedad $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, al integrar, nos quedará otro exponente fraccionario (con el mismo denominador) por lo que haremos de la propiedad anterior de regreso $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$$

Este tipo de problemas hace uso de otra propiedad:

- Ley del sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

Así mismo podemos usar esta propiedad

$$\blacksquare x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

$$\begin{aligned} \int 5\sqrt[3]{x} \, dx &= 5 \int \sqrt[3]{x} \, dx = 5 \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = 5 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{5x^{\frac{1}{3}} \cdot x}{\frac{4}{3}} = \frac{5x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{15x^{\frac{4}{3}}}{4} \\ &= 3 \frac{5x^{\frac{4}{3}}}{4} + C \end{aligned}$$

En este ejemplo evitaremos tener que usar la ley del sándwich

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt[5]{x^3}}{7} \, dx &= \int \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{2}{7} \int x^{\frac{3}{5}} \, dx = \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{3}{5}+1} \cdot \left(\frac{3}{5}+1\right) = \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{8}{5}} \cdot x \cdot \left(\frac{8}{5}\right) \\ &= \frac{16}{35} x^{\frac{8}{5}} + C \end{aligned}$$

Potencia fraccionaria en el denominador

En este caso haremos uso de las mismas propiedades de los casos pasados; básicamente es la combinación de estos, quedándonos, pues

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} = x^{-\frac{n}{m}}$$

Y para los casos donde usemos constantes $\frac{a}{b \cdot \sqrt[n]{x^m}} = \frac{a}{b \cdot x^{\frac{n}{m}}} = \frac{a \cdot x^{-\frac{n}{m}}}{b}$

Una particularidad de este caso es que el exponente fraccionario que nos quedará será un exponente fraccionario propio de la misma base (si el exponente fraccionario originalmente es propio).

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C$$

En este ejemplo evitaremos usar la ley el sándwich

$$\int \frac{3}{4\sqrt[7]{x^2}} dx = \int \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{7}}} dx = \frac{3}{4} \int x^{-\frac{2}{7}} dx = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{2}{7}+1} \cdot \left(-\frac{2}{7}+1\right) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{5}{7}} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{5}{7}} \cdot \left(\frac{5}{7}\right) = \frac{15x^{\frac{5}{7}}}{28} = \frac{15\sqrt[7]{x^5}}{28} + C$$

Potencia casi inmediata

Este caso se caracteriza por usar la propiedad $x^n + x^m = x^{n+m}$ o bien $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ en cualquiera de los casos anteriores.

$$\int x\sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$$

Si bien el ejemplo puede quedar hasta ahí, la raíz puede simplificarse, a partir del exponente fraccionario, y luego aplicar la propiedad $x^{n \cdot m} = x^n + x^m$

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{2x^{2\frac{1}{2}}}{5} = \frac{2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{5} = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + C$$

$$\int \frac{x^5}{x^2} dx = \int x^{5-2} dx = \int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{5x^2}{9x^6} dx = \int \frac{5}{9} x^{2-6} dx = \frac{5}{9} \int x^{-4} dx = \frac{5}{9} \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{5}{9} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{-3x^3} = -\frac{5}{27} x^3 + C$$

Otra propiedad que podríamos usar es $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$$\int 3\sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{x^2} dx = 3 \int \sqrt[5]{x^3 \cdot x^2} = 3 \int \sqrt[5]{x^6} dx = 3 \int x^{\frac{6}{5}} dx$$

$$3 \int x^{\frac{6}{5}} dx = 3x^{\frac{6}{5}+1} \cdot \left(\frac{6}{5} + 1\right) = 3x^{\frac{11}{5}} \cdot \left(\frac{11}{5}\right) = \frac{33x^{\frac{11}{5}}}{5} = \frac{33x^{2\frac{1}{5}}}{5} = \frac{33x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{5}$$

$$\frac{33x^2 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{5} = \frac{33x^{2\frac{1}{5}}}{5} + C$$

4. Integral de suma – resta

La integral de la suma (o diferencia) de dos o más funciones es igual a la suma de integrales de cada función por separado, más la constante de integración.

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm h(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \int h(x) dx$$

$$\int (5 + 17x - 10x^3) dx = \int 5 dx + \int 17x dx - \int 10x^3 dx = 5x + \frac{17x^2}{2} - \frac{10x^4}{4} + C$$

$$\int (3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x^3} - 4\sqrt[7]{x^5}) dx = \int 3\sqrt[3]{x} dx + \int 4\sqrt[5]{x^3} dx - \int 2\sqrt[7]{x^5} dx =$$

$$3 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 4 \int x^{\frac{3}{5}} dx - 2 \int x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{9x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{2} - \frac{7x^{\frac{12}{7}}}{6} + C$$

Suma – resta casi inmediata (fracción)

Este caso refiere a cuando una suma – resta de funciones está siendo dividida por una función de un solo término.

Haremos uso principalmente de dos propiedades:

- $\frac{a \pm b \pm c}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} \pm \frac{c}{d}$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

En caso de una constante

- $\frac{a}{x^m} = a \cdot x^{-m}$

La fusión de todas estas propiedades resultará en:

$$\frac{x^t \pm x^s \pm c}{x^m} = x^{t-m} \pm x^{s-m} \pm c \cdot x^{-m}$$

$$\int \left(\frac{4x^5 - 6x + 10}{2x^3} \right) dx = \int \left(\frac{4x^5}{2x^3} - \frac{6x}{2x^3} + \frac{10}{2x^3} \right) dx = \int (2x^{5-3} - 3x^{1-3} + 5x^{-3}) dx$$

$$\int (2x^2 - 3x^{-2} + 5x^{-3}) dx = \int 2x^2 dx - \int 3x^{-2} dx + \int 5x^{-3} dx$$

$$2 \int x^2 dx - 3 \int x^{-2} dx + 5 \int x^{-3} dx = \frac{2x^3}{3} - \left(-\frac{3}{x} \right) + \left(-\frac{5}{2x^2} \right) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + C$$

Fracción casi inmediata

Existen casos en que el denominador posee dos o más partes; para ello debemos factorizar el numerador con el fin de eliminar al denominador.

$$\int \left(\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3} \right) dx$$

Factorizar por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, es decir dos números que sumados den el término lineal y multiplicados el término independiente.

$$\int \left[\frac{(x+4)(x+3)}{(x+3)} \right] dx = \int (x+4) dx = \int x dx + \int 4 dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

$$\int \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

Aunque no parezca, el numerador es más grande que el denominador, en este caso, al estar x elevado a un exponente mayor a 2, usaremos división sintética.

$$\begin{array}{r}
 x-1 \\
 x^2+x+1 \overline{) x^3-1} \\
 \underline{-x^3-x^2-x} \\
 -x^2-x-1 \\
 \underline{+x^2+x+1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\int \left[\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)} \right] dx = \int (x-1) dx = \int x dx - \int 1 dx = \frac{x^2}{2} - x + C$$

5. Integral de $\frac{1}{x}$

La integral de 1 entre x es igual al logaritmo natural de x

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

Este tipo de integral es sencillo, cualquier constante que acompañe a x puede salir de la integral.

$$\int \frac{2}{x} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{3x} dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|x| = \frac{\ln|x|}{3} + C$$

$$\int \frac{2}{7x} dx = \int \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{7} \int \frac{1}{x} dx = \frac{2}{7} \cdot \ln|x| = \frac{2\ln|x|}{7} + C$$

$$\int \frac{3a}{4bx} dx = \int \frac{3a}{4b} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{3a}{4b} \int \frac{1}{x} dx = \frac{3a}{4b} \cdot \ln|x| = \frac{3a \cdot \ln|x|}{4b} + C$$

La razón por la cual el logaritmo natural lleva $|x|$ (valor absoluto), es porque la derivada es una función (que deriva de otra) por lo cual le

podemos asignar cualquier valor a x , pero el logaritmo de un número negativo no existe, por lo que se toma su valor absoluto para evitar esto.

Note la siguiente integral, el **numerador** es la derivada del **denominador**

$$\int \frac{1}{x+2} dx$$

$$\frac{d}{dx}(x+2) = 1$$

Debido a esto, el logaritmo natural tomará como argumento todo el denominador; recuerda x solamente está elevado a 1 y además se acompaña de otro término

$$\int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{3}{x-5} dx = \int 3 \cdot \frac{1}{x-5} dx = 3 \int \frac{1}{x-5} = 3 \ln|x-5| + C$$

$$\int \frac{3}{4x-16} dx = \int 3 \cdot \frac{1}{x-5} dx = 3 \int \frac{1}{x-5} = 3 \ln|x-5| + C$$

En este otro ejemplo x posee un coeficiente; note que el **numerador** es la derivada del **denominador**

$$\int \frac{2}{2x+1} dx$$

$$\int \frac{2}{2x+1} dx = \ln|2x+1| + C$$

$$\int \frac{21}{7x+5} dx$$

Note que el **numerador** es múltiplo de la derivada del **denominador**

$$\int \frac{21}{7x+5} dx = \int \frac{3 \cdot 7}{7x+5} dx = 3 \int \frac{7}{7x+5} dx = 3 \ln|7x+5| + C$$

Para este ejemplo completaremos la derivada, ten en cuenta que:

$$a \cdot 1 = a \cdot \frac{y}{y} = \frac{ay}{y} = \frac{a}{y} \cdot y = a$$

$$\int \frac{2}{10x+5} dx$$

$$\int \frac{2}{10x+5} \cdot 1 dx = \int \frac{2}{10x+5} \cdot \frac{5}{5} dx = \int \frac{5(2)}{10x+5} \cdot \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} \int \frac{10}{10x+5} dx$$

$$\frac{1}{5} \int \frac{10}{10x+5} dx = \frac{1}{5} \ln|10x+5| = \frac{\ln|10x+5|}{5} + C$$

6. Integral de una división de funciones

Este tipo de integrales se basan en que el numerador es la derivada (o casi) del denominador, similar a lo que pasa en el apartado anterior. El denominador además posee un término independiente, el cual evita que se use la propiedad de la división de potencias de la misma base, pero por fortuna su derivada es 0.

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Note que el **numerador** es la derivada del **denominador**

$$\int \frac{20x}{10x^2+5} dx$$

$$\frac{d}{dx} 10x^2 + 5 = 20x$$

$$\int \frac{20x}{10x^2 + 5} dx = \ln|10x^2 + 5| + C$$

$$\int \frac{6x^2 + 5}{2x^3 + 5x - 20} dx = \ln|2x^3 + 5x - 20| + C$$

En este ejemplo, el numerador es casi la derivada del denominador; para ello completaremos la derivada, recuerda que:

$$a \cdot 1 = a \cdot \frac{y}{y} = \frac{ay}{y} = \frac{a}{y} \cdot y = a$$

$$\int \frac{6x^2}{8x^3 + 6} dx$$

$$\int \frac{6x^2}{8x^3 + 6} \cdot 1 dx = \int \frac{6x^2}{8x^3 + 6} \cdot \frac{4}{4} dx = \int \frac{(4)6x^2}{8x^3 + 6} \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{24x^2}{8x^3 + 6} dx =$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{24x^2}{8x^3 + 6} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|8x^3 + 6| = \frac{\ln|8x^3 + 6|}{4} + C$$

7. Integral de una función exponencial de base

La integral de una función exponencial de base a es igual a la misma función dividido entre el logaritmo natural de la base.

Este tipo de integrales tiene la peculiaridad de que su resultado incluye a la misma función por lo que una forma para resolver este tipo de integral, siempre que se pueda, es completando la derivada. Es decir, lograr que el problema incluya la función junto con su derivada.

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}$$

$$\int 2^x dx$$

Para resolver la integral, primero identificamos quien es a y quien es u

$$a = 2$$

$$u = x$$

Después obtenemos la derivada de u

$$\frac{du}{dx} = 1$$

Como el problema contiene a la función con su derivada, reemplazamos en la fórmula

$$\int 2^x (1) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Note como la solución incluye a la función original

$$\int 5^{3x} dx$$

Identificar a y u

$$a = 5$$

$$u = 3x$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 3x = 3$$

Completar derivada

$$\int 5^{3x} \cdot 1 dx = \int 5^{3x} \cdot \frac{3}{3} dx = \int 5^{3x} \cdot \frac{1}{3} (3) dx = \frac{1}{3} \int 5^{3x} (3) dx$$

$$\int 5^{3x} (3) dx = \frac{5^{3x}}{\ln 5}$$

Una característica de las funciones exponenciales es que a pesar de que su base sea constante, no podemos multiplicarla por otra constante, a menos de que sea de la misma base en cuyo caso solo los exponentes que acompañan a cada constante se ven afectados. Así también en este tipo de problemas podemos usar la siguiente propiedad:

$$a^{n \cdot m} = (a^n)^m = (a^m)^n$$

$$\frac{5^{3x}}{\ln 5} = \frac{(5^3)^x}{\ln 5} = \frac{125^x}{\ln 5} + C$$

Note que solo los exponentes se ven afectados, esto ya que una de las bases es afectada por x por lo cual no podemos multiplicar las bases como tal.

$$\int 2 \cdot 2^{5x} dx$$

$$\int 2^1 \cdot 2^{5x} dx = \int 2^{5x+1} dx$$

Identificar a y u

$$a = 2$$

$$u = 5x + 1$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 3x = 5$$

Completar derivada

$$\int 2^{5x+1} \cdot 1 dx = \int 2^{5x+1} \cdot \frac{5}{5} dx = \frac{1}{5} \int 2^{5x+1} (5) dx$$

$$\frac{1}{5} \int 2^{5x+1} (5) dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+1}}{\ln 2} = \frac{2^{5x+1}}{5 \ln 2} + C$$

$$\int 49 \cdot 7^{7x} dx$$

Note como transformamos el primer término en otro de la misma base que el segundo término

$$\int 7^2 \cdot 7^{7x} dx = \int 7^{7x+2} dx$$

Identificar a y u

$$a = 7$$

$$u = 7x + 2$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 7x + 2 = 7$$

Completar derivada

$$\int 7^{7x+2} \cdot 1 dx = \int 7^{7x+2} \cdot \frac{7}{7} dx = \frac{1}{7} \int 7^{7x+2} (7) dx$$

$$\frac{1}{7} \int 7^{7x+2} (7) dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{7^{7x+2}}{\ln 7} = \frac{7^{7x+2}}{7 \ln 7}$$

Similar a lo que ocurre al multiplicar una constante por otra igual pero elevada a x , al dividirlos solo se ven afectados los exponentes.

$$\frac{7^{7x+2}}{7^1 \ln 7} = \frac{7^{7x+2-1}}{\ln 7} = \frac{7^{7x+1}}{\ln 7} + C$$

$$\int \frac{3^x}{a^x} dx$$

Aplicar propiedad $\frac{a^x}{n^x} = \left(\frac{a}{n}\right)^x$

$$\int \frac{3^x}{a^x} dx = \int \left(\frac{3}{a}\right)^x dx$$

Identificar a y u

$$a = \frac{3}{a}$$

$$u = x$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} x = 1$$

$$\int \left(\frac{3}{a}\right)^x (1) dx = \frac{\left(\frac{3}{a}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{a}\right)}$$

Aplicar propiedad $\left(\frac{a}{n}\right)^x = \frac{a^x}{n^x}$ y ley de sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

$$\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{a}\right)} = \frac{\frac{3^x}{a^x}}{\frac{1}{\ln\left(\frac{3}{a}\right)}} = \frac{3^x}{a^x \cdot \ln\left(\frac{3}{a}\right)} + C$$

$$\int \frac{dx}{10^{7x+2}}$$

Para resolver este ejemplo, la función exponencial debe subir al denominador, los términos del exponente se ven afectados por el signo menos de la propiedad original de las potencias

$$\int 10^{-(7x+2)} dx = \int 10^{-7x-2} dx$$

Identificar a y u

$$a = 10$$

$$u = -7x - 2$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} - 7x - 2 = -7$$

Completar derivada

$$\begin{aligned} \int 10^{-7x-2} \cdot 1 dx &= \int 10^{-7x-2} \cdot \frac{-7}{-7} dx = -\frac{1}{7} \int 10^{-7x-2} \cdot (-7) dx \\ -\frac{1}{7} \int 10^{-7x-2} \cdot (-7) dx &= -\frac{1}{7} \cdot \frac{10^{-7x-2}}{\ln 7} = -\frac{10^{-7x-2}}{7 \ln 7} + C \end{aligned}$$

8. Integral de una función exponencial de base e

La integral de una función exponencial de base e es igual a la misma función.

Este tipo de integrales son aún más sencillas que las anteriores, ya que, al ser el resultado igual que la función original, solo debemos observar si el problema contiene a la función con su derivada.

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int e^{2x} dx$$

Identificar u

$$u = 2x$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 2x = 2$$

Completar derivada

$$\int e^{2x} \cdot 1 dx = \int e^{2x} \cdot \frac{2}{2} dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx$$

$$\frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx$$

Identificar u

$$u = \frac{x}{2}$$

Derivar

$$\frac{du}{dx} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Completar derivada

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{x}{2}} \cdot 1 dx &= \int e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{2}{2} dx = 2 \int e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \cdot dx \\ 2 \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \cdot dx &= 2e^{\frac{x}{2}} + C\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{e^{3x}} dx = \int (e^{3x})^{\frac{1}{2}} dx = \int e^{\frac{3x}{2}} dx$$

Identificar u

$$u = \frac{3x}{2}$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$$

Completar derivada

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{3x}{2}} \cdot 1 \cdot 1 &= \int e^{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \int e^{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \int \frac{3e^{\frac{3x}{2}}}{2} dx \\ \frac{2}{3} \int \frac{3e^{\frac{3x}{2}}}{2} dx &= \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{3x}{2}} = \frac{2e^{\frac{3x}{2}}}{3} \\ \frac{2e^{\frac{3x}{2}}}{3} &= \frac{\sqrt{e^{3x}}}{3} + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{4dx}{e^{2x}} = 4 \int \frac{dx}{e^{(2x)}} = 4 \int e^{-2x} dx$$

Identificar u

$$u = -2x$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} - 2x = -2$$

Completar derivada

$$\begin{aligned} 4 \int e^{-2x} \cdot 1 dx &= 4 \int e^{-2x} \cdot \frac{-2}{-2} dx = -\frac{1}{2} \cdot 4 \int e^{-2x} \cdot -2 dx \\ -\frac{1}{2} \cdot 4 \int e^{-2x} \cdot -2 dx &= -\frac{4}{2} \cdot e^{(-2x)} = -2 \cdot \frac{1}{e^{2x}} = -\frac{2}{e^{2x}} + C \end{aligned}$$

9. Integral de una función trigonométrica

Al igual que en las funciones exponenciales, este tipo de integrales pueden resolverse completando la derivada; cabe mencionar que esto solo es posible cuando el grado de la función es solamente de 1, ya que con grados más altos debe usarse algún método de integración como cambio de variable o sustitución trigonométrica.

Seno

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \sin(5x + 3) dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} 5x + 3 = 5$$

Completar derivada

$$\begin{aligned} \int \sin(5x + 3) \cdot \frac{5}{5} dx &= \frac{1}{5} \int \sin(5x + 3) 5 dx = \\ \frac{1}{5} \int \sin(5x + 3) 5 dx &= \frac{1}{5} \cdot -\cos(5x + 3) = -\frac{\cos(5x + 3)}{5} + C \end{aligned}$$

Coseno

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\cos(x^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{x}} dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Completar derivada

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{2} dx = 2 \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} dx \\ 2 \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} dx &= 2 \sin(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

Recuerde que lo que está en azul simplemente desaparece.

Tangente

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \tan(3x^2) x \, dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} 3x^2 = 6x$$

Completar derivada

$$\int \tan(3x^2) x \cdot \frac{6}{6} dx = \frac{1}{6} \int \tan(3x^2) x \cdot 6 dx = \frac{1}{6} \int \tan(3x^2) 6x \, dx$$

Aplicar identidad trigonométrica $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{1}{6} \int \frac{\sin(3x^2)}{\cos(3x^2)} 6x \, dx$$

La derivada de $\sin x$ es $\cos x \cdot x'$

$$\frac{1}{6} \int \frac{\sin(3x^2)}{\cos(3x^2)} 6x \, dx = \frac{1}{6} \cdot \ln|\sin(3x^2)| = \frac{\ln|\sin(3x^2)|}{6} + C$$

También,

$$\frac{1}{6} \int \frac{\sin(3x^2)}{\cos(3x^2)} 6x \, dx$$

La derivada de $\cos x$ es $-\sin x \cdot x'$ pero nos hace falta el signo negativo

$$\frac{1}{6}(-1) \int \frac{\sin(3x^2)}{\cos(3x^2)} \cdot (-1)6x \, dx$$

El signo negativo puede afectar a lo que queramos, en este caso al seno, pero también debe afectar a lo que está fuera de la integral

$$-\frac{1}{6} \int \frac{-\sin(3x^2)}{\cos(3x^2)} 6x \, dx = -\frac{1}{6} \ln|\cos(3x^2)| = -\frac{\ln|\cos(3x^2)|}{6} + C$$

Cotangente

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \cot\left(\frac{2}{3}x\right) \, dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} \frac{2}{3} x = \frac{2}{3}$$

Completar derivada

$$\int \cot\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \, dx = \frac{3}{2} \int \cot\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{2}{3} \, dx$$

$$\frac{3}{2} \int \cot\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{2}{3} \, dx$$

Aplicar identidad trigonométrica $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{3}{2} \int \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}x\right)} \cdot \frac{2}{3} \, dx$$

La derivada de es

$$\frac{3}{2} \int \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)}{\sin\left(\frac{2}{3}x\right)} \cdot \frac{2}{3} dx = \frac{3}{2} \cdot \ln \left| \sin\left(\frac{2}{3}\right) \right| = \frac{3 \ln \left| \sin\left(\frac{2}{3}\right) \right|}{2} + C$$

Secante

$$\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \frac{3x dx}{\cos(2x^2)} = 3 \int \frac{x dx}{\cos(2x^2)}$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} 2x^2 = 4x$$

Completar derivada

$$3 \int \frac{x dx}{\cos(2x^2)} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3 \int \frac{x dx}{\cos(2x^2)} \cdot 4 = \frac{3}{4} \int \frac{4x dx}{\cos(2x^2)}$$

Separar fracción $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$

$$\frac{3}{4} \int \frac{1}{\cos(2x^2)} \cdot 4x dx$$

Aplicar identidad trigonométrica $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$$\frac{3}{4} \int \sec(2x^2) \cdot 4x dx = \frac{3}{4} \cdot \ln |\sec(2x^2) + \tan(2x^2)|$$

$$\frac{3 \ln|\sec(2x^2) + \tan(2x^2)|}{4} + C$$

Cosecante

$$\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)\sqrt{x}}$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{6\sqrt{x}}$$

Completar derivada

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)\sqrt{x}} \cdot \frac{6}{6} = 6 \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{6} = 6 \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)6\sqrt{x}}$$

Separar fracción $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{c}$

$$6 \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)6\sqrt{x}} = 6 \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)} \cdot \frac{dx}{6\sqrt{x}}$$

Aplicar identidad trigonométrica $\frac{1}{\sin x} = \csc x$

$$6 \int \csc\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) \cdot \frac{dx}{6\sqrt{x}} = 6 \cdot -\ln \left| \csc\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) + \cot\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) \right|$$

$$-6 \ln \left| \csc\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) + \cot\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right) \right| + C$$

Secante al cuadrado

$$\int (\sec u)^2 du = \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \frac{\sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{3} dx = \frac{1}{3} \int \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

Completar derivada

$$\frac{1}{3} \int \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{2}{2} dx = \frac{1}{3} \int \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \int \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$\frac{2}{3} \int \sec^2\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{2}{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{3} + C$$

Cosecante al cuadrado

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(2x^3) - 1}$$

Aplicar identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(2x^3) - 1} = \int \frac{x^2 dx}{\sin^2(2x^3)}$$

Separar fracción $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot a$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sin^2(2x^3)} = \int \frac{1}{\sin^2(2x^3)} \cdot x^2 dx$$

Aplicar identidad trigonométrica $\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$

$$\int \frac{1}{\sin^2(2x^3)} \cdot x^2 dx = \int \csc^2(2x^3) \cdot x^2 dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} 2x^3 = 6x^2$$

Completar derivada

$$\int \csc^2(2x^3) \cdot x^2 \cdot \frac{6}{6} dx = \frac{1}{6} \int \csc^2(2x^3) \cdot 6x^2 dx$$

$$\frac{1}{6} \int \csc^2(2x^3) \cdot 6x^2 dx = \frac{1}{6} \cdot -\cot(2x^3) = -\frac{\cot(2x^3)}{6} + C$$

Secante por tangente

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \frac{\sin(3x) dx}{\cos^2(3x)} = \int \frac{\sin(3x) dx}{(\cos 3x)^2} = \int \frac{\sin(3x) dx}{\cos(3x) \cdot \cos(3x)}$$

Separar fracción $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{d} \cdot b$

$$\int \frac{\sin(3x)dx}{\cos(3x) \cdot \cos(3x)} = \int \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \cdot dx$$

Aplicar identidad trigonométrica $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

Aplicar identidad trigonométrica $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$$\int \tan(3x) \sec(3x) dx$$

$$\int \sec(3x) \tan(3x) dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} 3x = 3$$

Completar derivada

$$\int \sec(3x) \tan(3x) \cdot \frac{3}{3} dx = \frac{1}{3} \int \sec(3x) \tan(3x) \cdot 3dx = \frac{1}{3} \cdot \sec(3x) = \frac{\sec(3x)}{3} + C$$

Cosecante por cotangente

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$\int \frac{\csc\left(\frac{2}{7x^2}\right) \cot\left(\frac{2}{7x^2}\right)}{x^3} dx$$

Derivar argumento de la función trigonométrica

$$\frac{d}{dx} \frac{2}{7x^2} = -\frac{4}{7x^3}$$

Completar derivada

$$\begin{aligned} \int \frac{\csc\left(\frac{2}{7x^2}\right) \cot\left(\frac{2}{7x^2}\right)}{x^3} \cdot -\frac{4}{7} \cdot -\frac{7}{4} dx &= -\frac{7}{4} \int \frac{\csc\left(\frac{2}{7x^2}\right) \cot\left(\frac{2}{7x^2}\right)}{x^3} \cdot -\frac{4}{7} dx \\ -\frac{7}{4} \int \frac{\csc\left(\frac{2}{7x^2}\right) \cot\left(\frac{2}{7x^2}\right)}{x^3} \cdot -\frac{4}{7} dx &= -\frac{7}{4} \cdot -\csc\left(\frac{2}{7x^2}\right) = \frac{7 \csc\left(\frac{2}{7x^2}\right)}{4} + C \end{aligned}$$

10. Integrales que producen una función trigonométrica inversa

Este tipo de integrales se caracterizan por ser fracciones donde el denominador posee dos términos que tienen raíz cuadrada, además, el numerador contiene la derivada de la variable en cuestión, por lo que de igual manera podemos completar la derivada si es necesario.

Arcoseno

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}}$$

Identificar a^2 y u^2

$$a^2 = 25$$

$$u^2 = 4x^2$$

Obtener raíces cuadradas

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{25}$$

$$a = 5$$

$$\sqrt{u^2} = \sqrt{4x^2}$$

$$u = \sqrt{4}\sqrt{x^2}$$

$$u = 2x$$

Sustituir valores

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x}{5}\right) + C$$

Arcocoseno

La fórmula es la misma para el arcoseno, la diferencia radica en que el numerador (que es la derivada de u) lleva un signo negativo.

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arccos\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{-x dx}{\sqrt{49a^6 - 36x^4}}$$

Identificar a^2 y u^2

$$a^2 = 49a^6$$

$$u^2 = 36x^4$$

Obtener raíces cuadradas

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{49}\sqrt{a^6}$$

$$a = 7a^3$$

$$\sqrt{u^2} = \sqrt{36x^4}$$

$$u = \sqrt{36}\sqrt{x^4}$$

$$u = 6x^2$$

Obtener derivada de u

$$\frac{du}{dx} 6x^2 = 12x$$

Completar derivada

$$\int \frac{-x dx}{\sqrt{49a^6 - 36x^4}} \cdot \frac{12}{12} = \frac{1}{12} \int \frac{-12x dx}{\sqrt{49a^6 - 36x^4}}$$

Sustituir valores

$$\frac{1}{12} \int \frac{-12x dx}{\sqrt{49a^6 - 36x^4}} = \frac{1}{12} \arccos\left(\frac{6x^2}{7a^3}\right) = \frac{\arccos\left(\frac{6x^2}{7a^3}\right)}{12} + C$$

Arcotangente

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{4 + e^{4x}}$$

Identificar a^2 y u^2

$$a^2 = 4$$

$$u^2 = e^{4x}$$

Obtener raíces cuadradas

$$\sqrt{a^2} = 4$$

$$a = 2$$

$$\sqrt{u^2} = \sqrt{e^{4x}}$$

$$u = (e^{4x})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{4x}{2}}$$

$$u = e^{2x}$$

Sustituir valores

$$\int \frac{e^{2x} dx}{4 + e^{4x}} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) = \frac{\arctan\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)}{2} + C$$

Arcocotangente

$$\int \frac{-du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arccot\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \left(\frac{-1 + x}{1 + x^2}\right) dx$$

$$\text{Separar fracción } \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c \pm d} \pm \frac{b}{c \pm d}$$

$$\int \left(\frac{-1 + x}{1 + x^2}\right) dx = \int \frac{-1 dx}{1 + x^2} + \int \frac{x dx}{1 + x^2}$$

Primera integral

$$\int \frac{-dx}{1 + x^2} =$$

Identificar a^2 y u^2

$$a^2 = 1$$

$$u^2 = x^2$$

Obtener raíces cuadradas

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{1}$$

$$a = 1$$

$$\sqrt{u^2} = \sqrt{x^2}$$

$$u = x$$

Sustituir valores

$$\int \frac{-1 dx}{1+x^2} = \frac{1}{1} \arccot\left(\frac{x}{1}\right) = \arccot(x) + C$$

Segunda integral

$$\int \frac{x dx}{1+x^2}$$

Completar derivada

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2}$$

Aplicar fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln|u|$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| = \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$$

Juntar partes

$$\int \left(\frac{-1+x}{1+x^2} \right) dx = \arccot(x) + \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C$$

Arcosecante

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \left(\frac{u}{a} \right) + C$$

Este problema es interesante, ya que tenemos al mismo tiempo u y u^2

$$u = x^3 \rightarrow u^2 = (x^3)^2 = x^6$$

$$u^2 = x^6 \rightarrow \sqrt{u^2} = \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$$

Encontrar a

$$a^2 = 9$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{9}$$

$$a = 3$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} x^3 = 3x^2$$

Completar derivada

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt{x^6 - 9}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{x^3 \sqrt{x^6 - 9}}$$

Sustituir valores

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arc sec} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{9} \operatorname{arc sec} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{\operatorname{arc sec} \left(\frac{x^3}{3} \right)}{9} + C$$

Arcocosecante

$$\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \csc\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{-x dx}{4x\sqrt{16x^2 - 100}}$$

$$u = 4x \rightarrow u^2 = (4x)^2 \rightarrow u^2 = 16x^2$$

$$u^2 = 16x^2 \rightarrow \sqrt{u^2} = \sqrt{16x^2} \rightarrow u = \sqrt{16}\sqrt{x^2} \rightarrow u = 4x$$

Encontrar a

$$a^2 = 100$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{100}$$

$$a = 10$$

Derivar u

$$\frac{du}{dx} 16x^2 = 32x$$

Completar derivada

$$\int \frac{-x dx}{4x\sqrt{16x^2 - 100}} \cdot \frac{32}{32} = \frac{1}{32} \int \frac{-32x dx}{4x\sqrt{16x^2 - 100}}$$

Sustituir valores

$$\frac{1}{32} \int \frac{-8x dx}{4x\sqrt{16x^2 - 100}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{10} \operatorname{arc} \csc\left(\frac{4x}{10}\right) = \frac{\operatorname{arc} \csc\left(\frac{4x}{10}\right)}{320}$$

$$\frac{\operatorname{arc} \csc\left(\frac{4x}{10}\right)}{320} = \frac{\operatorname{arc} \csc\left(\frac{2x}{5}\right)}{320}$$

Integrales definidas – Área bajo la curva

La integral definida es un concepto utilizado para una superficie bajo una función limitada por valores de x y al eje x . Las integrales definidas se representan de la misma manera que las indefinidas, pero los límites se añaden como subíndice y superíndice en el signo de integración.

Para realizar el cálculo de integrales definidas:

- Integra la función de la misma manera en la que lo harías en una integral indefinida
- No incluyas la constante de integración
- Evalúa el resultado de la integral entre los límites dados y resta los valores, restando el valor obtenido al sustituir el límite de integración superior menos el obtenido al sustituir el límite de integración inferior

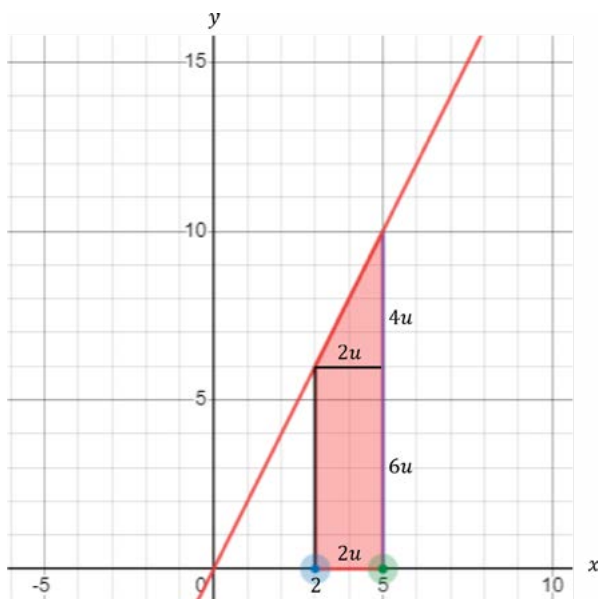
$$\int_a^b f(x)dx = x(b) - x(a)$$

$$\int_3^5 2x dx = \frac{2x^2}{2}$$

Evaluar límites de integración

$$(5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$$

La función que acabamos de integrar es una función lineal; si bien al integrar obtenemos x^2 , su representación gráfica será una línea recta. Los límites de integración son líneas rectas paralelas al eje x que al ser intersecadas por la función, se formará una figura geométrica que se puede descomponer en un rectángulo y un triángulo. La base resulta ser la distancia entre cada límite de integración.



Comprobar área

$$A_1 = \frac{2 \cdot 4}{2}$$

$$A_1 = 4u^2$$

$$A_2 = 2 \cdot 6$$

$$A_2 = 12u^2$$

$$A_{Total} = A_1 + A_2$$

$$A_T = 4u^2 + 12u^2$$

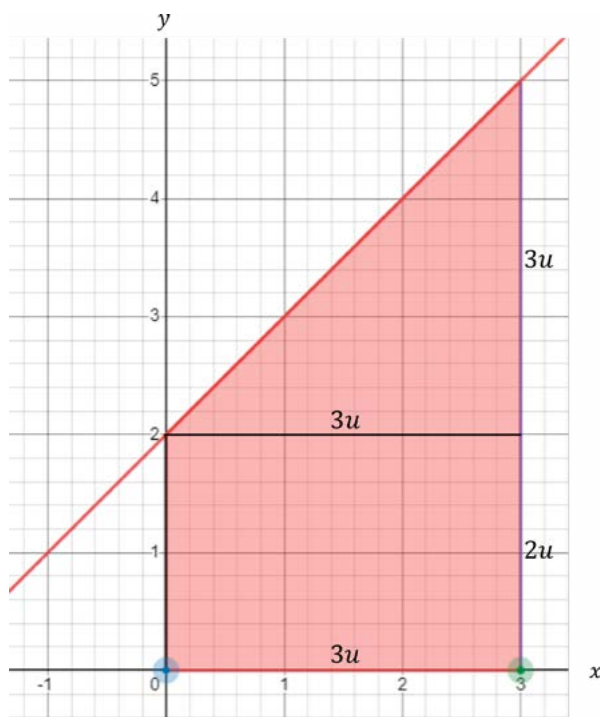
$$A_T = 16u^2$$

Ya que el área se encuentra por arriba del eje x , nos da un valor positivo

$$\int_0^3 (x + 2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x$$

Evaluar límites de integración

$$\frac{(3)^2}{2} + 2(3) - \frac{(0)^2}{2} + 2(0) = \frac{9}{2} + 6 - 0 = 4.5 + 6 = 10.5u^2$$



Comprobar área

$$A_1 = \frac{3 \cdot 3}{2}$$

$$A_1 = \frac{9}{2}$$

$$A_1 = 4.5u^2$$

$$A_2 = 3 \cdot 2$$

$$A_2 = 6u^2$$

$$A_{Total} = A_1 + A_2$$

$$A_T = 4.5u^2 + 6u^2$$

$$A_T = 10.5u^2$$

$$\int_{-2}^0 2x \, dx = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

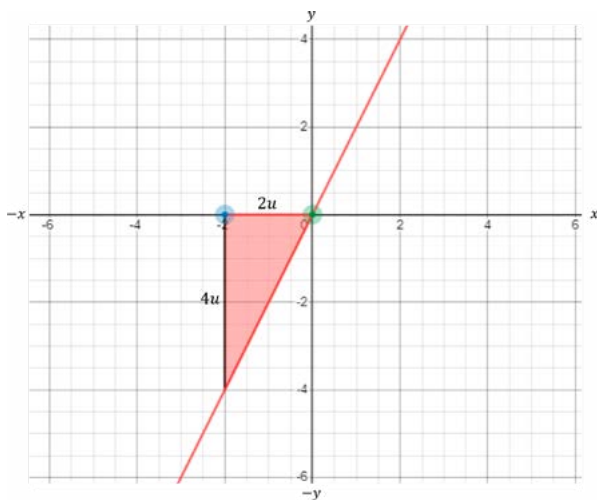
Evaluar límites de integración

$$(0)^2 - (-2)^2 = 0 - (4) = -4u^2$$

$$\left| \int_{-2}^0 2x \, dx \right| = 4u^2$$

Ya que el área se encuentra debajo del eje x , el valor del área nos dará negativo. Sin embargo, las áreas negativas como tal no existen, por lo que debemos tomar el valor absoluto del resultado.

La figura geométrica que se forma es un triángulo, ya que uno de los límites de integración es el punto de origen (0).



$$A = \frac{2 \cdot 4}{2}$$

$$A = 4u^2$$

En este otro ejemplo ocurre algo que debemos tomar en cuenta.

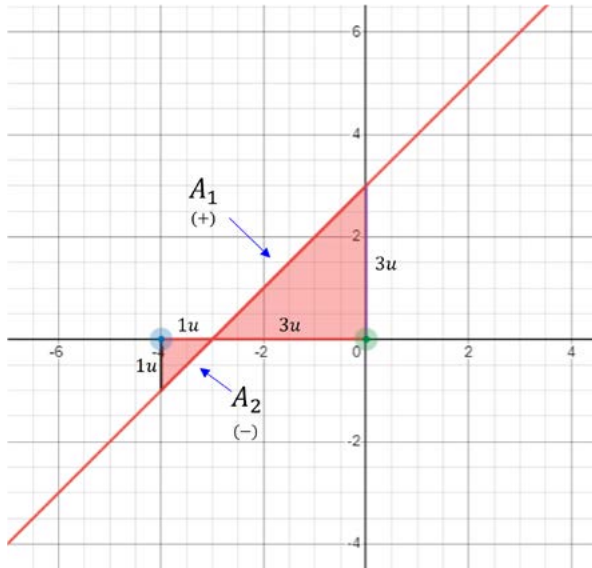
$$\int_{-4}^0 \left(\frac{x^2 + 8x + 15}{x + 5} \right) dx$$

Factorizar el numerador por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, para encontrar una expresión equivalente más fácil de integrar.

$$\int_{-4}^0 \left(\frac{\cancel{(x+5)}(x+3)}{\cancel{(x+5)}} \right) dx = \int_{-4}^0 (x+3) dx = \frac{x^2}{2} + 3x \bigg|_{-4}^0$$

Evaluar límites de integración

$$\frac{(0)^2}{2} + 3(0) - \left[\frac{(-4)^2}{2} + 3(-4) \right] = - \left[\frac{16}{2} - 12 \right] = -[8 - 12] = -[-4] = 4u^2$$



Comprobar área

$$A_1 = \frac{3 \cdot 3}{2}$$

$$A_1 = \frac{9}{2}$$

$$A_1 = 4.5u^2$$

$$A_2 = \frac{1 \cdot 1}{2}$$

$$A_2 = 0.5u^2$$

$$A_{Total} = A_1 + A_2$$

$$A_T = 4.5u^2 + 0.5u^2$$

$$A_T = 5u^2$$

El resultado obtenido al evaluar los límites de integración y el resultado obtenido geoméricamente no coinciden. Esto se debe porque al evaluar en 0, el resultado nos da precisamente 0, por lo que no obtenemos el resultado cuando el área se encuentra por debajo del eje x .

Para evitar este error:

1. Hallar la raíz de la ecuación, es decir, el valor en x que hace que la ecuación nos dé como resultado 0 (corte al eje x).

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

2. Separar la integral en dos; la primera integral llevará el límite superior, y el valor de corte al eje x . La segunda integral llevará como límite superior el valor de corte al eje x y al límite inferior.

$$\int_{-3}^0 (x + 3)dx + \int_{-4}^{-3} (x + 3)dx$$

3. Ya que sabemos que una de las integrales nos dará un resultado negativo, debemos tomar el valor absoluto de ambas integrales.

$$\left| \int_{-3}^0 (x + 3)dx \right| + \left| \int_{-4}^{-3} (x + 3)dx \right|$$

4. Integrar

$$\left| \int_{-3}^0 (x + 3)dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} + 3x \right|_{-3}^0$$

$$\left| \int_{-4}^{-3} (x + 3)dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} + 3x \right|_{-4}^{-3}$$

5. Evaluar límites de integración y comprobar resultado geométricamente

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(0)^2}{2} + 3(0) - \left[\frac{(-3)^2}{2} + 3(-3) \right] \right| + \left| \frac{(-3)^2}{2} + 3(-3) - \left[\frac{(-4)^2}{2} + 3(-4) \right] \right| \\
& \left| 0 - \left[\frac{9}{2} - 9 \right] \right| + \left| \frac{9}{2} - 9 - \left[\frac{16}{2} - 12 \right] \right| \\
& \left| - \left[\frac{9}{2} - \frac{18}{2} \right] \right| + \left| \frac{9}{2} - \frac{18}{2} - \left[\frac{16}{2} - \frac{24}{2} \right] \right| \\
& \left| - \left[-\frac{9}{2} \right] \right| + \left| -\frac{9}{2} - \left[-\frac{8}{2} \right] \right| \\
& \left| \frac{9}{2} \right| + \left| -\frac{9}{2} + \frac{8}{2} \right| \\
& \left| \frac{9}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| \\
& \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5u^2 \quad \text{Los resultados coinciden}
\end{aligned}$$

Comprobar el resultado geoméricamente es muy importante, especialmente cuando tenemos un área por debajo del eje. No obstante, al hallar el área bajo la curva de ecuaciones cuadráticas, ecuaciones cúbicas y de ecuaciones de mayor grado, esto se vuelve imposible ya no existe una forma de calcular directamente una figura curveada.

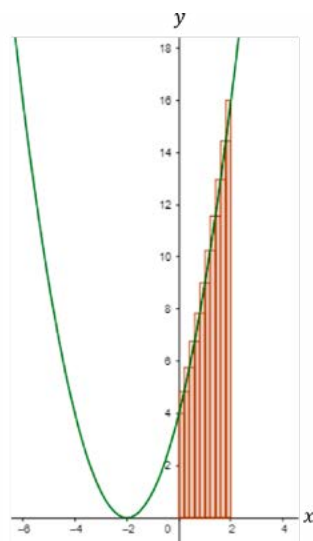
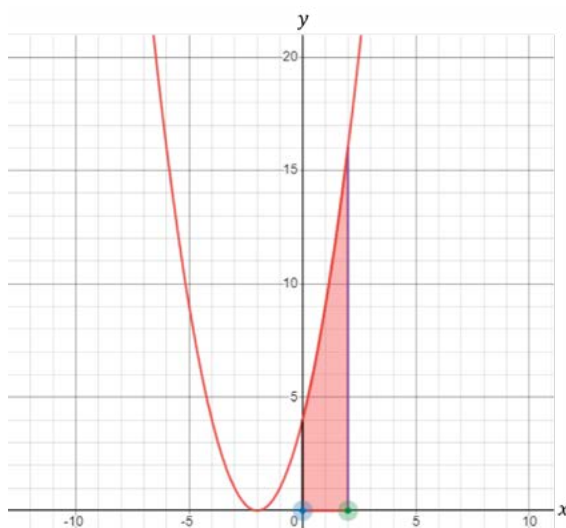
Antiguamente se usaba el método por agotamiento, que consistía en colocar rectángulos de área conocida, todos del mismo ancho, que abarquen toda el área para después ir disminuyendo el ancho y con ello aumentar más el número de rectángulos que quepan bajo el área con ello se conseguía una aproximación del área bajo la curva la cual iría siendo cada vez más exacta conforme más rectángulos cupieran bajo la curva.

$$\int_0^2 (x^2 + 4x + 4) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \Bigg|_0^2$$

Evaluar límites de integración

$$\frac{(2)^3}{3} + 2(2)^2 + 4(2) - \left[\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 4(0) \right]$$

$$\frac{8}{3} + 2(4) + 8 - [0] = 2.67 + 8 + 8 = 18.67u^2$$



Aproximación del área
Método por agotamiento

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_1^2$$

Evaluar límites de integración

$$\frac{(2)^4}{4} - \frac{2(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + 2(1) \right]$$

$$\frac{16}{4} - \frac{2(8)}{3} - \frac{4}{2} + 4 - \left[\frac{1}{4} - \frac{2(1)}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right]$$

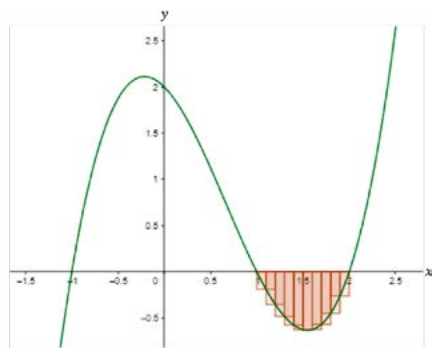
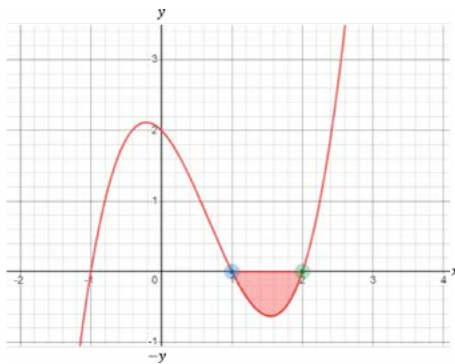
$$4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 - \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right]$$

$$4 - 5.33 - 2 + 4 - [0.25 - 0.66 - 0.5 + 2]$$

$$0.67 - 1.09 = -0.42$$

Como el resultado nos dio negativo, debemos considerar el valor absoluto

$$\left| \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| = 0.42$$



En este ejemplo tendremos “áreas positivas” y “áreas negativas”, el problema es que no podemos hacer la comprobación geométrica ya que, si integramos directamente, las “áreas negativas” se restarán con las “áreas positivas” alterando así al resultado, ante esto debemos separar la integral tomando como límites intermedios los valores que cortan al eje x .

$$\int_{-3}^4 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_{-3}^4$$

1. Encontrar las raíces de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$\begin{array}{c cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$		$(x-1)(x^2-x-6)$ $(x-1)(x+2)(x-3)$		$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x+2 &= 0 \\ x_2 &= -2 \\ x-3 &= 0 \end{aligned}$
$x = 1$ $(x-1)$				

2. Separar la integral, la primera integral tendrá el límite superior original y como límite inferior el valor más alto de x que corta el eje x

$$\int_3^4 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx$$

La siguiente integral tomará el valor anterior como límite superior y como límite inferior tomará el valor intermedio de x

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx$$

De igual manera, para la otra integral tomamos el valor anterior como límite superior y como límite inferior el valor más bajo de x

$$\int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx$$

Una vez más, tomamos el valor anterior como límite superior y al límite inferior original.

$$\int_{-3}^{-2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx$$

$$\int_3^4 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx + \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx + \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx + \int_{-3}^{-2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx$$

3. Tomar el valor absoluto de las integrales

$$\left| \int_3^4 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| + \left| \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| + \left| \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| + \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right|$$

4. Integrar

$$\left| \int_3^4 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_3^4$$

$$\left| \int_1^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_1^3$$

$$\left| \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_{-2}^1$$

$$\left| \int_{-3}^{-2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_{-3}^{-2}$$

5. Evaluar límites de integración

Primer integral

$$\left| \frac{(4)^4}{4} - \frac{2(4)^3}{3} - \frac{5(4)^2}{2} + 6(4) - \left[\frac{(3)^4}{4} - \frac{2(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) \right] \right|$$

$$\left| \frac{256}{4} - \frac{2(64)}{3} - \frac{5(16)}{2} + (24) - \left[\frac{81}{4} - \frac{2(27)}{3} - \frac{5(9)}{2} + 18 \right] \right|$$

$$\left| 64 - \frac{128}{3} - \frac{80}{2} + 24 \left[20.25 - \frac{54}{3} - \frac{45}{2} + 18 \right] \right|$$

$$|88 - 42.66 - 40 - [38.25 - 18 - 22.5]|$$

$$|5.34 - [-2.25]|$$

$$|5.34 + 2.25| = 7.57u^2$$

Segunda integral

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(3)^4}{4} - \frac{2(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} + 6(3) - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} - \frac{5(1)^2}{2} + 6(1) \right] \right| \\
 & \left| \frac{81}{4} - \frac{2(27)}{3} - \frac{5(9)}{2} + 18 - \left[\frac{1}{4} - \frac{2(1)}{3} - \frac{5(1)}{2} + 6 \right] \right| \\
 & \left| 20.25 - \frac{54}{3} - \frac{45}{2} + 18 - \left[0.25 - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right] \right| \\
 & |20.25 - 18 - 22.5 + 18 - [0.25 - 0.66 - 2.5 + 6]| \\
 & |-2.25 - [3.09]| \\
 & |-2.25 - 3.09| = |-5.34| = 5.34u^2
 \end{aligned}$$

Tercera integral

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(1)^4}{4} - \frac{2(1)^3}{3} - \frac{5(1)^2}{2} + 6(1) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{2(-2)^3}{3} - \frac{5(-2)^2}{2} + 6(-2) \right] \right| \\
 & \left| \frac{1}{4} - \frac{2(1)}{3} - \frac{5(1)}{2} + 6 - \left[\frac{16}{4} - \frac{2(-8)}{3} - \frac{5(4)}{2} + (-12) \right] \right| \\
 & \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left[4 - \frac{(-16)}{3} - \frac{20}{2} - 12 \right] \right| \\
 & \left| 0.25 - 0.66 - 2.5 + 6 - \left[4 + \frac{16}{3} - 10 - 12 \right] \right| \\
 & |0.25 - 0.66 - 2.5 + 6 - [4 + 5.33 - 10 - 12]| \\
 & |3.09 - [-12.67]| \\
 & |3.09 + 12.67| = 15.76u^2
 \end{aligned}$$

Cuarta integral

$$\left| \frac{1}{4} - \frac{2(1)}{3} - \frac{5(1)}{2} + 6 - \left[\frac{16}{4} - \frac{2(-8)}{3} - \frac{5(4)}{2} + (-12) \right] \right|$$

$$\left| \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left[4 - \frac{(-16)}{3} - \frac{20}{2} - 12 \right] \right|$$

$$\left| 0.25 - 0.66 - 2.5 + 6 - \left[4 + \frac{16}{3} - 10 - 12 \right] \right|$$

$$\left| \frac{(-2)^4}{4} - \frac{2(-2)^3}{3} - \frac{5(-2)^2}{2} + 6(-2) - \left[\frac{(-3)^4}{4} - \frac{2(-3)^3}{3} - \frac{5(-3)^2}{2} + 6(-3) \right] \right|$$

$$|4 + 5.33 - 10 - 12 - [20.25 + 18 - 22.5 - 18]|$$

$$|-12.67 - [20.25 + 18 - 22.5 - 18]|$$

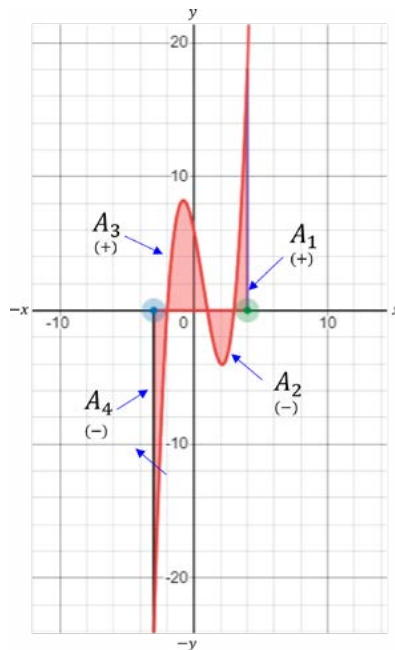
$$|-12.67 - [-2.25]|$$

$$|-12.67 + 2.25|$$

$$|-10.42| = 10.42u^2$$

Juntando partes

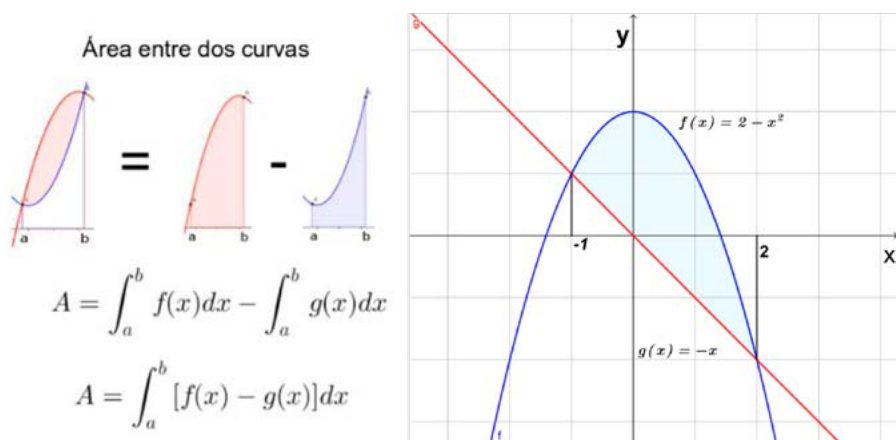
$$7.57u^2 + 5.34u^2 + 15.76u^2 + 10.42u^2 = 39.09u^2$$



Área entre funciones

El área comprendida entre dos funciones es igual al área de la función que está situada por encima menos el área de la función que está situada por debajo.

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$



Para hallar el área entre dos funciones:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 4x$$

A) Hallar los puntos de intersección

Los puntos de intersección son los límites de integración e indican donde inicia y donde termina el área entre dos funciones.

Para hallar los puntos de intersección, debemos igualar ambas ecuaciones y despejar x .

$$x^2 = -x^2 + 4x$$

$$x^2 + x^2 - 4x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

Factorizamos por término común para obtener los valores de x (puntos de intersección)

$$2x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Puntos de intersección

B) Tabulación

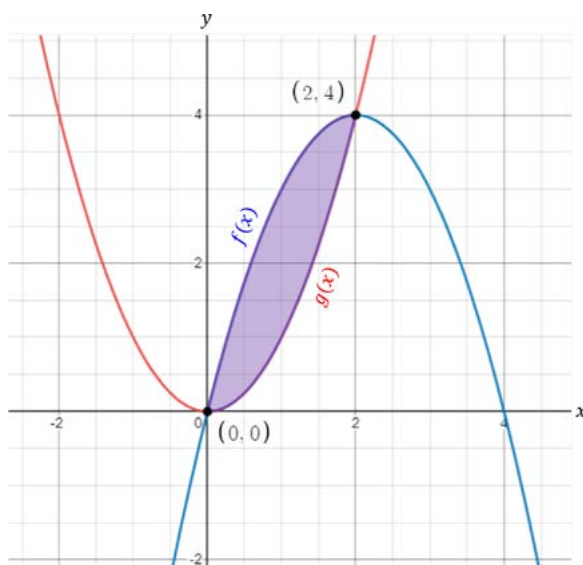
Esto se realiza con el fin de representar el problema en cuestión de manera gráfica.

Al evaluar los puntos de intersección obtendremos el mismo resultado en y en ambas ecuaciones.

x	$y = x^2 - 4x$	$y = x^3 - 6x^2 + 8x$	
5	5	15	
4	0	0	(4,0)
3	-3	-3	(3,-3)
2	-4	0	
1	-3	3	
0	0	0	(0,0)
-1	5	-15	
-2	12	-48	
-3	21	-105	
-4	32	-192	
-5	45	-315	

C) Gráfica

Note los puntos de intersección y el área entre funciones.



D) Integración

Para hallar el área entre dos funciones, debemos hallar la integral de la función que pasa por **arriba** menos la función que pasa por **abajo**, tomando como límites los puntos de intersección; el límite superior será el valor más alto y el límite inferior el valor más bajo.

$$\int_0^2 [-x^2 + 4x - (x^2)] dx$$

$$\int_0^2 [-x^2 + 4x - (x^2)] dx = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$$

$$\int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \Big|_0^2$$

Evaluar límites de integración

$$-\frac{2(2)^3}{3} + 2(2)^2 - \left[-\frac{2(0)^3}{3} + 2(0)^2 \right] = -\frac{2(8)}{3} + 2(4) - [0]$$

$$-\frac{16}{3} + 8 - 0 = -5.33 + 8 = 2.67$$

$$A = 2.67u^2$$

En este otro ejemplo tendremos tres puntos de intersección:

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$g(x) = -x^3 - 6x^2 + 8x$$

A) Hallar los puntos de integración

$$x^2 - 4x = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$x^3 - x^2 - 6x^2 + 4x + 8x = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

Factorizamos por término común

$$x(x^2 - 7x + 12) = 0$$

Factorizamos por trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$x(x - 3)(x - 4) = 0$$

Obtenemos los valores de x

$$x_1 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

Puntos de intersección

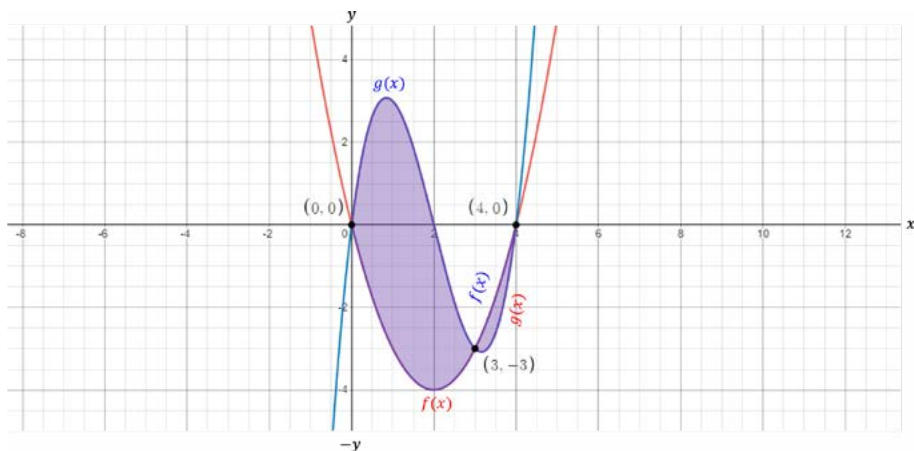
B) Tabulación

Al evaluar los puntos de intersección, obtendremos el mismo resultado en y en ambas funciones.

x	$y = x^2 - 4x$	$y = x^3 - 6x^2 + 8x$	
5	5	15	
4	0	0	(4,0)
3	-3	-3	(3,-3)
2	-4	0	
1	-3	3	
0	0	0	(0,0)
-1	5	-15	
-2	12	-48	
-3	21	-105	
-4	32	-192	
-5	45	-315	

C) Gráfica

Note (de derecha a izquierda) cómo en un tramo $f(x)$ se encuentra por **arriba** y luego por **debajo**; $g(x)$ se encuentra primero por **debajo** y luego por **arriba**.



D) Integración

Al tener dos tramos, el área entre las funciones será igual a la suma del área de cada tramo por separado, es decir:

$$\int_b^c [f(x) - g(x)]dx + \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

En la primera integral tomaremos como límite superior el punto de intersección más alto y como límite inferior el punto de intersección de valor medio; para la segunda integral tomaremos como límite superior el punto de intersección de valor medio, y como límite inferior el punto de intersección de valor bajo.

Tramo donde $f(x)$ pasa por arriba A_1	Tramo donde $g(x)$ pasa por arriba A_2
$\int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]dx$	$+ \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]dx$

Primer tramo

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]dx \\&= \int_3^4 (x^2 - 4x - x^3 + 6x^2 - 8x)dx = \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)dx \\&= -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} = -\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2 \Big|_3^4\end{aligned}$$

Evaluar límites de integración

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{(4)^4}{4} + \frac{7(4)^3}{3} - 6(4)^2 - \left[-\frac{(3)^4}{4} + \frac{7(3)^3}{3} - 6(3)^2 \right] \\&= -\frac{256}{4} + \frac{7(64)}{3} - 6(16) - \left[-\frac{81}{4} + \frac{7(27)}{3} - 6(9) \right] \\&= -64 + \frac{448}{3} - 96 - \left[-20.25 + \frac{189}{3} - 54 \right] \\&= -64 + 149.33 - 96 - [-20.25 + 63 - 54] \\&= -10.67 - [-11.25] = -10.67 + 11.25 = 0.58 \\A_1 &= 0.58u^2\end{aligned}$$

Segundo tramo

$$\begin{aligned}A_2 &= \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]dx \\&= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 8x - x^2 + 4x)dx = \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)dx \\&= \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 6x^2 \Big|_0^3\end{aligned}$$

Evaluar límites de integración

$$A_2 = \frac{(3)^4}{4} - \frac{7(3)^3}{3} + 6(3)^2 - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{7(0)^3}{3} + 6(0)^2 \right]$$

$$\frac{81}{4} - \frac{7(27)}{3} + 6(9) - [0]$$

$$20.25 - \frac{189}{3} + 54$$

$$20.25 - 63 + 54 = 11.25$$

$$A_2 = 11.25u^2$$

Área total

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_T = 0.58u^2 + 11.25u^2$$

$$A_T = 11.83u^2$$

Métodos de integración

Para las operaciones algebraicas, existe un algoritmo que permite obtener el resultado deseado; en el cálculo diferencial, la derivada posee su propio procedimiento a través del método de los cuatro pasos. Sin embargo, la integración de funciones no cuenta con un algoritmo único; “aunque se sabe que la integral de una expresión diferencial dada existe, puede ser imposible obtenerla en términos de funciones conocidas” (Granville, 1963).

Esta condición conlleva la necesidad de contar con diversas estrategias que ayuden a determinar la antiderivada; en algunos casos, los métodos de integración ofrecen una de las alternativas que permiten encontrar una solución exacta. Su relevancia se debe a que brindan la posibilidad de transformar ciertas expresiones matemáticas en expresiones algebraicas equivalentes que pueden ser ubicadas en una de las múltiples tablas de integración para integrar la función estudiada de manera precisa.

Integración por cambio de variable

A diferencia de las derivadas, en las cuales contamos con la regla de la cadena (dos expresiones multiplicándose), en la integración no tenemos un proceso inverso a la regla de la cadena, y desarrollar la expresión sería tardado y nos daría un resultado exageradamente largo.

Este método de integración se fundamenta en que una expresión resulta ser la derivada de la otra.

$$\int (3x^3 + 4x^2)^7 (9x^2 + 8x) dx$$

Note que $(9x^2 + 8x)$ es la derivada de $(3x^3 + 4x^2)$

$$\int \underbrace{(3x^3 + 4x^2)}_u \underbrace{(9x^2 + 8x) dx}_{du}$$

Obtenemos la derivada de u con respecto a x

$$u = 3x^3 + 4x^2$$

$$\frac{du}{dx} = (3)3x^{3-1} + (2)4x^{2-1}$$

$$\frac{du}{dx} = 9x^2 + 8x$$

Debemos dejar solo al diferencial de u (du) por lo que tenemos que despejar al diferencial de x (dx).

$$du = (9x^2 + 8x) dx$$

Realizamos el cambio de variable, como nuestra expresión ahora será con respecto a u debemos pasar de dx a du (lo cual realizamos anteriormente).

$$\int u^7 du$$

Integramos

$$\int u^7 du = \frac{u^{7+1}}{7+1} + C = \frac{u^8}{8} + C$$

Una vez integrada la expresión, devolvemos al valor original

$$\frac{u^8}{8} + C = \frac{(3x^3 + 4x^2)^8}{8} + C$$

$$\int x^2(2x^3 - 5)^4 dx$$

En este caso, una expresión es casi la derivada de otra

$$\int \frac{x^2}{du} \frac{(2x^3 - 5)^4}{u} \frac{dx}{u}$$

Note además que la expresión que será la derivada de u (du) puede no estar al lado del dx

Obtengamos la derivada de u con respecto a x

$$u = 2x^3 - 5$$

$$\frac{du}{dx} = (3)2x^{3-1} - 0$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2$$

Despejamos dx

$$du = 6x^2 dx$$

El problema contiene $x^2 dx$ y no $6x^2 dx$ ante ello, despejamos el 6

$$\frac{du}{6} = x^2 dx$$

Realizamos cambio de variable y de diferencial

$$\int (u)^4 \frac{du}{6} = \int (u)^4 \frac{1}{6} du$$

Al ser $\frac{1}{6}$ una constante puede salir de la integral

$$\frac{1}{6} \int (u)^4 du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{30} + C$$

Devolvemos u al valor original

$$\frac{u^5}{30} + C = \frac{(2x^3 - 5)^5}{30} + C$$

En este otro caso, nuevamente una expresión (numerador) es casi la derivada de la otra (denominador)

$$\int \frac{(3 - 4x)dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$$

De manera rápida podemos saber que la derivada de una expresión será aquella que posea x elevada a un exponente de menor grado o que tenga solamente el coeficiente

$$\begin{array}{lcl} 3x \rightarrow 3 & \rightarrow & u = 3x - x^2 - 2 \\ x^2 \rightarrow 2x & & \frac{du}{dx} = 3 - 2x \\ & & du = (3 - 2x)dx \end{array}$$

El numerador es casi a derivada ya que tiene $4x$ en lugar de $2x$. No obstante, podemos manipular el problema de la siguiente manera:

$$\int \frac{(3 - 2x - 2x)dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$$

Separamos la fracción $\frac{a \pm b \pm c}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} \pm \frac{c}{d}$

$$\text{Además } \frac{a - b}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{-b}{d}$$

$$\int \left[\frac{(3 - 2x)}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} + \frac{-2x}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} \right] dx$$

Para que el numerador de la segunda expresión sea la derivada del denominador hace falta "3", este lo podemos agregar de la siguiente manera:

$$x + y - y = 0$$

$$\int \left[\frac{(3 - 2x)}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} + \frac{3 - 2x - 3}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} \right] dx$$

La segunda fracción la volvemos a separar

$$\int \left[\frac{(3-2x)}{\sqrt{3x-x^2-2}} + \frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2-2}} + \frac{-3}{\sqrt{3x-x^2-2}} \right] dx$$

En la tercera fracción, al no tener en el numerador, será más fácil integrarlo.

Aplicar propiedad $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$

$$\int \frac{(3-2x)}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx + \int \frac{(3-2x)}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx + \int \frac{-3}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$$

Tenemos dos veces la misma expresión así que podemos simplificar

$$2 \int \frac{(3-2x)}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx + \int \frac{-3}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$$

Cambio de variable, recuerda que:

$$u = 3x - x^2 - 2$$

$$du = (3 - 2x) dx$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int \frac{-3}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$$

Sacamos la constante de la segunda fracción

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} + (-3) \int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}} dx$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

Factorizamos el radicando en el denominador de la segunda expresión

$$3x - x^2 - 2$$

Reordenamos términos

$$-x^2 - 3x - 2$$

Extraemos el signo negativo $(-a + b + c) = (a - b + c)$

$$-(x^2 - 3x - 2)$$

La idea ahora es obtener un T.C.P, pero no es el doble de la raíz cuadrada de 2. Así que debemos recurrir a completar el T.C.P, recuerda que $x + y - y = 0$

Para ello, haremos el procedimiento inverso de T.C.P, es decir, dividimos 3 entre 2 y todo eso lo elevamos al cuadrado, el exponente se distribuye al numerador y denominador

$$\begin{aligned} -\left[x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] &= -\left[x^2 + 3x + \frac{3^2}{2^2} + 2 - \frac{3^2}{2^2}\right] \\ -\left[x^2 + 3x + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{4}\right] \end{aligned}$$

Obtenemos T.C.P, recuerda que el otro término es la raíz cuadrada de x^2 , o sea x

$$\begin{aligned} -\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}\right] \\ -\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{8}{4} - \frac{9}{4}\right] &= -\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \end{aligned}$$

Observa que el segundo término posee raíz cuadrada exacta

$$-\left[\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Quitamos el signo negativo que quedo fuera del paréntesis

$$(-a + b + c) = (-a + b - c)$$

$$\left[-\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

Reordenamos términos $(-a + b) = (b - a)$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{9}{4}\right)^2 \right]$$

Volviendo a la integral

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{9}{4}\right)^2}}$$

Aplicar fórmula $\frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsen\left(\frac{v}{a}\right)$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_a - \underbrace{\left(x + \frac{9}{4}\right)^2}_v}}$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{x + \frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

Simplificar

$$\frac{xy}{x} = y$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{\frac{4x}{4} + \frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsin\left(\frac{\frac{4x+9}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

Aplicar ley del sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsin\left(\frac{\frac{4x+9}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsin\left[\frac{2(4x+9)}{4}\right]$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsin\left[\frac{2(4x+9)}{\cancel{2} \cdot 2}\right]$$

$$2 \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3 \cdot \arcsin\left(\frac{4x+9}{2}\right)$$

Para integrar la primera fracción

Aplicar propiedad $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$2 \int \frac{du}{u^{1/2}} - 3 \cdot \arcsin\left(\frac{4x+9}{2}\right)$$

Aplicar propiedad $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$2 \int u^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \arcsin\left(\frac{4x+9}{2}\right)$$

Integrar

$$2 \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C = 2 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C$$

$$2 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C$$

Aplicar ley del sándwich $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

$$2 \cdot \frac{2u^{\frac{1}{2}}}{1} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C = 4u^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C$$

Aplicar propiedad $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$$4\sqrt{u} - 3 \cdot \arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) + C$$

Finalmente devolver u al valor original

$$4\sqrt{3x-x^2-2} - 3 \left[\arcsen\left(\frac{4x+9}{2}\right) \right] + C$$

Integración por sustitución por partes

A diferencia de las derivadas, no existe una fórmula para poder integrar cualquier producto de funciones. Lo más cercano que tenemos a una regla para integrar producto de funciones es la integración por partes. Curiosamente, se basa en la fórmula para derivar un producto de funciones.

Regla del producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el diferencial de x (dx)

$$dx \left[\frac{d}{dx}(uv) \right] = dx \left[u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right]$$

$$\cancel{dx} \cdot \frac{d}{\cancel{dx}}(uv) = \cancel{dx} \cdot u \frac{dv}{\cancel{dx}} + \cancel{dx} \cdot v \frac{du}{\cancel{dx}}$$

Integrando ambos lados de la ecuación

$$\int d \cdot (uv) = \int (u \cdot dv + v \cdot du)$$

$$\int \cancel{d} \cdot (uv) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

Despejando...

Fórmula integración por partes

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int (x \ln x) dx$$

Para elegir qué expresión será u y cual dv nos guiaremos de la nemotecnica ILATE, el cual representa el orden de importancia de izquierda a derecha de las funciones que se tengan

I - Funciones inversas [$\arcsen(x)$]

L - Funciones logarítmicas $[\ln x]$

A - Funciones algebraicas $[x^2]$

T - Funciones trigonométricas $[\sin(x)]$

E - Funciones exponenciales $[e^x]$

$$\int \underbrace{(x)}_A \underbrace{\ln x}_L dx$$

$$A > L$$

$$\int \underbrace{(x)}_{dv} \underbrace{\ln x}_u dx$$

Encontrar v y du

Derivando

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x}$$

Integrando

$$dv = x$$

$$\int dv = \int x$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituir valores en la fórmula

$$uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$\int \ln x \cdot x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \int \frac{x^2}{2x}$$

Aplicar propiedad $\frac{x^n}{ax^m} = \frac{x^{n-m}}{a}$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \int \frac{x^{2-1}}{2} = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \int \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{x} c$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \int \frac{1}{2} x$$

Sacar la constante

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \frac{1}{2} \int x$$

Integrar

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$a \cdot 1 = a \cdot \frac{b}{b} = \frac{ab}{b} = a$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{\ln x (x^2)}{2} \cdot 1 - \frac{x^2}{4} + C = \frac{\ln x (x^2)}{2} \cdot \frac{2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{2 \ln x (x^2)}{2 \cdot 2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{2 \ln x (x^2)}{4} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int \ln x \cdot x = \frac{2 \ln x (x^2) - x^2}{4} + C$$

Factorizar por término común

$$\int \ln x \cdot x = \frac{x^2 (2 \ln x - 1)}{4} + C$$

$$\int x e^x$$

Determinar tipo de función y prioridad

$$\int \frac{x e^x}{A \ E}$$

$$A > E$$

$$\int \frac{x e^x}{u \ du}$$

Encontrar v y du

Derivando

$$u = x$$

$$du = 1$$

Integrando

$$dv = e^x$$

$$\int dv = \int e^x$$

$$v = e^x$$

Sustituir valores en la fórmula

$$uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1$$

$$\int x \cdot e^x = x \cdot e^x - \int e^x = (x \cdot e^x - e^x) + C$$

Factorizar por término común

$$\int x \cdot e^x = e^x(x - 1) + C$$

Bibliografía

- Aguilar Márquez, A., et al. (2009). *Matemáticas simplificadas* (2ª ed.) México: Pearson Educación.
- Aguilar Márquez, A., et al. (2015). *Cálculo diferencial e integral*. Pearson Educación.
- Apostol, Tom M (1985), *Calculus*. Volumen II. Editorial Reverté.
- Ayres Jr, Frank (1971). *Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral*. Libros McGraw Hill de México.
- Baldor A. (2015). *Algebra*. Grupo Editorial Patria.
- Camacho, Alberto (2009). *Cálculo Diferencial*. Editorial Díaz de Santos.
- Demidovich, Boris (1967). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Editorial Mir.
- Franco, Jorge (2014). *Cálculo, el verbo del cosmos*. Siglo XXI editores.
- Granville, W. A. (1998). *Cálculo Diferencial e Integral* (1a. Ed., 27a. Reimp.). México: Limusa/Noriega.
- Ivorra Castillo, C. (s.f.). *Introducción al cálculo diferencial*. Universidad de Valencia.
- Kletenik, D. (1968). *Problemas de geometría analítica*. Editorial Mir.
- Larson, R. (2008). *Precalculo*. Editorial Reverté.
- Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. Editorial Limusa.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7ª Edición). Oxford University Press.
- Mikenberg, Irene F. (2013). *Álgebra e introducción al cálculo*. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Piskunov, N. (1977). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Mir.
- Purcell, E. J., Dale Varberg & Steve E. R. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral* (9ª Edición). Pearson Educación de México.
- Rees, Paul K & Sparks, Fred W. (1991). *Algebra* (10ª edición). McGraw Hill.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7a. ed.). Cengage Learning.
- Stewart, J., Lothar R. & Saleem W. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Cengage Learning Editores.
- Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal* (2ª edición). Reverté Ediciones.
- Spivak, M. (2012). *Calculus* (3ª edición). Editorial Reverté.

- Sullivan, M. (2013), *Álgebra y Trigonometría* (9ª Edición). Pearson Educación de México.
- Swokowski, E. W. & Jeffery A. C. (2011). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning Editores.
- Wilson & Velázquez B. (2014). *Cálculo Integral*. Editorial Unimagdalena.

Cálculo diferencial e integral con álgebra.

Se terminó de imprimir en agosto de 2025
en los talleres de Astra Ediciones

Av. Acueducto No. 829

Colonia Santa Margarita, C. P. 45140

Zapopan, Jalisco, México.

33 38 34 82 36

E-mail: edicion@astraeditorial.com.mx

www.astraeditorialshop.com

Impresión digital con interiores en papel bond de 75 g.

El tiraje consta de 300 ejemplares

El presente libro ha sido creado con la finalidad de proporcionar una guía comprensible y accesible para aquellos estudiantes que desean adentrarse en el mundo de las matemáticas, con el objetivo de facilitar la comprensión de los conceptos fundamentales en álgebra, cálculo diferencial y cálculo integral.

La propuesta de este trabajo es presentar los conceptos fundamentales acompañados de una serie de problemas que van desde problemas fáciles y cortos a aquellos que son más complejos, largos y requieren el uso de varias propiedades.

ISBN: 979-13-87837-33-4



Consulta y descarga

