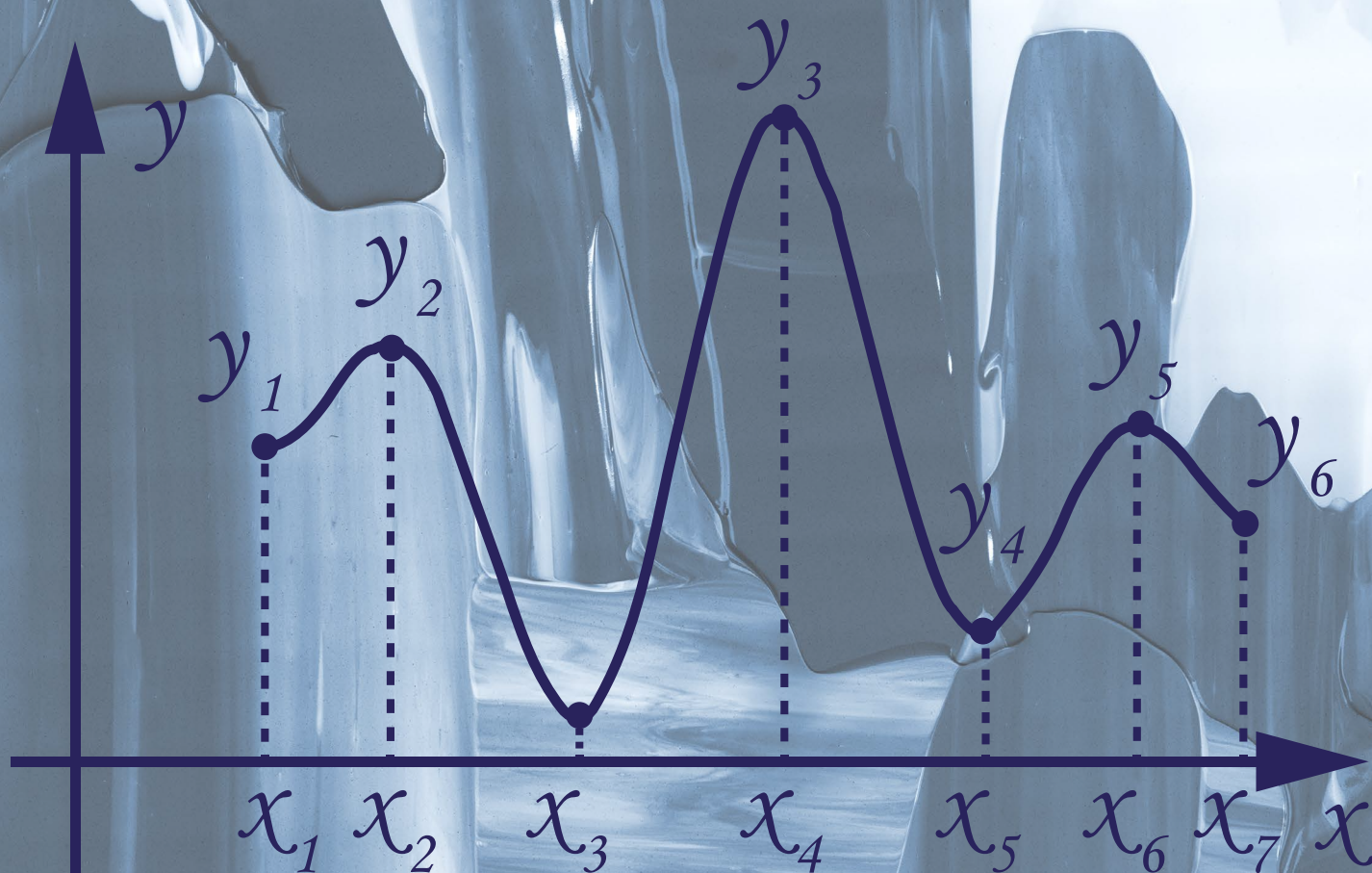


Introducción al Cálculo Diferencial:

Un Curso Básico de Álgebra y Funciones



Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones



Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones

Oscar Robles Vásquez
Jaime Rubén Pérez Leaño
Narda Lizbet López Contreras
Cinthia Astrid Reyes Lozano
Agustín Martínez Ruvalcaba



Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones. **Autores:** Oscar Robles Vásquez, Jaime Rubén Pérez Leño, Narda Lizbet López Contreras, Cinthia Astrid Reyes Lozano y Agustín Martínez Ruvalcaba. —Guadalajara, Jalisco. 2025.

306 pp.

ISBN: **978-607-8964-22-2**

DOI: <https://doi.org/10.61728/AE20255350>



Primera edición

D. R. © copyright, 2025.

Edición y corrección: **Astra Ediciones**



Todos los contenidos de esta obra se comparten bajo la licencia Creative Commons Atribución/Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (**CC BY-NC-SA 4.0**). Esto implica que no está autorizado el uso comercial de la obra original ni de las eventuales obras derivadas, las cuales deberán distribuirse bajo la misma licencia que rige la obra original. No obstante, se permite a terceros compartir el contenido siempre y cuando se reconozca debidamente la autoría y la publicación original en esta editorial.

HECHO EN MÉXICO | MADE IN MEXICO

Contenido

Prefacio	11
Capítulo 1. Números Reales	13
1.1 Conjuntos	13
1.1.1 Operaciones con Conjuntos	14
1.2 Conjunto de los Números Reales	14
1.2.1 Subconjuntos de los Números Reales	16
1.3 Propiedades de los Números Reales	17
1.3.1 Propiedad de la Adición y de la Multiplicación	17
1.3.2 Propiedades de los Números Negativos	18
1.3.3 Propiedades de la División	18
1.3.4 Leyes de los Signos	19
1.3.5 Jerarquía de Operaciones	20
1.3.6 Propiedades de las Fracciones	21
1.4 Recta Numérica	26
1.4.1 Intervalos	27
1.5 Valor Absoluto y Distancia	29
1.6 Propiedades del Valor Absoluto	30
1.7 Distancia entre Puntos en la Recta Numérica	31
Capítulo 2. Expresiones Algebraicas	33
2.1 Variables y Expresiones Algebraicas	33
2.1.1 Término Semejante	35
2.2 Operaciones con Expresiones Algebraicas	35
2.3 Exponentes y Radicales	38
2.3.1 Exponente Negativo y Cero	40
2.3.2 Leyes de los Exponentes	40
2.3.3 Definición de la raíz n -ésima de un número real	43
2.3.4 Definición de exponentes racionales	44
Capítulo 3. Productos Notables y Factorización	55
3.1 Fórmulas de productos especiales	55
3.1.1 Triángulo de Pascal	59
3.2 Factorización	60
3.2.1 Factorización por Factor Común	60
3.2.2 Factorización por Factor Común y Agrupamiento	62
3.2.3 Factorizando Diferencia de Cuadrados	63
3.2.4 Factorizando Diferencia de Cubos	65
3.2.5 Factorización de Suma de Cubos	66
3.2.6 Factorización de Diferencias de Potencias Pares	67

3.2.7 Factorización de Trinomios.....	68
3.2.8 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$	71
3.2.9 Caso Especial de Factorización de Trinomios	76
3.2.10 Factorización y Simplificación de Derivadas Algebraicas.....	78
Capítulo 4. Expresiones Racionales.....	81
4.1 Operaciones con Expresiones Racionales.....	81
4.1.1 Evaluación de Expresiones Racionales.....	81
4.1.2 Simplificación de Expresiones Racionales	85
4.1.3 Multiplicación de Expresiones Racionales	87
4.1.4 División de Expresiones Racionales.....	88
4.1.5 Adición y Sustracción de Expresiones Racionales	89
4.2 Fracciones Complejas	92
4.3 Racionalización de Expresiones Racionales.....	93
Capítulo 5. Ecuación Algebraica	95
5.1 Ecuaciones Equivalentes.....	95
5.2 Ecuaciones Cuadráticas	98
5.2.1 Método Directo	99
5.2.2 Método por Factorización.....	101
5.2.3 Método de Completar el Cuadrado	102
5.2.4 Fórmula General	104
5.3 Reducción de Ecuaciones a la Forma Cuadrática	106
5.4 Ecuaciones con Valor Absoluto.....	111
5.5 Conjunto de Números Complejos (opcional)	113
5.5.1 Introducción a los Números Complejos.....	114
5.6 Ecuaciones con Radicales.....	118
5.7 Ecuaciones con Fracciones	120
Capítulo 6. Desigualdades	125
6.1 Propiedades de las Desigualdades	126
6.1.1 Resolución de Desigualdades	127
6.2 Desigualdades no Lineales.....	134
6.2.1 Desigualdad Cuadrática	134
6.2.1 Desigualdades Racionales.....	136
Capítulo 7. Ecuaciones de la Línea Recta.....	139
7.1 Plano Coordinado o Cartesiano (x; y)	139
7.2 Puntos y Líneas Rectas en el Plano xy.....	140
7.2.1 Hechos Importantes	142
7.3 Ecuación de la Línea Recta.....	145
7.3.1 Ecuaciones de Líneas Recta Horizontal y Vertical	146
7.3.2 Ecuación de la Recta en su Forma Simétrica.....	150
7.4 GeoGebra	157
7.4.1 Álgebra y Geometría con GeoGebra.....	158

Capítulo 8. Ecuaciones Lineales Simultáneas	161
8.1 Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2x2.....	161
8.1.1 Método Gráfico	161
8.1.2 Método Gráfico con GeoGebra	163
8.1.3 Métodos de Eliminación	166
8.1.4 Existencia de Soluciones.....	171
Capítulo 9. Exponenciales y Logaritmos	175
9.1 Expresiones Exponenciales.....	175
9.1.1 Bases Comunes	176
9.1.2 Leyes de los Exponentes.....	177
9.1.3 Cálculos Numéricos con Exponenciales.....	178
9.2 Expresiones Algebraicas Logarítmicas.....	179
9.2.1 Logaritmos con Bases Comunes.....	182
9.3 Ecuaciones Exponencial y Logarítmicas	190
9.3.1 Ecuaciones Exponenciales	190
9.3.2 Ecuaciones Logarítmicas	194
Capítulo 10. Sistemas de Ecuaciones No Lineales.....	199
10.1 Gráficas de Ecuaciones con GeoGebra	199
10.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales.....	200
10.2.1 Método Gráfico	200
10.2.2 Método Algebraico.....	203
Capítulo 11. Funciones Reales	209
11.1 Función.....	209
11.1.1 Dominio y Rango	211
11.1.2 Función Definidas por Partes	218
11.2 Álgebra de Funciones.....	221
11.2.1 Combinación de Funciones.....	221
11.2.2 Composición de Funciones	222
11.3 Comportamiento General de Funciones.....	226
11.3.1 Función Creciente y Decreciente	226
11.3.2 Interceptos con los Ejes.....	227
11.3.3 Razón de Cambio Promedio	228
11.3.4 Función Inversa.....	229
11.4 Función Lineal	231
11.4.1 Función Constante.....	231
11.5 Función Cuadrática	231
11.6 Función Racional	233
11.6.1 Asíntota Vertical	233
11.6.2 Asíntota Horizontal	233
11.7 Transformación de Funciones	235
11.7.1 Desplazamientos Verticales.....	235

11.7.2 Desplazamientos Horizontales	236
11.7.3 Reflexión Horizontal	236
11.7.4 Reflexión Vertical	237
11.7.5 Alargamientos y Acortamiento Vertical	237
11.7.6 Alargamiento y Acortamiento Horizontal	237
11.8 Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas	238
11.8.1 Funciones Exponenciales	238
11.8.2 Familia de Funciones Exponenciales	240
11.8.3 Dominio de Funciones Exponenciales	242
11.9 Función Logarítmica	244
11.9.1 Familia de Funciones Logarítmicas	245
11.10 Dominio de funciones logarítmicas	247
Capítulo 12. Límite de una función	249
12.1 Comprensión Numérica, Gráfica y Algebraica del Concepto de Límite	249
12.1.1 Determinación de Límites Numéricamente	249
12.1.2 Determinación de Límites Gráficamente	253
12.1.3 Propiedades de Límites	258
12.1.4 Determinación Algebraica de Límites	259
12.2 Definición Informal de Límite de una Función.....	263
12.2.1 Límite de una Función por la Izquierda o por la Derecha	263
12.2.2 Límites Infinitos y Asíntota Vertical	263
12.2.3 Asíntota vertical	264
12.2.4 Continuidad de funciones	265
12.3 Límites al Infinito y Asíntota Horizontal	265
12.3.1 Límites al infinito	265
12.3.2 Asíntota horizontal	266
12.4 Límites al infinito de funciones racionales	269
12.4.1 Hecho importante.....	269
Capítulo 13. Derivada de una Función	273
13.0.2 Derivada de una Función	277
13.0.3 Concepto de Derivada.....	279
13.1 Regla de la Cadena.....	289
13.2 Derivadas de Funciones Logarítmicas naturales.....	291
13.2.1 o también.....	291
13.3 Derivadas de Funciones Logarítmicas con base diferente a e	297
13.4 Derivadas de Funciones exponenciales naturales	298
13.4.1 o también.....	299
13.5 Derivadas de funciones exponenciales con base b	302
13.5.1 Diferenciación Logarítmica	302
13.5.2 Ejemplo de Derivación Logarítmica.....	303

Prefacio

El estudio del cálculo diferencial exige, como requisito indispensable, un conocimiento sólido del álgebra y la teoría de funciones. Estas dos áreas constituyen la estructura fundamental sobre la cual se erigen todos los conceptos del cálculo. El álgebra constituye el lenguaje simbólico y la herramienta operativa del cálculo. Su dominio es esencial para la manipulación rigurosa de expresiones, la simplificación de problemas complejos y la resolución de las ecuaciones que emergen tras la aplicación de los principios del cálculo. Sin una sólida competencia algebraica, la aplicación de conceptos como la derivada a partir de su definición formal, o la determinación de valores críticos como máximos y mínimos, se convierte en una tarea complicada. En esencia, el álgebra proporciona la capacidad procedimental para transitar desde el planteamiento teórico de un problema hasta su solución cuantitativa. Por su parte, las funciones representan el objeto de estudio primordial del cálculo diferencial. El cálculo es, en su núcleo, la ciencia del cambio, y las funciones son el formalismo matemático para describir cómo una cantidad varía en relación con otra. Conceptos centrales como la tasa de cambio instantánea (la derivada), los límites y la continuidad son propiedades inherentes al comportamiento de las funciones. Una comprensión cabal de sus dominios, rangos y representaciones gráficas es crucial para interpretar geoméricamente la derivada como la pendiente de la recta tangente y, por ende, para visualizar y comprender intuitivamente los fenómenos que el cálculo modela.

En conclusión, mientras el álgebra proporciona las herramientas operativas, el estudio de funciones aporta el contexto y el objeto de análisis. Reconociendo esta relación simbiótica, la presente obra, "Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones", ha sido estructurada para consolidar estas dos áreas pilares antes de abordar los conceptos propios del cálculo, garantizando así una comprensión genuina y duradera de sus principios fundamentales.

Este libro "Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones", está dirigido a estudiantes que ingresan al nivel universitario, los cuales ya tienen alguna experiencia previa de un curso de álgebra el libro trata principalmente de 11 temas esenciales de álgebra y principios de funciones: 1) Números Reales; 2) Expresiones Algebraicas; 3) Productos Notables y Factorización; 4) Expresiones Racionales; 5) Ecuaciones Algebraicas; 6) Desigualdades; 7) Ecuaciones de Rectas; 8) Ecuaciones Lineales Simultáneas; 9) Exponentes y Logaritmos; 10) Sistemas de Ecuaciones no Lineales; 11) Funciones Reales. Adicionalmente, 2 temas de cálculo diferencial como introducción al cálculo diferencial: 12) Límites de Funciones y 13) Derivada de Funciones.

El esquema de desarrollo plasmado en este libro inicia i) presentando el concepto a trabajar de forma breve; ii) hace énfasis en las propiedades aplicadas al resolver un problema particular, mostrando ejemplos simples para aplicar estas propiedades; iii) presenta ejemplos de diferentes grados de dificultad, resolviendo paso a paso y explicando el proceso resolución; iv) aclara durante el proceso de resolución, los errores algebraicos típicos que suelen cometerse; iv) utiliza como herramienta de apoyo el Software GeoGebra (<http://www.geogebra.org/>) el cual permite interactuar dinámicamente en la geometría, el álgebra, el análisis matemático.

Este esquema de trabajo pretende nivelar, reforzar y profundizar en los estudiantes los conocimientos necesarios para los cursos de matemáticas posteriores. El presente texto invita a desarrollar en los estudiantes habilidades de manejo algebraico y operatividad en los catorce temas del contenido de este libro; además de reforzar y aclarar los conceptos algebraicos identificados como los más críticos y en los que más errores se cometen.

Es importante hacer notar que el material presentado en este libro es básico en un curso de cálculo diferencial e integral, por lo tanto, el presente texto puede ser una herramienta de apoyo para los estudiantes que cursan un nivel posterior de matemáticas. Ha sido identificado que gran parte de los problemas que un estudiante se encuentra en un curso de matemáticas avanzadas son propiamente de los doce temas de álgebra y funciones tratados en este libro.

Capítulo 1

Números Reales

1.1 Conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos o elementos. Se dice que un elemento pertenece a un conjunto si el elemento cumple o hace verdadera la proposición o propiedad que define al conjunto.

A los conjuntos se les denota con letras mayúsculas del alfabeto griego o latino (A , B , Π , Ω , etc.) y a sus elementos con letras minúsculas (a , b , x , β , etc.).

La representación simbólica de un conjunto es,

$$A = \{a \mid P\}$$

esto es, el elemento a pertenece al conjunto A si cumple la proposición P . La barra vertical " $\mid$ " puede leerse como "*tal que...*". Otra forma simple es, el conjunto A tiene elementos a que satisfacen la propiedad P .

La pertenencia del elemento a al conjunto A se indica por,

$$a \in A$$

la no pertenencia de un elemento a un conjunto por,

$$s \notin A$$

Por ejemplo,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

es una lista o colección de todos los elementos que satisfacen P . O equivalentemente, esto se indica por

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero, } 0 < x < 7\}$$

la descripción es entonces: A es un conjunto de elementos x , tal que x es un entero entre 0 y 7.

Otros conjuntos pueden ser:

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, \dots\} \\ B &= \{x \mid x = 2k, \ k = 1, 2, \dots\} \\ C &= \{x \mid x = 2k - 1, \ k = 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

El conjunto A y B contienen los mismos elementos, es decir, los números pares; el conjunto A contiene los elementos y el conjunto B establece la propiedad que deben cumplir el elemento x para pertenecer a este conjunto. El conjunto C es el conjunto de números impares.

En los conjuntos A , B y C los puntos suspensivos indican que la lista continua indefinidamente.

Se dice que los conjuntos $A = B$ si ambos constan de los mismos elementos, por lo contrario $A \neq C$.

Se dice que el conjunto A es un *subconjunto* del conjunto $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, o bien que el conjunto $\mathbb{R}$ *contiene* al conjunto A , lo cual se escribe como

$$A \subseteq \mathbb{R},$$

si todo elemento del conjunto A es también elemento del conjunto $\mathbb{R}$.

1.1.1 Operaciones con Conjuntos

Dados dos conjuntos arbitrarios A y B se definen las siguientes operaciones binarias importantes:

1. La **unión** de A con B , denotada por $A \cup B$ es otro conjunto C que consta de todos los elementos que están en A o en B o en ambos, esto es,

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo 1 *Se tienen las operaciones siguientes:*

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} \cup \{a, b, c\} &= \{1, 2, 3, a, b, c\} \\ \{1, 2, 3\} \cup \{3, 5\} \cup \{7\} &= \{1, 2, 3, 5, 7\} \\ \{\pi, \sqrt{2}, 3.9, r\} \cup \{a, b, c\} &= \{3.9, \pi, a, b, c, r, \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

2. La **intersección** de A con B , denotada por $A \cap B$ es otro conjunto C que consta de todos los elementos que están en A como en B , esto es,

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo 2 *Operaciones con conjuntos*

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\} &= \{2\} \\ \{1, 2, 3\} \cap \{a, b, c\} &= \emptyset \\ \{1, 2, 3, c\} \cap (\{2, 4, 6\} \cup \{a, b, c\}) &= \{2, c\} \\ \{-2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2\} &= \{0\} \\ \{1, 2, 3\} \cap \{\} &= \emptyset \end{aligned}$$

Si no existe algún elemento que satisfice la proposición P en un conjunto, se dice que es un conjunto vacío y se denota por el símbolo $\emptyset$. Note que el conjunto $\{0\}$ y el conjunto $\emptyset$ son dos conjuntos diferentes, en el primer conjunto el 0 (cero) es el único elemento del conjunto, mientras que en el segundo no existe elemento alguno.

1.2 Conjunto de los Números Reales

El conjunto de todos los números reales se denota por el símbolo $\mathbb{R}$, los subconjuntos más importantes del conjunto de los números reales son:

1. **Números Naturales**, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$
2. **Números Enteros**, $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
3. **Números racionales**, $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Según la definición del conjunto $\mathbb{Q}$, un número racional es el cociente de dos números enteros, tal como $\frac{p}{q}$, donde el numerador (p) y el denominador (q) pueden ser cualquier número del conjunto $\mathbb{Z}$, excepto que q no puede ser cero. Bajo estas condiciones, se dan algunos ejemplos de estos:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{-3}{6}, \quad 45 = \frac{45}{1}, \quad \frac{0}{6}, \quad \frac{5}{-9}, \quad \text{etc.}$$

un número racional es una fracción, el cual tiene una representación decimal, algunos ejemplos de estos son:

$$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{1}{-8} = -0.125, \quad \frac{1}{3} = 0.3333\dots, \quad \text{etc.}$$

Es importante enfatizar que el cociente,

$$\frac{p}{0}$$

no tiene significado dentro del conjunto $\mathbb{R}$, según lo que indica la definición del conjunto $\mathbb{Q}$,

por lo tanto, se dice que el número racional con denominador cero **no existe**, por ejemplo, el cociente de números tales como,

$$\frac{8}{0}, \quad \frac{-10}{0}, \quad \frac{0}{0}, \quad \text{etc.}$$

no son números racionales, y tampoco pertenecen al conjunto de los números reales.

ACLARACIÓN IMPORTANTE. El concepto considerado a partir de la definición del conjunto $\mathbb{Q}$, es diferente de la que se establece en el Cálculo Diferencial; mientras que aquí $q = 0$, en el Cálculo Diferencial se considera que a medida que q se aproxima (o tiende) a cero sin ser cero, lo cual se denota por $q \rightarrow 0$, el cociente $\frac{p}{q}$ crece o decrece indefinidamente. Esto se observa en

el ejemplo concreto siguiente, si q se aproxima a cero por la derecha el cociente crece indefinidamente hacia un valor positivo; por otro lado, si q se aproxima a cero por la izquierda el cociente se decrece indefinidamente hacia un valor negativo.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{0.1} = 10 & \frac{1}{-0.1} = -10 \\ \frac{1}{0.01} = 100 & \frac{1}{-0.01} = -100 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{0.0000001} = 10000000 & \frac{1}{-0.0000001} = -10000000 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

simbólicamente esto se representa por,

$$\frac{p}{q} = \infty \quad \text{o} \quad \frac{p}{q} = -\infty \quad \text{cuando } q \rightarrow 0$$

El símbolo ∞ se le conoce como infinito e indica que el valor del cociente no se alcanza y su búsqueda puede prolongarse sin encontrar algún límite concreto, se dice entonces en la jerga del Cálculo Diferencial que el cociente $p/0$ está indeterminado. En Álgebra, el valor del cociente $p/0$ **no existe**, de acuerdo a la definición del subconjunto $\mathbb{Q}$ del conjunto de los números reales. En la jerga del Cálculo Diferencial se denota por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

4. **Números irracionales (I):** Un número real que no puede expresarse como un cociente de enteros o una fracción es un número irracional; en esta categoría de números se encuentran números famosos como π , e (base de los logaritmos naturales) y otros,

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689\dots \\ \pi &= 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\dots \\ e &= 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\dots \end{aligned}$$

Por simple curiosidad, en los ejemplos anteriores sólo se presentan algunos dígitos o cifras exactas de números irracionales; por ejemplo, el número π se presenta con 24 cifras exactas. Actualmente, se conoce al número π con enorme precisión, esto es con 51,539,600,000¹ cifras exactas. Las aplicaciones prácticas no requieren en general, más de cinco o seis cifras; así por ejemplo, el valor numérico utilizado para π se aproxima como el valor de 3.1416 y el valor numérico para e se puede aproximar con 2.7183.

Ejemplo 3 *Aproximación de un número irracional a un fracción. Si un número irracional se acota, entonces el número irracional puede tener una representación fraccionaria aproximada, así, por ejemplo, $\pi \approx 3.141593$ se puede aproximar con una fracción², está es,*

$$\pi \approx \frac{710}{226} = 3.141\,593$$

1.2.1 Subconjuntos de los Números Reales

Se establece que,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

esto es, los números naturales están contenidos en los números enteros, los que a su vez forman parte de los números racionales, y estos últimos están contenidos en los números reales. Por otro lado,

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

indica que los números irracionales son sólo un subconjunto de los números reales. En conclusión, el conjunto de los números reales es el conjunto más grande que contiene a todos los demás conjuntos de números.

¹Historia de las Matemáticas. En los últimos 10,000 años.

Ian Stewart, Ed. Crítica Barcelona, 2012

²<http://www.karmany.net/>

1.3 Propiedades de los Números Reales

Considere tres números reales arbitrarios a , b y c . Se establecen las siguientes propiedades:

1.3.1 Propiedad de la Adición y de la Multiplicación

1. Propiedad conmutativa de la adición

$$a + b = b + a \Leftrightarrow 7 + 3 = 3 + 7$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ significa, *equivale a...* o *es lo mismo que...*

Cuando se *suman* dos números, el orden de la adición no importa.

2. Propiedad conmutativa de la multiplicación

$$ab = ba \Leftrightarrow 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

Cuando se *multiplica* dos números, el orden no importa.

3. Propiedad asociativa de la adición

$$(a + b) + c = a + (b + c) \Leftrightarrow (2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$$

Cuando *sumas* tres números, no importa cual de los dos sumas primero.

4. Propiedad asociativa de la multiplicación

$$(ab)c = a(bc) \Leftrightarrow (3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$$

Cuando *multiplicas* tres números, no importa cual de los dos multiplicas primero.

5. Propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac \Leftrightarrow 2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

Cuando *multiplicas* un número por una *suma* de dos números, se consigue el mismo resultado que cuando se *multiplica* el número por cada término de la *suma*.

Es importante mencionar que la **multiplicación no es distributiva**, así por ejemplo, lo siguiente es **falso**,

$$\begin{aligned} 2(abc) &= (2a)(2b)(2c) \\ &= (2)(2)(2)abc \\ &= 8abc \end{aligned}$$

6. Propiedad del elemento idéntico

Suma

$$a + 0 = a \Leftrightarrow 3 + 0 = 3$$

Multiplicación

$$a \times 1 = a \Leftrightarrow -4 \times 1 = -4$$

7. Propiedad del elemento inverso

Suma

$$a + (-a) = 0 \Leftrightarrow 6 + (-6) = 0$$

El elemento inverso en la suma se conoce como el **opuesto**.

Multiplicación ($a \neq 0$)

$$a \left(\frac{1}{a} \right) = 1 \Leftrightarrow -2 \left(\frac{1}{-2} \right) = 1$$

El elemento inverso en la multiplicación se conoce como **recíproco**.

Por ejemplo si $a = 0$

$$0 \left(\frac{1}{0} \right) = 1 \Leftrightarrow \text{imposible}$$

El recíproco de cero no existe, ya que el número racional correspondiente no existe tampoco.

Ejercicio 1 Encuentre el recíproco y el opuesto en cada uno de los siguientes números.

1. -83

2. -2.5

3. $\frac{1}{6}$

4. $-\frac{6}{7}$

5. $\sqrt{6}$

6. $\frac{1}{-14}$

7. 0.25

8. $\sqrt[3]{-8}$

9. $\frac{2}{-\sqrt{16}}$

10. -1

11. $-2\frac{2}{5}$

12. $3\frac{1}{3}$

13. $5\frac{2}{7}$

14. $-\frac{21}{4}$

15. $-\sqrt{3}$

1.3.2 Propiedades de los Números Negativos

Considere los números reales arbitrarios a y b . Se definen las siguientes propiedades:

1. $(-1)a = -a \Leftrightarrow (-1)5 = -5$

2. $-(-a) = a \Leftrightarrow -(-5) = 5$

3. $(-a)b = a(-b) = -(ab) \Leftrightarrow (-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$

4. $(-a)(-b) = ab \Leftrightarrow (-4)(-3) = 4 \cdot 3$

5. $-(a+b) = -a-b \Leftrightarrow -(3+5) = -3-5$

6. $-(a-b) = b-a \Leftrightarrow -(5-8) = 8-5$

1.3.3 Propiedades de la División

Si a y b son números reales y $b \neq 0$, la división de a entre b esta definida por,

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

en la definición anterior, a se conoce como dividendo y b es el divisor. La división se interpreta también como la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

Hechos Importantes

1. La división no es conmutativa,

$$\begin{aligned}a \div b &\neq b \div a \\8 \div 2 &\neq 2 \div 8 \\4 &\neq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2. La división no es asociativa,

$$\begin{aligned}a \div (b \div c) &\neq (a \div b) \div c \\16 \div (4 \div 2) &\neq (16 \div 4) \div 2 \\16 \div 2 &\neq 4 \div 2 \\8 &\neq 2\end{aligned}$$

3. La división de "0" entre cualquier número real es "0",

$$\begin{aligned}\frac{0}{a} &= 0 \Rightarrow a \times 0 = 0 \\ \frac{0}{-8} &= 0 \Rightarrow (-8) \times 0 = 0\end{aligned}$$

4. La división de cualquier número real entre "0" no está definida, esto es, el número racional con denominador "cero" no existe dentro del conjunto $\mathbb{R}$. No se puede dividir por cero ninguna cantidad, ya que habría que multiplicar por el recíproco de "0"; el recíproco de cero no existe.

1.3.4 Leyes de los Signos

Las propiedades de los negativos da lugar a la conocida como leyes de los signos.

1. Leyes de los signos de la multiplicación.

- (a) El producto de dos números del mismo signo es positivo.
- (b) El producto de dos números de signo contrario es negativo.

$$\begin{aligned}(+) \times (+) &= (+) \\ (-) \times (-) &= (+) \\ (+) \times (-) &= (-) \\ (-) \times (+) &= (-)\end{aligned}$$

2. Leyes de los signos de la división.

- (a) La división de dos números del mismo signo es positivo.
- (b) La división de dos números de signo contrario es negativo.

$$(+)\div(+) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

$$(-)\div(-) = \frac{(-)}{(-)} = (+)$$

$$(+)\div(-) = \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

$$(-)\div(+) = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

1.3.5 Jerarquía de Operaciones

La jerarquía es un criterio que establece un orden de precedencia, esto es, en qué dirección, qué es primero y qué después. La jerarquía de operaciones establece los criterios para llevar a cabo las operaciones aritméticas. Ésta es la siguiente:

1. Efectuar las operaciones que se encuentre entre los signos de agrupamiento, tales como, (), [] o { }, efectuando primero las operaciones en los signos de agrupamiento más internos y desplazando las operaciones hacia los externos, siguiendo el orden dictado a continuación.
2. Efectuar las operaciones indicadas por las potencias, enteras o fraccionarias.
3. Llevar a cabo las multiplicaciones y divisiones.
4. Realizar las sumas y restas.
5. Efectuar las operaciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 4 *Aplicación de la jerarquía de operaciones.*

1.

$$\begin{aligned} 5 - (8 + 3) - 6 &= 5 - 11 - 6 \\ &= -12 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 35 \div 7 + 12 &= 5 + 12 \\ &= 17 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 6 - 2[14 - (7 - 10)] &= 6 - 2[14 - (-3)] \\ &= 6 - 2(14 + 3) \\ &= 6 - 2(17) \\ &= 6 - 34 \\ &= -28 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{6 \times 4 - 5 \times (-2)}{3 \times 7 + 11 \times 3} &= \frac{6 \times 4 + 10}{3 \times 7 + 11 \times 3} \\
&= \frac{24 + 10}{21 + 33} \\
&= \frac{34}{54} = \frac{17}{27}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2 Aplique la jerarquía de operaciones en las siguientes expresiones.

1. $5 - (8 + 3 - 6)$

2. $5 - 8 + (3 - 6)$

3. $48 \div (-4)(6)$

4. $100 \div (8 \times 7)$

5. $19 + 25 \div (-5)$

6. $\frac{11 + (9 - 8)}{(7 - 5) + 1}$

7. $\frac{3(27 - 6)}{5 \times 3 - 6}$

8. $36 \div 4 \times 5$

9. $20 \div (54 \div (2 + 7))$

10. $32 - 17 + 8 \times 9$

11. $\frac{6 - (14 - 5)}{12 + 8}$

12. $\frac{6 \times 5 - 40}{6(5 - 40)}$

13. $(124 \times 2) \div (4(-5))$

14. $9 \times 8 - 12 \div 3$

15. $(9 \times 8 - 12) \div 3$

16. $9 \times (8 - 12) \div 3$

17. $9 \times (8 - (12 \div 3))$

18. $(7 \times 2) + (10 - 4) \div 2$

19. $7 \times (2 + 10 - 4) \div 2$

20. $7 \times 2 + 10 - 4 \div 2$

21. $(7 \times 2 + 10)(-4 \div 2)$

22. $(7 \times (2 + 10) - 4) \div 2$

23. $16 - 12 - (8 - (24 \div 4))$

24. $16 - 12 - 8 - 24 \div 4$

25. $16 - (12 - 8 - 24) \div 4$

26. $(16 - 12 - 8 - 24) \div 4$

27. $16 - (12 - 8) - (24 \div 4)$

28. $5^2 - 3^2 + 3 \times 9 \div 3$

29. $9 \times 3 - 5^2 - (-3)^2$

30. $-72 \div (56 \div (-7))$

31. $\left(\frac{1}{3}\right)(-4^2)$

32. $(-5)^3 \div (10^2 \div 4^2)$

1.3.6 Propiedades de las Fracciones

Considere tres números arbitrarios a , b y c del conjunto $\mathbb{Z}$. El cociente que puede formarse entre estos números da lugar a números fraccionarios con denominador diferente de cero, que cumplen las reglas siguientes.

$$1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

Para multiplicar fracciones, multiplique numerador por numerador y denominador por denominador.

$$2. \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Dividendo}} \div \underbrace{\frac{c}{d}}_{\text{Divisor}} = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{Dividendo}} \cdot \underbrace{\frac{d}{c}}_{\text{recíproco}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Para dividir fracciones, multiplique el dividendo por el recíproco del divisor.

$$3. \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$$

Para sumar fracciones con el mismo denominador, solo sume los numeradores, el denominador es el mismo.

$$4. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \Leftrightarrow \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$$

Para sumar fracciones con diferente denominador, encuentre un denominador común, luego sume los numeradores. O convierta las fracciones a fracciones equivalentes con el mismo denominador.

$$5. \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$$

Cancele los números que son factores comunes en el numerador y denominador.

Ejemplo 5 Determine si las fracciones $\frac{14}{21}$ y $\frac{42}{63}$ son equivalentes.

Dos fracciones son equivalentes (iguales) si la división de ambas es la unidad, por lo tanto,

$$\frac{14}{21} \div \frac{42}{63} = \frac{\frac{14}{21}}{\frac{42}{63}} = 1$$

$$\frac{14}{21} \left(\frac{63}{42} \right) = 1$$

$$\left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right) = 1$$

$$1 = 1$$

lo cual prueba que ambas fracciones son equivalentes. De otra forma, dos fracciones son equivalentes cuando su producto cruzado es igual.

De esta forma $\frac{14}{21}$ y $\frac{42}{63}$, son equivalente ya que,

$$\begin{aligned} (14)(63) &= (21)(42) \\ 882 &= 882 \end{aligned}$$

Ejemplo 6 Dada la fracción $\frac{3}{5}$ determine por los menos tres fracciones equivalentes.

Para obtener fracciones equivalente multiplique numerador y denominador por un mismo número, por ejemplo,

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{20}$$

todas las anteriores son fracciones equivalentes.

Ejemplo 7 Operaciones con fracciones.

$$1. \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{-3}\right) \left(\frac{4}{20}\right) = \frac{3 \times 5 \times 4}{5(-3)20} = \frac{4}{-20} = -\frac{1}{5}$$

$$2. \frac{3}{4} \div \frac{5}{10} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{5} = \frac{3 \times 10}{4 \times 5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$3. \frac{5}{8} + \frac{3}{4 \times 2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$4. \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Convertir $\frac{1}{2}$ a una fracción equivalente con denominador 4.

$$5. \frac{7}{16} - \frac{3}{4} = \frac{7}{16} - \frac{3}{4} \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{7}{16} - \frac{12}{16} = \frac{-5}{16}$$

Convertir $\frac{5}{4}$ a una fracción equivalente con denominador 16.

$$6. \frac{4}{3} - \frac{3}{24} = \left(\frac{8}{8}\right) \frac{4}{3} - \frac{3}{24} = \frac{32}{24} - \frac{3}{24} = \frac{29}{24}$$

Para sumar fracciones con el mismo denominador, convertir $\frac{4}{3}$ a una fracción equivalente con denominador 24.

$$7. \frac{2}{3} - \frac{6}{9} + \frac{7}{18} = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{6}\right) - \frac{6}{9} \left(\frac{2}{2}\right) + \frac{7}{18} = \frac{12}{18} - \frac{12}{18} + \frac{7}{18} = \frac{12 - 12 + 7}{18} = \frac{7}{18}$$

Convertir $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ a fracciones equivalente con denominador 18.

Ejemplo 8 Obtener el Mínimo Común Múltiplo de 36 y 120.

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de una colección de números enteros, es el entero positivo más pequeño que es divisible por cada entero de la colección. Para obtenerlo siga el procedimiento que se ilustra a continuación:

36	2	120	2
18	2	60	2
9	3	30	2
3	3	15	3
1		5	5
1		1	

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Este procedimiento descompone a los números dados en sus factores primos. Recuerde que un número primo es un número mayor que "1" cuyos únicos factores son "1" y él mismo. El MCM estará formado por los factores comunes y no comunes de mayor potencia, así obtenemos,

$$2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$$

Así el MCM de 36 y 120 es 360, y no $(36)(120) = 4320$. El MCM puede indicarse por $MCM(36, 120) = 360$. Note que,

$$\frac{360}{36} = 10$$

$$\frac{360}{120} = 3$$

Ejercicio 3 Muestre que el MCM de la siguiente colección de números es el indicado.

1. $MCM(35, 15, 65) = 1365$
2. $MCM(18, 72, 36) = 72$
3. $MCM(4, 6, 18) = 36$
4. $MCM(5, 50, 120) = 600$

Ejemplo 9 Resuelva la operación siguiente,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$$

Para sumar esta fracción es necesario encontrar el MCM de 36 y 120. En el ejemplo anterior se determinó que,

$$MCM(36, 120) = 360$$

lo cual indica que 360 será el Mínimo Común Denominador (MCD), así se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{5}{36} + \frac{7}{120} &= \frac{5 \times 10 + 3 \times 7}{360} \\ &= \frac{50 + 21}{360} \\ &= \frac{71}{360} \end{aligned}$$

Ejemplo 10 Resuelva la operación siguiente.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{5}{3}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{5}{3}} &= \frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{6} + \frac{10}{6}\right)\end{aligned}$$

Fracción equivalente: $\frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$, luego,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{5}{3}} &= \frac{2}{3} \div \left(\frac{11}{6}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{6}{11} \\ &= \frac{12}{33} = \frac{4}{11}\end{aligned}$$

Ejercicio 4 Aplicando las propiedades de las fracciones resuelva las operaciones siguientes.

1. $\frac{6}{9} + \frac{5}{9}$

2. $\frac{7}{21} - \frac{5}{21}$

3. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}$

4. $\frac{1}{42} + \frac{6}{42} - \frac{7}{42} + \frac{34}{42}$

5. $\frac{3}{2} + \frac{2}{10}$

6. $\frac{1}{3} + \frac{2}{4}$

7. $\frac{1}{10} + \frac{2}{6}$

8. $\frac{50}{100} + \frac{1}{2}$

9. $\frac{3}{2} \times \frac{2}{10}$

10. $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$

11. $\frac{9}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

12. $\frac{1}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$

13. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$

14. $\frac{4}{3} \div \frac{9}{7}$

15. $\frac{12}{3} \div \frac{1}{2}$

16. $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$

17. $\frac{10}{21} \div \frac{2}{5}$

18. $\frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

Ejercicio 5 Aplicando las propiedades de las fracciones y la jerarquía de operaciones resuelva lo siguiente.

1. $\left(-1\frac{1}{2}\right) \div 1\frac{1}{16}$

2. $5\frac{1}{3} \div \left(-\frac{4}{9}\right)$

6. $\left(2\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{1}{3}\right)$

3. $-\left(4\frac{1}{6} \div 2\frac{1}{2}\right) \div 1\frac{2}{3}$

7. $\left(\frac{5}{9} \div 6\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{6}{5}\right)$

4. $5[(208 \div (-4)) \div 4]$

8. $\frac{(-23 + 35) + 2(56 - 48)}{17 - 31}$

5. $\left(-\frac{25}{3}\right) \div \left(\frac{8}{5} \div \frac{2}{5}\right)$

Ejercicio 6 Escriba el procedimiento para resolver lo siguiente:

1. ¿Qué fracción se encuentra exactamente entre $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$.

2. Simplifica la fracción $\frac{162}{360}$.

3. ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{2}{8}$ y $\frac{8}{12}$.

4. Utilice el concepto de fracción equivalente para sumar $\frac{3}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$.

Ejercicio 7 De las proposiciones siguientes responde si es falso (**F**) o verdadero (**V**) y justifique su respuesta.

1. (____) Una fracción es un cociente de dos números, por ejemplo, $\frac{a}{b}$, al número a se le llama denominador y al número b se le llama numerador.

2. (____) Se dice que dos fracciones son equivalente si su valor es igual.

3. (____) Para obtener una fracción equivalente multiplique numerador y denominador por un mismo factor, por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \dots$$

4. (____) Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo factor, el valor de la fracción se multiplica.

5. (____) Un número primo es un número que tiene exactamente dos factores distintos

6. (____) Un número es divisible por 4, si sus dos últimas cifra son cero o múltiplo de 4.

7. (____) Un número es divisible por 3, si la suma de sus digitos es un múltiplo de 3.

1.4 Recta Numérica

El conjunto de los números reales pueden ser representados gráficamente en la recta numérica, conocida como eje coordenado, recta de los números reales o recta real. La Figura 1 muestra esta relación.

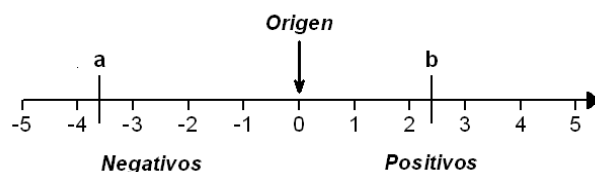


Figura 1. Recta Numérica.

Los números negativos se encuentran a la izquierda del origen (0) y los números positivos a la derecha de éste. Un valor muy grande negativo se representa por $-\infty$ y un valor grande positivo por ∞ .

Para a y b cualesquiera números del conjunto de los reales, si a está situado a la izquierda de b en la recta numérica (Figura 1), se dice que a **es menor que** b , simbólicamente se escribe como,

$$a < b,$$

el símbolo "<" significa **menor que**, esta relación se conoce como desigualdad, otra forma de denotar lo anterior es,

$$b - a > 0,$$

lo cual significa que la diferencia $b - a$ es positiva, que es lo mismo decir que b **es mayor que** a ,

$$b > a,$$

el símbolo ">" significa **mayor que**.

Otros desigualdades establecidas en la recta numérica son,

$$a \leq b \quad \text{y} \quad b \geq a,$$

lo cual significa que,

$$a \leq b : \begin{cases} a < b \\ \text{o} \\ a = b \end{cases} \quad \text{y} \quad b \geq a : \begin{cases} b > a \\ \text{o} \\ b = a \end{cases}$$

1.4.1 Intervalos

Un conjunto de números reales que corresponden geoméricamente a un segmento acotado en la recta numérica se le llama **intervalo**. Así se tiene,

1. Intervalo abierto:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

su representación gráfica equivalente es,



los círculos vacíos significan que el valor de x no puede ser a o b , esto es, los extremos del intervalo no se incluye en el conjunto (a, b) . Una representación gráfica utilizada en otros textos es,



2. Intervalo cerrado:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

su representación gráfica equivalente es,



los círculos rellenos significan que el valor de x puede ser a o b , esto es, los extremos del intervalo si están incluidos en el conjunto $[a, b]$. Una representación gráfica equivalente es,



A partir de estas representaciones gráficas y simbólicas se establecen otras por una combinación de las anteriores.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Observe que a un intervalo determinado le corresponde una desigualdad y una representación gráfica en la recta numérica.

Ejemplo 11 Para los intervalos o desigualdades siguientes escriba la notación de intervalo o desigualdad según corresponda y grafíquelo en la recta numérica.

1. Notación de intervalo: $(-3, 0)$; notación de desigualdad: $-3 < x < 0$; su gráfica es,



2. Notación de intervalo: $(-6, -1/2]$; notación de desigualdad: $-6 < x \leq -1/2$; su gráfica es,



3. Notación de desigualdad: $-5 \leq x$; notación de intervalo: $[-5, \infty)$; su gráfica es,



Ejercicio 8 Resuelva lo siguiente.

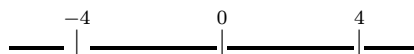
1. Expresé el intervalo en forma de desigualdad, y luego grafique el intervalo.

- (a) $(-3, 0)$
 (b) $(-6, -1/2]$
 (c) $[2, \infty)$
 (d) $(-\infty, 1]$
 (e) $[-2, 3]$
 (f) $(-5, \infty)$
2. *Expresa la desigualdad con notación de intervalo, y después grafique el intervalo correspondiente.*
- (a) $x \leq 1$
 (b) $1 \leq x \leq 2$
 (c) $x \geq -5$
 (d) $-5 < x < 2$
 (e) $-3 < x \leq 2$
 (f) $x > 4$
3. *Grafique el conjunto.*
- (a) $(-2, 0) \cup (-1, 1)$
 (b) $(-2, 0) \cap (-1, 1)$
 (c) $[-4, 6) \cup [0, 8)$
 (d) $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$
4. *Grafique en la recta numérica el conjunto que se describe y exprese la desigualdad con notación de intervalo.*
- (a) *Enteros menores que 5, pero más grandes que o igual a 0.*
 (b) *Enteros mas grandes que -4 .*
 (c) *Enteros mayores que -3 , pero menores o iguales que 5.*
 (d) *Enteros menores o iguales a -2 .*
5. *Grafique en intervalo $\left(-6, \frac{-1}{2}\right)$ y expreselo en notación de desigualdad.*
6. *Grafique la desigualdad $-5 \leq x \leq 2$ y expreselá en notación de intervalo.*

1.5 Valor Absoluto y Distancia

La distancia entre cualquier número a y el origen "0" es llamado valor absoluto del número a y se escribe como $|a|$.

Por ejemplo, cada uno de los números -4 y 4 están a una distancia de 4 unidades del origen.



se tiene

$$|4| = 4 - 0 = 4$$

y

$$|-4| = 0 - (-4) = -(-4) = 4.$$

En general, si a es un número real, entonces el valor absoluto de a se define por,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 12 Determine el valor absoluto de los números siguientes.

1. $|7|$: $7 > 0$, esto es, 7 es un número positivo, por definición, $|7| = 7$.

Lo que significa que en la recta numérica, la distancia entre el número 7 y el origen es de 7 unidades.

2. $|-25|$: $-25 < 0$, esto es, -25 es un número negativo, por definición, $|-25| = -(-25) = 25$.

Lo que significa que en la recta numérica, la distancia entre el número -25 y el origen es de 25 unidades.

1.6 Propiedades del Valor Absoluto

Sea a , b y c números reales, con $c > 0$ y n un entero.

1. $|a| \geq 0$

$$\begin{aligned} |0| &= 0 \\ |-3| &= 3 \\ |a| &= -2 \text{ (Falso)} \end{aligned}$$

2. $|ab| = |a| |b|$

$$\begin{aligned} |(-3)(2)| &= |(-3)(2)| \\ |-6| &= |-3| |2| \\ 6 &= 3(2) \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

3. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{-5}{6} \right| &= \frac{|-5|}{|6|} \\ \frac{5}{6} &= \frac{|-5|}{|6|} \\ \frac{5}{6} &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

4. $|a^n| = |a|^n$

$$\begin{aligned} |-2^3| &= |-2|^3 \\ |-8| &= 2^3 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

5. $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$

$$\begin{aligned} |x| &= 5 \Leftrightarrow x = \pm 5 \\ |-5| &= 5 \text{ y } |5| = 5 \end{aligned}$$

6. $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$

$$\begin{aligned} |x| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x < 3 \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{c} -3 \qquad \qquad 3 \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

7. $|x| > c \Leftrightarrow x < -c \text{ o } x > c$

$$\begin{aligned} |x| > 4 &\Leftrightarrow x < -4 \text{ ó } x > 4 \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{c} -4 \qquad \qquad 4 \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

1.7 Distancia entre Puntos en la Recta Numérica

Si a y b son dos números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta numérica es

$$\begin{aligned} d(a, b) &= |b - a| \\ &= |a - b| \end{aligned}$$



Ejemplo 13 Evalúe las operaciones siguientes.

1. $d(-3, 7)$

Por definición $d(-3, 7) = |7 - (-3)| = |7 + 3| = |10| = 10$.

Lo que significa que en la recta numérica, la distancia entre el número -3 y 7 , es de 10 unidades.

2. $d(5, -12)$

Por definición $d(5, -12) = |-12 - 5| = |-17| = -(-17) = 17$.

Lo que significa que en la recta numérica, la distancia entre el número 5 y -12 , es de 17 unidades.

3. $d(-3, -8)$

Por definición $d(-3, -8) = |-8 - (-3)| = |-8 + 3| = -(-5) = 5$.

Ejemplo 14 Operaciones con valor absoluto.

1. $|\sqrt{5} - 5| = -(\sqrt{5} - 5)$, ya que $\sqrt{5} < 5$

2. $||-6| - |-4|| = |6 - 4| = |2| = 2$

3. $|2 - |-12|| = |2 - 12| = |-10| = 10$

4. $-1 - |1 - |-1|| = -1 - |1 - 1| = -1 - |0| = -1 - 0 = -1$

5. $\left| \frac{|-6| - 12}{12 - |-6|} \right| = \left| \frac{6 - 12}{12 - 6} \right| = \left| \frac{-6}{6} \right| = |-1| = 1$

Capítulo 2

Expresiones Algebraicas

2.1 Variables y Expresiones Algebraicas

Una *variable* es una letra del alfabeto que puede representar a cualquier número de un conjunto dado de números, en tanto una constante representa el valor fijo de un número.

Si variables y constantes se combinan con las operaciones matemáticas de adición, sustracción, multiplicación, división, exponenciación y raíz, se obtiene una **expresión algebraica**, una expresión algebraica puede estar formada por un solo término algebraico o más de ellos, cada término se distingue porque se encuentran separados por un operador de suma o resta.

Ejemplo 15 *Se dan ejemplos de expresiones algebraicas y se identifica el número de términos algebraicos que forman la expresión.*

1. $9abc$; un término.

2. $-3xy + 2y^3$; dos términos.

3. $24ab - 9a^2 + 1 + 16b^2$; cuatro términos

4. $4x(x+1) - \sqrt[6]{(2y+1)(2y-1)}$; dos términos

5. $\frac{x^3 - 125}{x^2 + x - 6} \times \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4x - 4}}{3x^2 - 13x - 10} \times \frac{\frac{x+3}{\sqrt[3]{x+1}}}{x^2 + 5x + 25}$; un término

Una expresión algebraica que usa una sola variable, tal como,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se le conoce como *Polinomio* de grado n , donde n es un entero positivo, en la variable x ; $a_0, a_1, \dots, a_n$ son los coeficientes numéricos o constantes. Es importante notar que cada término de un polinomio en general tienen la forma,

$$\text{coeficiente (variable)}^{\text{potencia constante}}$$

esto es, base variable, elevada a un exponente constante. El grado de un polinomio **en una variable** es reconocido fácilmente por el exponente mayor que aparece en la variable o simplemente por la potencia más alta de la variable del polinomio.

Un polinomio es una suma de términos de la forma ax^k , llamados *monomios*, donde a es una constante y k es un entero no negativo. Un *binomio* es la suma de dos monomios, un *trinomio* es la suma de tres términos, así sucesivamente.

El grado de un polinomio **en dos o más variables** es el mayor de los grados de los monomios que forman el polinomio, después de simplificar el polinomio.

Ejemplo 16 Determine el grado de los monomios siguientes.

1. $25xy^3z^2$.

El grado de x es de 1, el grado de y es de 3, el grado de z es de 2; el grado del monomio es la suma de los grados de todas sus variables, esto es,

$$1 + 3 + 2 = 6$$

esto es, la potencia resultante de la multiplicación de la tres variables es a la sexta.

2. $-3r^2s^6w^5z^7$.

El grado de r es de 2, el grado de s es de 6, el grado de w es de 5, el grado de z es de 7; el grado del monomio es la suma de los grados de todas sus variables, esto es,

$$2 + 6 + 5 + 7 = 20$$

Ejemplo 17 Determine el grado de los polinomios siguientes.

1. $-4x^2y^3z + 5xy - 2yz^4$

El grado del término $-4x^2y^3z$ es de 6, el grado del término $5xy$ es de 2, el grado del término $-2yz^4$ es de 5.

El polinomio es de grado 6, ya que es el mayor de los grados que aparece en los monomios es 6.

2. $-w^2 + 3w^5 - \sqrt{3}w^3 + w^{11} - 30w^9$

El polinomio es de grado 11, ya que el mayor exponente de la variable w es 11.

Para facilitar las operaciones entre polinomios, es recomendable escribir el polinomio en forma ordenada de acuerdo a una de las variables, en orden ascendente o descendente del grado de la variable elegida.

Ejemplo 18 Ordene en orden descendente el polinomio siguiente.

1. $6xy^2z^5 + 2x^4y + 3x^2y^7z - 11x^5z^2 - 7x^3y^6 + 1$

Ordenando el polinomio en orden descendente con respecto a x :

$$-11 \underbrace{x^5}_{\text{grado 5}} z^2 + 2 \underbrace{x^4}_{\text{grado 4}} y - 7 \underbrace{x^3}_{\text{grado 3}} y^6 + 3 \underbrace{x^2}_{\text{grado 2}} y^7 z + 6 \underbrace{x}_{\text{grado 1}} y^2 z^5 + 1$$

Ordenando el polinomio en orden descendente con respecto a y :

$$3x^2 \underbrace{y^7}_{\text{grado 7}} z - 7x^3 \underbrace{y^6}_{\text{grado 6}} + 6x \underbrace{y^2}_{\text{grado 2}} z^5 + 2x^4 \underbrace{y}_{\text{grado 1}} - 11x^5 z^2 + 1$$

Ordenando el polinomio en orden descendente con respecto a z :

$$6xy^2 \underbrace{z^5}_{\text{grado 5}} - 11x^5 \underbrace{z^2}_{\text{grado 2}} + 3x^2y^7 \underbrace{z}_{\text{grado 1}} - 7x^3y^6 + 2x^4y + 1$$

2.1.1 Término Semejante

En una expresión algebraica un **término semejante** es un término con las misma(s) variable(s) elevada(s) a la misma potencia. Dos términos son semejantes sólo si son iguales o difieren en sus coeficientes numéricos, no importa el orden de escritura de las variables en el término algebraico, por lo general, cada término algebraico se escribe en orden alfabético.

Ejemplo 19 Identificación de términos semejantes.

Los términos algebraicos siguientes:

$$\begin{array}{lll} 4x & y & -8x; \\ -2a^2x & y & 5a^2x; \\ -2a^2xy^3 & y & -y^3a^2x\sqrt{3}; \\ z^2x^3\sqrt[2]{3} & y & \sqrt[4]{3}(z^2x^3). \end{array}$$

son términos semejantes.

Ejemplo 20 Simplificación de expresiones algebraicas. Para reducir términos semejantes en una expresión algebraica es necesario sumar los coeficientes numéricos de tales términos.

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3x - 8x &= (2 + 3 - 8)x \\ &= -3x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 7x^3 &= (2 - 5)x^2 + (3 + 7)x^3 \\ &= -3x^2 + 10x^3 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 5x^3 + 7x^3 - 10x^3 + 4x^3 &= (5 + 7 - 10 + 4)x^3 \\ &= 6x^3 \end{aligned}$$

2.2 Operaciones con Expresiones Algebraicas

2.2.1 Adición, Sustracción y Simplificación de Expresiones Algebraicas

Regla para sumar o restar dos polinomios Para sumar o restar dos polinomios se escriben uno a continuación de otro con sus respectivos signos, se agrupan los términos semejantes y se reducen (simplifican).

Ejemplo 21 Suma y resta de polinomios.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Sumar: } 4a^2 - 10ab + 6b^2 & \quad y \quad -3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab \\ &= (4a^2 - 10ab + 6b^2) + (-3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab) \\ &= 4a^2 - 10ab + 6b^2 - 3a^2 + 5a^2b - 11b^2 - ab \\ &= (4a^2 - 3a^2) + (-10ab - ab) + (6b^2 - 11b^2) + 5a^2b \\ &= a^2 + (-11ab) + (-5b^2) + 5a^2b \\ &= a^2 - 11ab - 5b^2 + 5a^2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Restar: } (5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) & \quad \text{menos} \quad (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10) \\
 &= (5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12) - (6x^3 - 9xy^2 + 8x - 10) \\
 &= 5x^3 + x^2y - 7xy^2 + 12 - 6x^3 + 9xy^2 - 8x + 10 \\
 &= -x^3 + x^2y + 2xy^2 + 22 - 8x
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Sumar: } -3a^2 - 11ab + 5b^2 \quad y \quad 2a^2 - ab - 11b^2 + 5a^2b$$

Para sumar también se pueden alinear verticalmente los términos semejantes y después sumar.

$$\begin{array}{r}
 -3a^2 \quad - \quad 11ab \quad + \quad 5b^2 \\
 2a^2 \quad - \quad 25ab \quad - \quad 11b^2 \quad + \quad 5a^2b \\
 \hline
 -a^2 \quad - \quad 36ab \quad - \quad 6b^2 \quad + \quad 5a^2b
 \end{array}$$

Ejercicio 9 Efectúa las siguientes operaciones de suma, resta y simplificación de polinomios

1. $(3y^3 + 4y - 7) + (-4y^3 - y + 10)$
2. $(x^3 - 7x + 4x^2 - 2) - (2x^2 - 9x + 4)$
3. $(4x^4 + x^3y - 8x^2y + 3xy^5) + (5x^5 - 4x^4 + 6x^3y - 2x^2y^2 + 1)$
4. $(z^4 - 8z^3 + 2) + (8z^3 - 5z^2 + z)$
5. $(6a^2 - 8a + 12b^3) - (-11a^2 + 6b^3)$
6. $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - b^2)$
7. $(15x^7y^8 - 18x^5y^9 + 21x^4y^{11} + 5) - (7x^7y^8 - 14x^5y^9 + 21x^4y^{11} + xy^{14})$
8. $-(47a^4b^6c^8 + 72a^3b^3c^3) - (80a^8b^2c^{10} - 54a^{11}b) - (74a^4b^6c^8 + 27a^3b^3c^3 + 8a^8b^2c^{10} + 45a^{11}b)$

Simplificación de Expresiones Algebraicas

Ejemplo 22 Simplifique la expresión algebraica $5(-9z - 7(z - (z + 6)))$.

Inicie la operación con el paréntesis más interno, simplificando y aplicando la propiedad de los signos negativos de los números reales, hasta alcanzar los paréntesis externos, así por ejemplo se tiene,

$$\begin{aligned}
 5(-9z - 7(z - (z + 6))) &= 5(-9z - 7(z - z - 6)) \\
 &= 5(-9z - 7(-6)) \\
 &= 5(-9z + 42) \\
 &= 210 - 45z
 \end{aligned}$$

esquemáticamente se puede representar como,

$$\underbrace{5 \left(-9z - 7 \left(\underbrace{z - (z + 6)}_{-6} \right) \right)}_{\underbrace{-7(-6)=42}} = 210 - 45z$$

$$\underbrace{5(-9z + 42)}_{5(-9z + 42) = -45z + 210}$$

Ejemplo 23 Simplifique la expresión algebraica

$$\frac{6b}{a} + \frac{15b - 2a}{a} - \frac{4 - 2b + 4a}{a}$$

En el tercer término de la expresión algebraica, la línea horizontal del cociente funciona como un signo de agrupamiento, de tal forma que se puede aplicar la propiedad de las fracciones siguiente,

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

note que todos los términos de la expresión algebraica tiene el mismo denominador,

$$\begin{aligned} \frac{6b}{a} + \frac{15b - 2a}{a} - \frac{4 - 2b + 4a}{a} &= \frac{6b + 15b - 2a - (4 - 2b + 4a)}{a} \\ &= \frac{21b - 2a - 4 + 2b - 4a}{a} \\ &= \frac{23b - 6a - 4}{a} \end{aligned}$$

Ejercicio 10 Simplifique las expresiones algebraicas siguientes.

1. $-(-(-x))$
2. $a - (-(-(-(-a))))$
3. $b - (b - (b - (b - (b - (b - a)))))$
4. $e - (e - y)$
5. $x - (x + y)$
6. $x - (e + x) + e$
7. $(x - y) + z$
8. $(e - y) - (e + z)$
9. $(a + b) - (a - c)$
10. $4xyz - 2(3 - 3xyz) - 3(5xyz - 2)$
11. $((e - y - z) - (e - y - z)) - ((w - z) - (z - e))$
12. $(x - y) - (((x - z) - (w - x)) - (x - t))$
13. $8xyz - (9 - 3xyz) - (5xyz - 21)$
14. $(-2(3x - 9y) - (-5x + 7y)) - 2x - 6y$
15. $(e^3 - (7 - 4e^3)) - (6 - (-2e^3)) + 9e^3$
16. $(5 - x) - ((8 - (6 - y)) - (z - (7 - (5 - w))))$
17. $7x - (3y - (4z - 6) + 3) - (5 - 8w) + 11$
18. $9(r - (4s - 6(3 - 2t))) - 5(2(w - 10) - (3 - c))$
19. $(10x - y + 4) - (-(-7x - 21 + 3y) - (-3(-11y + 9x - 5)))$
20. $-2(7x - (-7x + 5y - 1 + 6(x - 8y + 9))) - (4y - 8)$
21. $-(-e + 1(e - 4(-6e + 5(-9e - 7(e - (e + 6)))))$

Aclaración Importante. Un error muy común al operar con expresiones algebraicas es considerarlas ecuaciones, de tal forma que se comete algunos errores típicos. Se muestra ejemplos en específico para cada uno de estos errores.

1. En la expresión algebraica,

$$-x^2 + 3x - 2$$

si se requiere quitar el signo negativo del término cuadrático, se multiplica toda la expresión por (-1) dando lugar a,

$$x^2 - 3x + 2$$

esta expresión es diferente a la original. El error es recurrente porque se piensa que la expresión algebraica esta igualada a cero, aún cuando el signo de igual no aparece ni el cero menos. Primer error, la expresión algebraica se convierte en ecuación,

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

luego, al multiplicar por (-1) toda la expresión algebraica convertida en ecuación,

$$\begin{aligned} -1(-x^2 + 3x - 2) &= 0(-1) \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene una expresión diferente a la original.

Lo correcto es escribir la expresión como se indica,

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x^2 - 3x + 2)$$

2. En la expresión algebraica,

$$5x^2 + 15x - 20$$

para simplificar la expresión, se comete el error de dividir entre 5 dando lugar a,

$$\frac{5x^2 + 15x - 20}{5} \rightarrow x^2 + 3x - 4$$

la expresión resultante no es igual a la expresión original. Lo correcto es indicar de la forma siguiente la operación de simplificación,

$$\begin{aligned} \frac{5}{5}(5x^2 + 15x - 20) &= 5\left(\frac{5x^2 + 15x - 20}{5}\right) \\ &= 5(x^2 + 3x - 4) \end{aligned}$$

2.3 Exponentes y Radicales

Sea la multiplicación de un factor por si mismo, por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3 &= 3^2 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 &= 3^3 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 &= 3^4 \\ \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n \text{ veces}} &= 3^n \end{aligned}$$

el superíndice denota las veces en que el factor se multiplica por si mismo, el factor puede ser cualquier número real y el número de veces que se multiplica debe ser entero, no tiene ningún sentido que el factor sea "cero" ya que,

$$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0$$

En general, la expresión

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}$$

denota la *potencia n -ésima* de a , donde a es un número real llamado *base* con $a \neq 0$ y n un entero positivo llamado *potencia*, esta **notación exponencial** puede interpretarse como el producto de a por si mismo n veces.

En la expresión de la potencia n -ésima, la base puede ser algo simple como un número o una expresión algebraica tal como,

$$(a + b)^n$$

la cual tiene el mismo significado que la potencia n -ésima de un número real, esto es,

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)}_{n \text{ veces}}$$

A continuación se dan las reglas y propiedades establecidas para trabajar con operaciones con exponentes.

Ejemplo 24 *Significado de expresiones con potencia.*

1. 2^3 significa $2 \times 2 \times 2$, simbólicamente

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

2. $(ax^2y^3)^3$ significa $(ax^2y^3) \times (ax^2y^3) \times (ax^2y^3)$, simbólicamente

$$(ax^2y^3)^3 = (ax^2y^3) \times (ax^2y^3) \times (ax^2y^3)$$

3. $(x + y)^2$ significa $(x + y) \times (x + y)$, simbólicamente

$$(x + y)^2 = (x + y) \times (x + y)$$

Un **error** muy frecuente es considerar el significado de esta última expresión como,

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

lo cual es **FALSO**.

4. $(ax + \sqrt[3]{y})^3$ significa $(ax + \sqrt[3]{y}) \times (ax + \sqrt[3]{y}) \times (ax + \sqrt[3]{y})$ y **no significa**

$$\begin{aligned} (ax + \sqrt[3]{y})^3 &= (ax)^3 + (\sqrt[3]{y})^3 \\ &= a^3x^3 + y \end{aligned}$$

lo cual es **FALSO**.

La confusión es aplicar la misma regla para la potencia de factores y la potencia de una suma, así por ejemplo,

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = a^2b^2c^2$$

se confunde con,

$$(a + b + c)^2 \neq a^2 + b^2 + c^2$$

Ejercicio 11 Escribe las siguientes expresiones utilizando exponentes.

1. $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$
2. $6\frac{2}{15} \times 6\frac{2}{15} \times 6\frac{2}{15}$
3. $\left(-1\frac{4}{9}\right)\left(-1\frac{4}{9}\right)\left(-1\frac{4}{9}\right)\left(-1\frac{4}{9}\right)$
4. $\left(-\frac{7}{4}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right)$
5. $\sqrt[3]{x^2 + x - 1} \times \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \times \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$
6. $\left(\sqrt[3]{8 - x^3}\right)\left(\sqrt[3]{8 - x^3}\right)\left(\sqrt[3]{8 - x^3}\right)\left(\sqrt[3]{8 - x^3}\right)$

2.3.1 Exponente Negativo y Cero

Para cualquier número real $a \neq 0$ y n un entero positivo, se tiene,

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

y

$$a^0 = 1$$

una justificación simple de esta regla es la operación siguiente,

$$\frac{a}{a} = 1 \Leftrightarrow a^{1-1} = a^0$$

siempre y cuando $a \neq 0$ ya que la división por "cero" no está definida en $\mathbb{R}$.

Es importante mencionar que la expresión

$$0^0$$

no está definida.

Si se introduce 0^0 en alguna calculadora científica, lo correcto es que marque **ERROR**; los dispositivos con sistema iOS anterior a la versión 11.0, la calculadora científica marcaba:

$$0^0 = 1$$

lo cual es **FALSO**. Este error ha sido corregido recientemente en sus dispositivos con versiones de iOS 11.0 y superiores.

2.3.2 Leyes de los Exponentes

1. Para multiplicar dos potencias de la misma base, sume los exponentes,

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

2. Para dividir dos potencias de la misma base, substraer los exponentes,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia,

$$(ab)^n = a^n b^n$$

5. Para elevar un cociente a una potencia, elevar numerador y denominador a la potencia,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

7. Para mover un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, mueva los números y cambie el signo del exponente,

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

Ejemplo 25 *Los ejemplos siguientes muestran la utilización de las leyes de los exponentes.*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$:

$$8^2 8^5 = 8^{2+5} = 8^7$$

$$(a + \sqrt{b})^2 (a + \sqrt{b})^3 = (a + \sqrt{b})^{2+3} = (a + \sqrt{b})^5$$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:

$$\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$$

$$\frac{(a-b)^6}{(a-b)^3} = (a-b)^{6-3} = (a-b)^3$$

3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$:

$$(2^2)^5 = 2^{10}$$

$$\left[(a+b)^5\right]^3 = (a+b)^{5 \times 3} = (a+b)^{15}$$

4. $(ab)^n = a^n b^n$:

$$(4 \cdot 5)^2 = 4^2 \cdot 5^2$$

$$[(a+y)(b+c)]^3 = (a+y)^3 (b+c)^3$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}:$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2}$$

$$\left[\frac{(a+y)}{(b+x)}\right]^5 = \frac{(a+y)^5}{(b+x)^5}$$

$$6. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n:$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left[\frac{(x-z)}{(y-x)}\right]^{-3} = \left[\frac{(y-x)}{(x-z)}\right]^3$$

$$7. \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

$$\frac{6^{-2}}{7^{-5}} = \frac{7^5}{6^2}$$

$$\frac{(x+t)^{-3}}{(z+r)^{-2}} = \frac{(z+r)^2}{(x+t)^3}$$

Ejemplo 26 Simplifica las siguientes expresiones que contienen potencias de forma que no aparezcan potencias negativas.

1.

$$\frac{(3a^4)^5}{(9a^2)^3} = \frac{3^5 (a^4)^5}{(3^2)^3 (a^2)^3} = \frac{3^5 a^{4 \times 5}}{3^{2 \times 3} a^{2 \times 3}} = \frac{3^5 a^{20}}{3^6 a^6} = \frac{a^{14}}{3}$$

2.

$$\begin{aligned} (a^3 b^{-2} c^5)^{-2} (a^{-4} b^3 c^{-4})^3 &= (a^{-6} b^4 c^{-10}) (a^{-12} b^9 c^{-12}) \\ &= a^{-6-12} b^{4+9} c^{-10-12} \\ &= \frac{b^{13}}{a^{18} c^{22}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{(ab^2c^{-4})^3 (a^{-3}b^2c^{-4})^{-2}}{(a^4b^5c^{-6})^2} \right)^{-2} &= \frac{(ab^2c^{-4})^{-6} (a^{-3}b^2c^{-4})^4}{(a^4b^5c^{-6})^{-4}} \\ &= \frac{a^{-6} b^{-12} c^{24} a^{-12} b^8 c^{-16}}{a^{-16} b^{-20} c^{24}} \\ &= a^{-6-12+16} b^{-12+8+20} c^{24-16-24} \\ &= a^{-2} b^{16} c^{-16} \\ &= \frac{b^{16}}{a^2 c^{16}} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \left(\underbrace{(5a^2 - b^3)^5}_{base} \right)^2 \left(\underbrace{(5a^2 - b^3)^3}_{base} \right)^7 &= (5a^2 - b^3)^{10} (5a^2 - b^3)^{21} \\ &= (5a^2 - b^3)^{31} \end{aligned}$$

Ejercicio 12 Simplifica las expresiones algebraicas siguientes.

1. $\frac{4x^5}{12x^7}$

2. $\frac{64a^2}{32a^3}$

3. $\frac{a^4x^3}{a^5x^3}$

4. $\frac{(x+y)^2}{(x+y)^3}$

5. $\frac{8a^2b^3}{24a^3b^2}$

6. $\frac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5}$

7. $8x(-3y) \left(\frac{5}{18}x^8y \right) \left(\frac{x^2y^{17}}{10} \right)$

8. $(-s^9t) \left(-\frac{3}{4}st^{21} \right) \left(-\frac{s^4t^5}{12} \right)$

9. $(cd^{10})(-6c^2d)(-6c^2d)$

10. $\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$

11. $\left(\frac{7a^5bc^2d^4}{8} \right) \left(-\frac{6ab^6d^{15}}{28} \right) \left(-\frac{4cd}{5} \right)$

12. $(-2x^2y^3z)(9xy^3z^6) \left(\frac{x^4yz^8}{3} \right)$

13. $((z+9)^5)^5 ((z+9)^7)^7$

14. $\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^9 \right)^{11} \left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^4 \right)^4$

15. $((z-7)^{14})^{11} ((z-7)^3)^{11}$

16. $((a^4 + 3b^2 - b)^5)^9 ((a^4 + 3b^2 - b)^4)^{12}$

17. $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^5}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^{-3}}$

2.3.3 Definición de la raíz n-ésima de un número real

En el producto de factores repetidos,

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 = 625$$

se desconoce el número x que elevado a la potencia cuarta dé 625, para encontrar tal número se debe aplicar una operación inversa a la *potencia cuarta* la cual se llama *raíz cuarta* de 625; esta operación se escribe

$$\sqrt[4]{625} = x \Leftrightarrow x^4 = 625$$

el símbolo $\Leftrightarrow$ significa que ambas expresiones son equivalentes o significan lo mismo. El operador $\sqrt{}$ se llama radical e indica la operación de extracción de raíz, en general,

$$\sqrt[n]{a} = \text{índice} \sqrt{\text{radicando}}$$

n es el índice del radical y representa la raíz n -ésima.

Se tiene que $x = 5$, ya que,

$$5^4 = 625 \Leftrightarrow \sqrt[4]{625} = 5$$

La extracción de la raíz n -ésima se denota por,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

la cual define la raíz n -ésima *principal* de a , si n es par se debe tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Ejemplo 27 *Equivalencia entre notación exponencial y de radicales,*

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &= b \Leftrightarrow b^2 = a \\ \sqrt{9} &= 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9 \\ \sqrt[4]{81} &= 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81 \\ \sqrt[3]{-8} &= -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8\end{aligned}$$

2.3.4 Definición de exponentes racionales

Para dar significado a la operación de potencia fraccionaria,

$$a^{1/n}$$

se recurre al operador de radical, de tal forma que se define a un exponente fraccionario como,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

esta definición de igualdad es consistente con las leyes de los exponentes establecidas, por ejemplo,

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

con un ejemplo numérico,

$$(\sqrt{4})^2 = (4^{1/2})^2 = 4^{2/2} = 4$$

para cualquier exponente fraccionario $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros mínimos, esto es, no hay una simplificación adicional a la fracción, definimos

$$\begin{aligned}a^{m/n} &= (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m \\ &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m\end{aligned}$$

Si n es par, es necesario que $a \geq 0$.

Las leyes de los exponentes son válidas también para los exponentes fraccionarios.

Ejercicio 13 *Escriba las expresiones siguientes a su equivalente con exponente fraccionario o con radical según corresponda.*

1. $2x^{7/4}$

2. $(e^2)^3$

3. $3a^2b^{2/5}$

4. $\sqrt[3]{3mn}$

5. $8^{2/3}$

6. $9\sqrt{x^7y^4}$

7. $\sqrt[5]{7x^3y^2}$

8. $x^{1/2}y^{3/2}$

9. $e^{3x+1}e^{1-3x}$

10. $\frac{(e-5)^{m+2}}{(e-5)^m}$

$$11. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$$

$$14. \frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$$

$$12. (-3x^{-4})^2$$

$$15. \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$13. \sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$$

Ejemplo 28 *Propiedades de los exponentes fraccionarios.*

$$1. \sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = (a)^{1/n} (b)^{1/n} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8} \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{(a)^{1/n}}{(b)^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/m \times n} = \sqrt[m \times n]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$4. \text{ si } n \text{ es impar, } \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = (a^{1/n})^n = a$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

$$\sqrt[5]{(2)^5} = 2$$

$$5. \text{ si } n \text{ es par, } \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = (a^{1/n})^n = |a|$$

$$\sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

Ejemplo 29 *Simplifica las siguientes expresiones.*

1.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^3 a^3 b^6}{3^3 x^{27}}\right)^{4/3} &= \frac{2^{3(4/3)} a^{3(4/3)} b^{6(4/3)}}{3^{3(4/3)} x^{27(4/3)}} \\ &= \frac{2^4 a^4 b^8}{3^4 x^{36}} = \frac{16a^4 b^8}{81x^{36}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[3]{a^6 b^3 c^{-9}}}{\sqrt[5]{a^{10} b^{-5} c^{-25}}}\right)^2 &= \left(\frac{(a^6 b^3 c^{-9})^{1/3}}{(a^{10} b^{-5} c^{-25})^{1/5}}\right)^2 = \left(\frac{a^{6(1/3)} b^{3(1/3)} c^{-9(1/3)}}{a^{10(1/5)} b^{-5(1/5)} c^{-25(1/5)}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2 b c^{-3}}{a^2 b^{-1} c^{-5}}\right)^2 = (b^2 c^2)^2 = b^4 c^4 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[5]{(x+a)^{10}} \right)^3 \left(\frac{\sqrt[3]{xy} \sqrt{(x+a)^4}}{(x+a)^2} \right)^5 &= \left(\left((x+a)^{10} \right)^{1/5} \right)^3 \left(\frac{(xy)^{1/3} \left((x+a)^4 \right)^{1/2}}{(x+a)^2} \right)^5 \\
 &= (x+a)^6 \frac{(xy)^{5/3} (x+a)^{10}}{(x+a)^{10}} \\
 &= (x+a)^{6-10+10} (xy)^{5/3} \\
 &= (x+a)^6 \sqrt[3]{(xy)^5}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 30 Operaciones con radicales.

1. Extracción de la raíz n -ésima

Para extraer la raíz n -ésima, extraiga la raíz n -ésima del coeficiente y divida los exponentes de las variables entre el índice del radical.

$$(a) \sqrt[6]{64x^6y^{18}} = \underbrace{\sqrt[6]{64}}_{\text{coeficiente}} \underbrace{x^{6/6}y^{18/6}}_{\text{variables}} = 2xy^3$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{243a^{21}b^3}{9c^{27}d^{33}}} = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{243}{9}}}_{\text{coeficiente}} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{a^{21}b^3}}{\sqrt[3]{c^{27}d^{33}}}}_{\text{variables}} = \sqrt[3]{27} \left(\frac{a^{21/3}b^{3/3}}{c^{27/3}d^{33/3}} \right) = \frac{3a^7b}{c^9d^{11}}$$

$$(c) \sqrt[6]{\frac{128}{2} \left((5a^2 - b^3)^{15} \right)^2} = \sqrt[6]{64 (5a^2 - b^3)^{30}} = \sqrt[6]{64} \sqrt[6]{(5a^2 - b^3)^{30}} = 2 (5a^2 - b^3)^5$$

$$(d) \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$$

$$(e) \sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10} = \sqrt{25} \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$$

$$(f) \sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$(g) \sqrt[5]{2^5} = 2$$

2. Introducir un factor a un radical

Para introducir un factor a un radical, elévese el factor a la potencia indicada por el índice del radical.

$$(a) 2x\sqrt{5y} = \sqrt{(2x)^2 (5y)} = \sqrt{4x^2 (5y)} = \sqrt{20x^2y}$$

$$(b) 3m\sqrt[3]{2my} = \sqrt[3]{(3m)^3 (2my)} = \sqrt[3]{27m^3 (2my)} = \sqrt[3]{54m^4y}$$

$$(c) (3a-1)^2 \sqrt{3a-1} = \sqrt{(3a-1)^4 (3a-1)} = \sqrt{(3a-1)^5}$$

3. Descomposición del radicando en sus factores:

$$(a) \sqrt[3]{128x^7} = \sqrt[3]{2^7x^7} = \sqrt[3]{2^6x^6 (2x)} = 2^2x^2 \sqrt[3]{2x} = 4x^2 \sqrt[3]{2x}$$

$$(b) \sqrt{32a^3b} = \sqrt{2(16)a^2(ab)} = 4a\sqrt{2ab}$$

$$(c) \sqrt[3]{24a^8b^7c^5} = \sqrt[3]{(2^33)a^8b^7c^5} = \sqrt[3]{(2^3a^6b^6c^3)(3a^2bc^2)} = 2a^2b^2c\sqrt[3]{3a^2bc^2}$$

4. Expresiones con radicales equivalentes

Un radical puede ser expresado como una potencia fraccionaria, por ejemplo, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$; para obtener expresiones con radicales equivalentes, multiplíquese el numerador y denominador del exponente fraccionario por un mismo número.

(a) La expresión $\sqrt{5a}$ es equivalente a,

$$\begin{aligned} (5a)^{\frac{1}{2}} &= (5a)^{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{2}} = (5a)^{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{3}} = (5a)^{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{4}} = \dots \\ (5a)^{\frac{1}{2}} &= (5a)^{2/4} = (5a)^{3/6} = (5a)^{4/8} = \dots \\ \sqrt{5a} &= \sqrt[4]{(5a)^2} = \sqrt[6]{(5a)^3} = \sqrt[8]{(5a)^4} = \dots \end{aligned}$$

$$(b) \sqrt{3}\sqrt[3]{5} = 3^{1/2}5^{1/3} = 3^{3/6}5^{2/6} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{27 \cdot 25} = \sqrt[6]{675}$$

(c) ¿Cuál es mayor? $\sqrt{5}$ o $\sqrt[3]{11}$

Para comparar cantidades con radicales obtenga la expresión con radical equivalente con el mismo índice de la raíz, así se tiene que,

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

y

$$\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121}$$

luego,

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{125} &> \sqrt[6]{121} \\ \sqrt{5} &> \sqrt[3]{11} \end{aligned}$$

5. Suma algebraica de expresiones con radicales.

Para sumar cantidades con radicales, sume los radicales semejantes.

$$(a) -5\sqrt{7} + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 4\sqrt{7} = (-5 - 4)\sqrt{7} + (3 - 6)\sqrt{5} = -9\sqrt{7} - 3\sqrt{5}$$

$$(b) \sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{16(3)} + \sqrt{3(25)} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$(c) \sqrt{4x^3y} - x\sqrt{xy} = \sqrt{2^2x^2xy} - x\sqrt{xy} = 2x\sqrt{xy} - x\sqrt{xy} = x\sqrt{xy}$$

Ejercicio 14 Simplifica las expresiones algebraicas siguientes.

$$1. \frac{22a^2b^5c^7}{-11abc^2}$$

$$2. \frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$$

$$3. \frac{(-b^1c)^0}{4a^{-1}c^2}$$

$$4. \left(\frac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$$

$$5. \left(\frac{7m^{-1}n^3}{n^2r^{-1}}\right)^{-1}$$

$$6. (c^5d^6)^8(-c^4d)^9$$

$$7. \frac{(11x^7z^9)(10xy^8z)}{(66x^{15}y^{14})(55y^3z^{12})}$$

$$8. \frac{(r^{-4}k^2)^2}{(5k^2)^2}$$

$$9. \frac{-27}{8} \left(\frac{2x^8y^{12}z}{3} \right)^4$$

$$10. (64a^{24}c^{42})^{-\frac{1}{6}}$$

$$11. \sqrt{4x^3(x+y)^2}$$

$$12. \sqrt[5]{\left(x^5y^{10}\sqrt[3]{125z^3}\right)^4}$$

$$13. \sqrt[3]{\frac{125x^{12}}{27y^3}}$$

$$14. \sqrt[8]{\frac{5^8(x+y-4)^{16}}{3^{16}(x-n+5)^{24}}}$$

Ejercicio 15 Extraer la raíz indicada de las expresiones siguientes

$$1. \sqrt[3]{64x^{12}}$$

$$2. \sqrt[3]{125x^{15}y^{18}}$$

$$3. \sqrt[3]{\frac{125m^5}{27n^9}}$$

$$4. \sqrt[4]{16a^8b^{20}}$$

$$5. \sqrt[5]{32t^{10}w^{12}}$$

$$6. \sqrt[8]{2^{16}x^{24}y^{16}}$$

$$7. \sqrt[3]{\frac{27x^6}{64t^9}}$$

$$8. \sqrt[8]{\frac{5^8(x+y-4)^{10}}{3^{16}(w-t-4)^{24}}}$$

Ejercicio 16 Introducir el factor a la expresión con radical.

$$1. 5\sqrt{y}$$

$$2. -3\sqrt[3]{-2}$$

$$3. 2y^3\sqrt[3]{-y^5}$$

$$4. (3y-1)^3\sqrt{3y-1}$$

$$5. 3x\sqrt{\frac{1}{27x^3}}$$

$$6. x^2\sqrt{\frac{5}{x^2}}$$

$$7. \frac{1-z}{z}\sqrt{\frac{(x-1)^4}{z^4}}$$

$$8. (a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

Ejercicio 17 Suma y multiplicación de cantidades con radicales.

$$1. 2\sqrt{128} - \sqrt{200}$$

$$2. 5\sqrt{a} + 7\sqrt{a}$$

$$3. \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$$

$$4. 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{256}$$

$$5. 3\sqrt{432} - 4\sqrt{3} + \sqrt{147}$$

$$6. \sqrt[3]{a} + \sqrt{4a} - \sqrt{9a} + \sqrt[3]{8a} - \sqrt{25a}$$

$$7. 4\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}} - 3\sqrt{27}$$

$$8. \sqrt{21} \times \sqrt{3}$$

$$9. \sqrt{15} \times \sqrt{5}$$

$$10. \sqrt{32} \times \sqrt{2}$$

$$11. 2\sqrt{12} \times 3\sqrt{48}$$

Racionalización del Denominador en una expresión con Radical.

El cociente de dos radicales da el origen muchas veces a una fracción irracional, por ejemplo,

$$\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}-1}$$

Conviene en muchos casos para el manejo algebraico, eliminar la expresión con radical del numerador o del denominador, este proceso se llama racionalización. La racionalización del denominador es útil cuando se desea eliminar del denominador la expresión con radical, así por ejemplo, la expresión,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

se racionaliza cuando se multiplica por,

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} \text{ con } m < n$$

esto es, la expresión se multiplica por "1",

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot 1 &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} \\ &= \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} \\ &= \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a} \end{aligned}$$

Ejemplo 31 Racionalización del denominador

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{11\sqrt{6}}{\sqrt{11}} &= \frac{11\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{11\sqrt{6 \cdot 11}}{11} = \sqrt{66} \\ 2. \quad \frac{15}{\sqrt[5]{3}} &= \frac{15}{\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^{5-1}}}{\sqrt[5]{3^{5-1}}} = \frac{15}{\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{15\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{15\sqrt[5]{3^4}}{3} \\ 3. \quad \sqrt[4]{\frac{3}{5}} &= \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{3 \cdot 5^3}}{5} = \frac{\sqrt[4]{375}}{5} \end{aligned}$$

Ejercicio 18 Racionalizar el denominador de las expresiones siguientes.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{3}{\sqrt{5}} & 6. \quad & \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \\ 2. \quad & \frac{15}{2\sqrt[3]{3}} & 7. \quad & \frac{1}{\sqrt[4]{y^3}} \\ 3. \quad & \frac{1}{5\sqrt[6]{7}} & 8. \quad & \frac{x}{y^{2/5}} \\ 4. \quad & \sqrt[6]{\frac{2}{5}} & 9. \quad & \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \\ 5. \quad & \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} & 10. \quad & \frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 19 Usa una calculadora científica para determinar el valor aproximado de cada expresión a la centésima más próxima.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 5^{1.7} \\ 2. \quad & 10^{-0.5} \end{aligned}$$

$$3. \left(\frac{2}{3}\right)^{-1.2}$$

$$7. 0.4 (3^{0.7})$$

$$4. \left(\frac{1}{3}\right)^{4.1}$$

$$8. 20 (0.25^{-2.7})$$

$$5. 50 (3^{-0.6})$$

$$9. \frac{5}{100} (0.3^{1/3})$$

$$6. 10 (3^{-1.8})$$

$$10. \left(\frac{4}{5}\right)^{5/4}$$

Notación Científica

Cualquier número real x se puede escribir en *notación científica*, esto es, en la forma,

$$x = c \times 10^n$$

donde c es un número decimal en el intervalo $1 \leq c < 10$ y n un entero positivo o negativo. Esto es, un número escrito en notación científica se compone del producto de un número c , igual a 1 y menor que 10, y una potencia de diez.

Algunos ejemplos de tales números escritos en *notación científica estándar*,

$$\begin{aligned} 13 &= 1.3 \times 10 \\ 1543.837 &= 1.543837 \times 10^3 \\ 0.000005432 &= 5.432 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Esta notación es útil para expresar y hacer operaciones numéricas con números muy grandes o muy pequeños y aplicando las leyes de los exponentes.

Ejemplo 32 Escriba el número 5432 en notación científica estándar.

El procedimiento es:

1. Se recorre el punto decimal después del primer dígito distinto de cero. El punto decimal se encuentra en el último dígito, esto es, $x = 5432$.

543.2: el punto decimal se recorre un lugar hacia la izquierda.

54.32: el punto decimal se recorre dos lugares hacia la izquierda.

5.432: el punto decimal se recorre tres lugares hacia la izquierda.

En este caso $c = 5.432$

2. El punto decimal se recorre hacia la izquierda tres lugares, por lo tanto, $n = +3$, el número en notación científica es,

$$x = 5.432 \times 10^3$$

El signo de la potencia es positivo, indica la dirección en que se recorrió el punto decimal, hacia la izquierda.

Ejemplo 33 Escriba el número 0.000347 en notación científica estándar.

El procedimiento es:

1. Se recorre el punto decimal después del primer dígito distinto de cero (**3**), en este caso hacia la derecha.

00.00347: el punto decimal se recorre un lugar hacia la derecha.

000.0347: el punto decimal se recorre dos lugares hacia la derecha.

0000.347: el punto decimal se recorre tres lugares hacia la derecha.

00003.47: el punto decimal se recorre cuatro lugares hacia la derecha.

En este caso $c = 3.47$

2. El punto decimal se recorre hacia la derecha cuatro lugares, por lo tanto, $n = -4$, el número en notación científica es,

$$x = 5.432 \times 10^{-4}$$

El signo de la potencia es negativo, indica la dirección en que se recorrió el punto decimal, hacia la derecha.

Ejemplo 34 Escribir en notación científica estándar el número 234×10^{-5} .

La notación científica estándar es $x = c \times 10^n$, así que el punto decimal se encuentra en el último dígito del número 234. Se recorre hacia la izquierda dos lugares, esto es,

$$\begin{aligned} 234 \times 10^{-5} &= 2.34 \times 10^{-5+2} \\ &= 2.34 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Ejemplo 35 Escribir en notación científica estándar el número 0.00789×10^{-7} .

La notación científica estándar es $x = c \times 10^n$, así que el punto decimal número 0.00789. Se recorre hacia la derecha tres lugares, esto es,

$$\begin{aligned} 0.00789 \times 10^{-7} &= 7.89 \times 10^{-7-3} \\ &= 7.89 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

Ejemplo 36 Cálculo numérico con números escritos en notación científica.

$$1. (2.0 \times 10^7) (3.0 \times 10^{-3}) = (2.0)(3.0) \times 10^{7-3} = 6.0 \times 10^4$$

$$2. \frac{9.1 \times 10^5}{7.0 \times 10^{-6}} = \left(\frac{9.1}{7.0} \right) \times 10^{5+6} = 1.3 \times 10^{11}$$

$$3. \sqrt{9.0 \times 10^{10}} = \sqrt{9.0} \times \sqrt{10^{10}} = 3.0 \times 10^5$$

$$4. \left(\frac{8.9 \times 10^5}{4.55 \times 10^3} \right) (4.56 \times 10^{-6}) = \left(\frac{8.9}{4.55} \right) (4.56) \times 10^{5-6-3} = 8.9196 \times 10^{-4}$$

$$5. 2.5 \times 10^7 + 3.0 \times 10^5$$

$$\begin{aligned} &= 250.0 \times 10^5 + 3.0 \times 10^5 \\ &= (250.0 + 3.0) \times 10^5 \\ &= 253.0 \times 10^5 \\ &= 2.530 \times 10^7 \end{aligned}$$

Para sumar o restar números escritos en notación científica, escriba los números en potencias de 10 que tengan el mismo exponente, sume los coeficientes y asigne la misma potencia de 10.

Ejercicio 20 Escribir los números siguientes en la forma estándar de notación científica.

1. 1350000000000

2. 0.000000234

3. 152000000

4. 0.0002

5. 101

6. 2

7. 0.01

8. 20.0

9. 34000000000000

10. 0.000000000045

Ejercicio 21 Escribir los números siguientes en la forma estándar de notación científica.

1. 0.0045×10^0

2. 225×10^5

3. 0.025×10^{-3}

4. $0.00000000112 \times 10^5$

5. 0.3567×10^5

6. 0.00405×10^{-2}

7. 21345×10^{10}

8. 1035.5×10^7

9. $0.000001002 \times 10^{-12}$

10. 1035.5×10^{-7}

Ejercicio 22 Efectúe las operaciones siguientes y de su resultado en notación científica estándar.

1. $(4.55 \times 10^3) (8.9 \times 10^5) (5.67 \times 10^{-6})$

2. $(0.0095 \times 10^{-3}) (9.7 \times 10^{12}) (6.71 \times 10^3)$

3. $\frac{95.34 \times 10^{-8}}{5.79 \times 10^9}$

4. $\frac{1000.0 \times 10^{-6}}{0.0059 \times 10^{-9}}$

5. $\frac{0.4378}{59.6}$

6. $4.55 \times 10^4 + 8.9 \times 10^5 + 5.67 \times 10^{-6}$

7. $2.0 \times 10^{-4} + 6.0 \times 10^{-7} - 4.0 \times 10^{-5}$

8. $\sqrt{16.0 \times 10^{-8}} - 5.0 \times 10^{-4} + 8.0 \times 10^{-6}$

9. $\frac{25 \times 10^3}{1 \times 10^9} + 11 \times 10^{-6}$

10. $(2.0 \times 10^4)^5 (\sqrt{16.0 \times 10^{-21}})$

2.3.5 Multiplicación de Expresiones Algebraicas

Ejemplo 37 Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica cada término del polinomio por el monomio. Multiplicar $-7a$ por $(3a^2 - 5a + 6)$

$$\begin{aligned} &= -7a (3a^2 - 5a + 6) \\ &= -7a (3a^2) - 7a (-5a) - 7a (6) \\ &= -21a^3 + 35a^2 - 42a \end{aligned}$$

Ejemplo 38 Multiplicar $(3x - 8)$ por $(x^2 + 7x + 2)$. En forma similar se aplica la propiedad distributiva en la multiplicación de polinomios por polinomios.

$$\begin{aligned} &= (3x - 8) (x^2 + 7x + 2) = 3x (x^2 + 7x + 2) - 8 (x^2 + 7x + 2) \\ &= 3x (x^2) + 3x (7x) + 3x (2) - 8 (x^2) - 8 (7x) - 8 (2) \\ &= 3x^3 + 13x^2 - 50x - 16 \end{aligned}$$

Ejemplo 39 La multiplicación de polinomios también se pueden llevar en forma vertical, se recomienda para facilitar la simplificación de términos semejantes ordenar ambos polinomios en orden ascendente o descendente.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 + x - 1 \\
 - 2x + 1 \\
 \hline
 -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x \\
 + x^3 - x^2 + x - 1 \\
 \hline
 -2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x - 1
 \end{array}$$

Ejemplo 40 Multiplicación expresiones algebraicas.

1. $(a - b)(x + y)$

$$\begin{aligned}
 (a - b)(x + y) &= a(x + y) - b(x + y) \\
 &= ax + ay - bx - by
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \left(\frac{4}{3}a^6bc^2 + \frac{16}{9}ab^4c^3 \right) \left(\frac{9}{2}a^2b^3c - 27abc \right) \\
 &= \frac{4}{3}a^6bc^2 \left(\frac{9}{2}a^2b^3c - 27abc \right) + \frac{16}{9}ab^4c^3 \left(\frac{9}{2}a^2b^3c - 27abc \right) \\
 &= \frac{4}{3}a^6bc^2 \left(\frac{9}{2}a^2b^3c \right) - \frac{4}{3}a^6bc^2(27abc) + \frac{16}{9}ab^4c^3 \left(\frac{9}{2}a^2b^3c \right) - \frac{16}{9}ab^4c^3(27abc) \\
 &= 6a^8b^4c^3 - 36a^7b^2c^3 + 8a^3b^7c^4 - 48a^2b^5c^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. (x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}) \\
 &= x^{1/3}(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}) - y^{1/3}(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}) \\
 &= x^{3/3} + x^{2/3}y^{1/3} + x^{1/3}y^{2/3} - x^{2/3}y^{1/3} - x^{1/3}y^{2/3} - y^{3/3} \\
 &= x - y
 \end{aligned}$$

Ejercicio 23 Efectúa los siguientes productos.

9. $-7(2x + 9)$

1. $-9z^3w(5z^4 + z^3w^2 - 6zw^5 - 3)$

10. $\frac{1}{3}x(x - 27)$

2. $(-2xy^2)^2(1 - x^2 - y^2 - z^4 + z^6)$

11. $7x^2y(5x^2 - 3xy + y)$

3. $(9p - 2q)(9p + 2q)$

12. $-\frac{3}{4}ab^2\left(\frac{1}{3}abc + \frac{4}{9}a - 6\right)$

4. $(8x^2 - 3y)(8x^2 + 3y)$

13. $\frac{4}{5}x^2\left(9xy + \frac{5}{4}x - 30y\right)$

5. $(9 - z^9)(9 + z^9)$

14. $y^5(7y^3 - y^2 + 1) + 2y^2(4y^6 - 1)$

6. $\left(\frac{4}{3}x^2 - y\right)\left(\frac{4}{3}x^2 + y\right)$

15. $6x(x^2 - 2) + 2x^2(7 - 3x + 2x^2)$

7. $\left(\frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{2}w^3\right)^2$

16. $(3x - 9y)(2z - 5w)$

8. $(3x + 1)(3x - 1)(x - 5)$

17. $(5x^4 - 2x^2 - 4x + 1)(3x^2 - 6)$

18. $\left(\frac{7t}{2} + \frac{5}{4}\right)\left(\frac{2t}{7} + \frac{5}{4}\right)$

19. $(5a + 9)(3a^2 + 5ab^2 - b^3)$

20. $(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})(x^{1/3} - y^{1/3})$

21. $(4a^3 + 12a - 16)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a^5\right)$

22. $(4u^{-4/3} - 6u^{-2/3} + 9)(2u^{-2/3} + 3)$

23. $(y^4 + 4y^3 + 5y^2 - 3y - 5)(y^2 + 1)$

24. $(c^4 + 2c^2d^2 - d^4)(2c - 2cd + d)$

25. $(xz - (x - y)(y + z)) - y(y - (x - z))$

Capítulo 3

Productos Notables y Factorización

Un **producto notable** o producto especial, es una multiplicación entre expresiones algebraicas cuyo resultado se puede obtener aplicando un regla establecida. El proceso de efectuar un producto entre factores se le conoce como **expansión**; el proceso inverso de convertir una expresión algebraica en sus factores se le conoce como **factorización**, esquemáticamente se puede representar por,

$$\begin{array}{c} \rightarrow \text{Factorización} \rightarrow \\ x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \\ \leftarrow \text{Expansión} \leftarrow \end{array}$$

Es importante mencionar que una expresión algebraica factorizada es más simple en el análisis del comportamiento matemático y como consecuencia en muchas aplicaciones de la ciencia y tecnología.

3.1 Fórmulas de productos especiales

Sean A , B y C , números reales o expresiones algebraicas. Los productos notables más utilizados son,

1. El producto de binomios con factor común,

$$(A + B)(A + C) = A^2 + (B + C)A + BC$$

2. El producto de binomios conjugados,

$$(A + B)(A - B) = \underbrace{A^2 - B^2}_{\text{dc}}$$

La expansión de binomios conjugados resulta en una diferencia de cuadrados (dc). En forma inversa, la factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados.

Los binomios de la forma $(A + B)(A - B)$ que tienen los mismos términos y sólo difieren en un signo, se llaman **binomios conjugados**.

3. El cuadrado de un binomio,

$$(A + B)^2 = \underbrace{A^2 + 2AB + B^2}_{\text{TCP}}$$

$$(A - B)^2 = \underbrace{A^2 - 2AB + B^2}_{\text{TCP}}$$

La expansión de un binomio al cuadrado resulta en un trinomio cuadrado perfecto (TCP).
En forma inversa, la factorización de un TCP es un binomio al cuadrado.

4. El cubo de un binomio,

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ (A - B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{aligned}$$

5. El cuadrado de un trinomio,

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

note que el cuadrado de un trinomio resulta en la suma de los cuadrados de los tres términos, más el doble producto de los términos, el primer por el segundo, el segundo por el tercero y el primero por el tercero.

Para desarrollar un producto notable; identifique el modelo del producto notable; sustituya los términos identificados en la fórmula del producto notable, respetando los signos de la fórmula y de cada término, para esto utilice paréntesis para hacer más claro el desarrollo; efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

Ejemplo 41 Efectúe los productos notables siguientes.

1. Producto de binomios con término común,

$$(A + B)(A + C) = A^2 + (B + C)A + BC$$

$$(a) \quad (4x^2 + 5)(4x^2 - 7); A = 4x^2, B = 5, C = -7.$$

$$\begin{aligned}(4x^2 + 5)(4x^2 - 7) &= (4x^2)^2 + (5 - 7)4x^2 + (5)(-7) \\ &= 16x^4 - 8x^2 - 35\end{aligned}$$

$$(b) \quad \left(x^2 + \frac{1}{5}\right)(x^2 - 10); A = x^2, B = \frac{1}{5}, C = -10.$$

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{1}{5}\right)(x^2 - 10) &= (x^2)^2 + x^2\left(\frac{1}{5} - 10\right) + \left(\frac{1}{5}\right)(-10) \\ &= x^4 + x^2\left(\frac{1 - 50}{5}\right) - 2 \\ &= x^4 - \frac{49}{5}x^2 - 2\end{aligned}$$

$$(c) \quad (\sqrt{x} + 5)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{5}\right); A = \sqrt{x}, B = 5, C = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + 5)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{5}\right) &= (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}\left(5 + \frac{1}{5}\right) + (5)\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= x + \sqrt{x}\left(\frac{25 + 1}{5}\right) + 1 \\ &= x + \frac{26}{5}\sqrt{x} + 1\end{aligned}$$

2. Producto de binomios conjugados,

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

(a) $(5 + y)(5 - y)$; $A = 5$, $B = y$.

$$\begin{aligned}(5 + y)(5 - y) &= (5)^2 - (y)^2 \\ &= 25 - y^2\end{aligned}$$

(b) $(2x^2 + 25)(2x^2 - 25)$; $A = 2x^2$, $B = 25$.

$$\begin{aligned}(2x^2 + 25)(2x^2 - 25) &= (2x^2)^2 - (25)^2 \\ &= 4x^4 - 625\end{aligned}$$

3. Binomio al cuadrado,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

(a) $(t^2 + 2t)^2$; $A = t^2$, $B = 2t$.

$$\begin{aligned}(t^2 + 2t)^2 &= (t^2)^2 + 2(t^2)(2t) + (2t)^2 \\ &= t^4 + 4t^3 + 4t^2\end{aligned}$$

(b) $(xy^2z^3 - 3x^6yz)^2$; $A = xy^2z^3$, $B = 3x^6yz$.

$$\begin{aligned}(xy^2z^3 - 3x^6yz)^2 &= (xy^2z^3)^2 - 2(xy^2z^3)(3x^6yz) + (3x^6yz)^2 \\ &= x^2y^4z^6 - 6x^7y^3z^4 + 9x^{12}y^2z^2\end{aligned}$$

(c) $(-b - 6)^2$; $A = -b$, $B = 6$.

$$\begin{aligned}(-b - 6)^2 &= (-b)^2 - 2(-b)(6) + (6)^2 \\ &= b^2 + 12b + 36\end{aligned}$$

4. Binomio al cubo,

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

(a) $(x^2y + 6x)^3$; $A = x^2y$, $B = 6x$.

$$\begin{aligned}(x^2y + 6x)^3 &= (x^2y)^3 + 3(x^2y)^2(6x) + 3(x^2y)(6x)^2 + (6x)^3 \\ &= x^6y^3 + 18x^5y^2 + 108x^4y + 216x^3\end{aligned}$$

(b) $(ab - b^3)^3$; $A = ab$, $B = b^3$.

$$\begin{aligned}(ab - b^3)^3 &= (ab)^3 - 3(ab)^2(b^3) + 3(ab)(b^3)^2 - (b^3)^3 \\ &= a^3b^3 - 3a^2b^5 + 3ab^7 - b^9\end{aligned}$$

5. Trinomio al cuadrado,

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$$

(a) $(5a + 4b - 8c)^2$; $A = 5a$, $B = 4b$, $C = -8c$.

$$\begin{aligned}(5a + 4b - 8c)^2 &= (5a)^2 + (4b)^2 + (-8c)^2 + 2(5a)(4b) + \\ &\quad 2(4b)(-8c) + 2(5a)(-8c) \\ &= 25a^2 + 16b^2 + 64c^2 + 40ab - 64bc - 80ac\end{aligned}$$

(b) $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + y + 6\right)^2$; $A = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $B = y$, $C = 6$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + y + 6\right)^2 &= \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 + 6^2 + 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)y + 2(y)(6) + \\ &\quad 2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)6 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 36 + \frac{2xy}{\sqrt{2}} + 12y + \frac{12x}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 36 + \frac{2xy}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + 12y + \frac{12x}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + xy\sqrt{2} + 6x\sqrt{2} + y^2 + 12y + 36\end{aligned}$$

Ejercicio 24 Efectúe los productos notables siguientes,

1. $(3a - 5bc)(3a + 5bc)$

2. $(3a - 5bc)(3a + 5bc)$

3. $(2x + y)^2$

4. $(2x - y)^2$

5. $(2x^2 - 25)(2x^2 + 25)$

6. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 6\right)^2$

7. $\left(\frac{z^2}{7} - 7\right)^2$

8. $(4t + 9)(4t - 3)$

9. $(3b - 11)(3b + 11)$

10. $(7x + 1)(7x + 1)$

11. $(2x^4 - 3y)(2x^4 + 3y)(4x^8 + 9y^2)$

12. $(2a + 3b)^2 - (2a - 3b)^2$

13. $(x + y + 8)^2$

14. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + 4\right)^2$

15. $\left((y - 2)^2 - 4\right)^3$

16. $(5a - 8)^3$

17. $(6w + 2z)^3$

18. $(a - b)(a + b)$

19. $(3x + 4yz)^3$

20. $(3a^2 + 5b^3)^2$

21. $(3x^3 - 2y)(3x^3 + 2y)$

22. $\left(3\sqrt{xy} + \frac{2}{y}\right)^2$

23. $(2x + 3y)^2 - (x - 5y)^2$

24. $(\sqrt{x} + xy + \sqrt{y})^2$

25. $-(2x^2 - 3y^2)^3$

26. $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

27. $\left(2a + \frac{1}{4}\right)^2$

3.1.1 Triángulo de Pascal

Para desarrollar la expansión $(A + B)^n$, donde A y B son números reales o expresiones algebraicas y n un número natural; se obtiene fácilmente con la ayuda del *Triángulo de Pascal*. El desarrollo de potencias del binomio $(A + B)$ hasta $n = 5$ es el siguiente,

$$\begin{array}{rcccccccc}
 n = 0 & (A + B)^0 & = & 1 & & & & & \\
 n = 1 & (A + B)^1 & = & A + B & & & & & \\
 n = 2 & (A + B)^2 & = & A^2 + 2AB & + & B^2 & & & \\
 n = 3 & (A + B)^3 & = & A^3 + 3A^2B & + & 3AB^2 & + & B^3 & \\
 n = 4 & (A + B)^4 & = & A^4 + 4A^3B & + & 6A^2B^2 & + & 4AB^3 & + B^4 \\
 n = 5 & (A + B)^5 & = & A^5 + 5A^4B & + & 10A^3B^2 & + & 10A^2B^3 & + 5AB^4 + B^5 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

observe que el desarrollo de potencias sucesivas sigue un patrón simple, esto es, los exponentes de A disminuyen de uno en uno de término a término, mientras que el exponente de B aumenta de uno en uno. Los coeficientes siguen un patrón que es notorio al colocarlos en un arreglo triangular de la forma siguiente,

$$\begin{array}{rcccccccc}
 n = 0 & (A + B)^0 & & & & & & 1 \\
 n = 1 & (A + B)^1 & & & & 1 & & 1 \\
 n = 2 & (A + B)^2 & & & 1 & 2 & & 1 \\
 n = 3 & (A + B)^3 & & 1 & 3 & 3 & & 1 \\
 n = 4 & (A + B)^4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 n = 5 & (A + B)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Este arreglo se conoce como Triángulo de Pascal hasta $n = 5$. Los coeficientes para cualquier n se obtienen por una relación simple de la suma de los coeficientes del desarrollo anterior $(n - 1)$.

Ejemplo 42 Desarrolle la expansión de $(A + B)^n$ utilizando el triángulo de Pascal.

1. La expansión tiene $(n + 1)$ términos, el primero es A^n y el último B^n .
2. Los exponentes de A disminuyen en 1 de término a término, mientras que el exponente de B aumenta de uno en uno, así por ejemplo, si $n = 5$,
el exponente de A disminuye en,

$$(A + B)^5 = A^5 + ?A^4B^1 + ?A^3B^2 + ?A^2B^3 + ?A^1B^4 + B^5$$

el exponente B aumenta en

$$(A + B)^5 = A^5 + ?A^4B^1 + ?A^3B^2 + ?A^2B^3 + ?A^1B^4 + B^5$$

La suma de los exponentes en cada término del desarrollo suman n .

3. Los coeficientes de cada término del desarrollo se obtiene del Triángulo de Pascal, así se tiene,

$$(A + B)^5 = 1A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + 1B^5$$

Ejemplo 43 Desarrolle la potencia cuarta del binomio $(3w + 2z)^4$. Utilizando el Triángulo de Pascal, se identifica $A = 3w$, $B = 2z$, $n = 4$, el desarrollo es,

$$\begin{aligned}(A + B)^4 &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \\(3w + 2z)^4 &= (3w)^4 + 4(3w)^3(2z) + 6(3w)^2(2z)^2 + 4(3w)(2z)^3 + (2z)^4 \\&= 81w^4 + 216w^3z + 216w^2z^2 + 96wz^3 + 16z^4\end{aligned}$$

3.2 Factorización

El proceso inverso de la expansión es la factorización, para llevarla a cabo se requiere identificar la regla de factorización que le corresponda. Sean A , B y C , números reales o expresiones algebraicas.

3.2.1 Factorización por Factor Común

En la factorización por factor común se aplica la operación inversa de la propiedad distributiva,

$$\begin{array}{c}\rightarrow \text{Factorización por factor común} \rightarrow \\ AB + AC = A(B + C) \\ \leftarrow \text{Propiedad distributiva} \leftarrow\end{array}$$

se busca un factor común formado por las variables comunes de menor potencia y el máximo común divisor de los coeficientes. El modelo de factorización es,

$$AB + AC = A(B + C)$$

Ejemplo 44 Factorización por factor común (fc):

$$1. \ a^2b^6x + a^5b^3y + a^3b^4xy$$

En cada término (1, 2 y 3) de la expresión se tiene las variables comunes "a" y "b" como se muestra,

$$\underbrace{a^2b^6x}_1 + \underbrace{a^5b^3y}_2 + \underbrace{a^3b^4xy}_3$$

el factor común (fc) se forma por las variables comunes de menor potencia,

$$fc = a^2b^3$$

la expresión a factorizar se puede reescribir como,

$$a^2b^6x + a^5b^3y + a^3b^4xy = a^2b^3(b^3x) + a^2b^3(a^3y) + a^2b^3(abxy)$$

al factorizar por factor común,

$$a^2b^3(b^3x) + a^2b^3(a^3y) + a^2b^3(abxy) = a^2b^3(b^3x + a^3y + abxy)$$

se tiene entonces que la factorización de la expresión original es,

$$a^2b^6x + a^5b^3y + a^3b^4xy = a^2b^3(b^3x + a^3y + abxy)$$

2. $6x(a+2b) + 15x^2y(a+2b)$; la expresión se puede reescribir como,

$$(3 \cdot 2)x(a+2b) + (3 \cdot 5)x^2y(a+2b)$$

el factor común es,

$$fc = 3x(a+2b)$$

la expresión se factoriza como,

$$\begin{aligned}(3 \cdot 2)x(a+2b) + (3 \cdot 5)x^2y(a+2b) &= 3x(a+2b) \cdot 2 + 3x(a+2b) \cdot 5xy \\ &= 3x(a+2b)(2+5xy)\end{aligned}$$

De otra forma se tiene,

$$\begin{aligned}\underbrace{6x}_A \underbrace{(a+2b)}_B + \underbrace{15x^2y}_C \underbrace{(a+2b)}_B &= (A+C)B \\ &= \underbrace{(6x+15x^2y)}_{fc} (a+2b) \\ &= (3 \cdot 2x + 3 \cdot 5x^2y)(a+2b) \\ &= 3x(2+5xy)(a+2b)\end{aligned}$$

3. $x^4y^3(x+y) - x^3y^5(x-y)$

$$\begin{aligned}\underbrace{x^4y^3}_1(x+y) - \underbrace{x^3y^5}_2(x-y) &= \underbrace{x^3y^3}_{fc} \underbrace{[x(x+y) - y^2(x-y)]}_{\text{simplificando}} \\ &= x^3y^3(x^2+xy-xy^2x+y^3)\end{aligned}$$

los términos 1 y 2 contienen variables comunes, el factor común estará formado por la variables comunes de menor potencia.

4. $a(x-3y) - b(3y-x)$

$$\begin{aligned}\underbrace{a(x-3y)}_1 - \underbrace{b(3y-x)}_2 &= \underbrace{a}_A \underbrace{(x-3y)}_B + \underbrace{b}_C \underbrace{(x-3y)}_B \\ &= (x-3y)(a+b)\end{aligned}$$

el factor 1 y el factor 2 aparentemente no son comunes; al introducir el signo negativo al factor 2 y con un cambio de orden se obtiene el factor común, la expresión puede ahora ser factorizada.

Ejercicio 25 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $6x + 15y$

2. $6x + 15x^2y$

3. $6x(a+2b) + 15x^2y(a+2b)$

4. $a^2bx + a^2by + a^2bz$

5. $a^2b^6x + a^5b^3y + a^3b^4xy$

6. $x(x+y) + y(x+y)$

7. $(a+2b)(a-b) + (a+2b)(a-5b)$

8. $x^4y^3(x+y) - x^3y^5(x+y)$

9. $a(x+y) + a(x+2y) + a(x+3y)$

10. $(a+2b)(a-b) + (a+2b)(a-5b)$

3.2.2 Factorización por Factor Común y Agrupamiento

El modelo la factorización es,

$$\begin{aligned} AD + CD + BC + AB &= \underbrace{(AD + AB)}_{\text{agrupando}} + \underbrace{(CD + BC)}_{\text{agrupando}} \\ &= A \underbrace{(B + D)}_{\text{fc}} + C \underbrace{(B + D)}_{\text{fc}} \\ &= (A + C)(B + D) \end{aligned}$$

primero se lleva a cabo un agrupamiento y luego una factorización por factor común.

Ejemplo 45 Factorización por factor común y agrupamiento.

1. $6a^2x - 12a^2y + 10ab^3x - 20ab^3y$

$$\begin{aligned} \underbrace{(6a^2x - 12a^2y)}_{\text{agrupando}} + \underbrace{(10ab^3x - 20ab^3y)}_{\text{agrupando}} &= \underbrace{6a^2(x - 2y) + 10ab^3(x - 2y)}_{\text{fc}} \\ &= (6a^2 + 10ab^3)(x - 2y) \\ &= 2a(3a + 5b^3)(x - 2y) \end{aligned}$$

2. $3x + 3y + ax + ay$

$$\begin{aligned} (3x + ax) + (3y + ay) &= x(3 + a) + y(3 + a) \\ &= (3 + a)(x + y) \end{aligned}$$

3. $ax + 3xb - ay - 3yb$

$$\begin{aligned} (ax + 3xb) - (ay + 3yb) &= x(a + 3b) - y(3b + a) \\ &= x(a + 3b) - y(a + 3b) \\ &= (a + 3b)(x - y) \end{aligned}$$

4. $15x - 3xy + 4y - 20$

$$\begin{aligned} 15x - 3xy + 4y - 20 &= 3x(5 - y) + 4(y - 5) \\ &= 3x(-1)(y - 5) + 4(y - 5) \\ &= 3x(y - 5) + 4(y - 5) \\ &= (-3x + 4)(y - 5) \\ &= -(y - 5)(3x - 4) \end{aligned}$$

Ejercicio 26 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $x^2y^2 - y^2 - z^2 + x^2z^2$

2. $rx + 2ry + kx + 2ky$

3. $4a^3 + 3a^2b^2 + 8a + 6b^2$

4. $a^2bx + a^2by + a^2bz$

5. $a^2 - 2b + 2a - ab$

6. $ax + by + ay + bx$

7. $y^4 - y^3 - y + 1$

8. $(a + 2b)(a - b) + (a + 2b)(a - 5b)$

- | | |
|--|--|
| 9. $(a + 3b)(a - 3b) + (3b + a)(3b - a)$ | 19. $z(x^2 + y) - y(x^2 + y)$ |
| 10. $a(x - y) + a(2x + 5y + 1)$ | 20. $2(4w - 9z) - 6w^2(4w - 9z)$ |
| 11. $3ax - 6ay + xb - 2yb$ | 21. $x^3 + 4x^2 + 3x + 12$ |
| 12. $(a + 2b)x^2y + (a + 3b)xy^2$ | 22. $33x^2y^2 - 3xy^3$ |
| 13. $a(x - 3y) - b(3y - x)$ | 23. $10a^4x^3 + a^3x^4 + 13a^2x^3$ |
| 14. $6x^4y^4 + 54y^6$ | 24. $35b^3y^2z + 10b^2y^3z - 45b^5y^2z^2$ |
| 15. $x(x + y) + y(x + y)$ | 25. $36a^8b^{23}c^{17} + 55a^{11}b^9 + 17a^{15}b^{23}$ |
| 16. $x^4y^3(x + y) - x^3y^5(x - y)$ | 26. $4x^3 - 5x^2 - 4x + 5$ |
| 17. $a(x + y) + a(x + 2y) + a(x + 3y)$ | 27. $18a^3 + 12a^2 - 15a - 10$ |
| 18. $3w(w - 2) - 16(w - 2)$ | |

3.2.3 Factorizando Diferencia de Cuadrados

El modelo de factorización es,

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

la factorización de una diferencia de cuadrados es el producto de binomios conjugados.

La suma de cuadrados $A^2 + B^2$ no tiene factorización.

Ejemplo 46 Factorización de diferencia de cuadrado.

1. $x^2 - 9$; $A = \sqrt{x^2} = x$, $B = \sqrt{9} = 3$.

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x - 3)(x + 3) \end{aligned}$$

2. $4x^2 - 9y^2$; $A = \sqrt{4x^2} = 2x$, $B = \sqrt{9y^2} = 3y$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= (2x - 3y)(2x + 3y) \end{aligned}$$

3. $(a + 5b)^2 - 9y^2$; $A = \sqrt{(a + 5b)^2} = (a + 5b)$, $B = \sqrt{9y^2} = 3y$.

$$\begin{aligned} (a + 5b)^2 - 9y^2 &= (a + 5b)^2 - (3y)^2 \\ &= ((a + 5b) - 3y)((a + 5b) + 3y) \\ &= (a + 5b - 3y)(a + 5b + 3y) \end{aligned}$$

4. $25x^2 - 9(x + 2y)^2$; $A = \sqrt{25x^2} = 5x$, $B = \sqrt{9(x + 2y)^2} = 3(x + 2y)$.

$$\begin{aligned} 25x^2 - 9(x + 2y)^2 &= (5x)^2 - (3(x + 2y))^2 \\ &= (5x - 3(x + 2y))(5x + 3(x + 2y)) \\ &= (5x - 3x - 6y)(5x + 3x + 6y) \\ &= \underbrace{(2x - 6y)(8x + 6y)}_{fc} \\ &= 2(x - 3y) \cdot 2(4x + 3y) \\ &= 4(x - 3y)(4x + 3y) \end{aligned}$$

5. $18x^2 - 2(2a - 5b)^2$; factorizando primero por factor común,

$$18x^2 - 2(2a - 5b)^2 = 2(9x^2 - (2a - 5b)^2)$$

$$A = \sqrt{9x^2} = 3x, B = \sqrt{(2a - 5b)^2} = (2a - 5b).$$

$$\begin{aligned} 2((3x)^2 - (2a - 5b)^2) &= 2(3x - (2a - 5b))(3x + (2a - 5b)) \\ &= 2(3x - 2a + 5b)(3x + 2a - 5b) \end{aligned}$$

6. $2335^2 - 2334^2$; $A = \sqrt{2335^2} = 2335$, $B = \sqrt{2334^2} = 2334$.

Con calculadora:

$$2335^2 - 2334^2 = 5452\,225 - 5447\,556 = 4669$$

Aplicando factorización:

$$\begin{aligned} 2335^2 - 2334^2 &= (2335 - 2334)(2335 + 2334) \\ &= (1)(4669) \\ &= 4669 \end{aligned}$$

7. $16x^{16} - 81y^4$; directamente,

$$\begin{aligned} 16x^{16} - 81y^4 &= (4x^8)^2 - (9y^2)^2 \\ &= (4x^8 - 9y^2)(4x^8 + 9y^2) \\ &= ((2x^4)^2 - (3y)^2)(4x^8 + 9y^2) \\ &= (2x^4 - 3y)(2x^4 + 3y)(4x^8 + 9y^2) \end{aligned}$$

8. $(2x + 3y)^4 - (x - y)^4$; directamente,

$$\begin{aligned}
(2x+3y)^4 - (x-y)^4 &= \left((2x+3y)^2 - (x-y)^2 \right) \underbrace{\left((2x+3y)^2 + (x-y)^2 \right)}_{\text{suma de cuadrados}} \\
&= ((2x+3y) - (x-y))((2x+3y) + (x-y)) \left((2x+3y)^2 + (x-y)^2 \right) \\
&= (2x+3y-x+y)(2x+3y+x-y) \left((2x+3y)^2 + (x-y)^2 \right) \\
&= (x+4y)(3x+2y)(4x^2+12xy+9y^2+x^2-2xy+y^2) \\
&= (x+4y)(3x+2y)(5x^2-10xy+10y^2) \\
&= 5(x+4y)(3x+2y)(x^2-2xy+2y^2)
\end{aligned}$$

Ejercicio 27 Factorizar las expresiones algebraicas siguientes.

1. $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

2. $16y^2 - \frac{1}{36}$

3. $(2x+3y)^4 - (x-y)^4$

4. $(x-2y)^2 - 4(x-a)^2$

5. $4z^2 - 36$

6. $20m^2 - 45n^2$

7. $x^4 - y^4$

8. $16a^2 - 25b^2$

9. $8x^2 - 18$

10. $-16 + 49h$

11. $25y^2 - 49z^4$

12. $\frac{9}{2}a^2 - \frac{49}{2}b^2$

13. $(4p-9q)-1$

14. $8a^2 - 2b^2$

15. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^4}$

16. $(x^3 + y^3)^2 - (4xy)^2$

17. $(a+b+1)^2 - (b+1)^4$

18. $(x+3y)^2 - 4z^2$

19. $64a^4 - 36x^4$

20. $4x^2 - 9(3x-y)^2$

21. $(x-2y)^2 - 4(x-a)^2$

22. $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

3.2.4 Factorizando Diferencia de Cubos

El modelo de factorización para la diferencia de cubos es,

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

el modelo de factorización para la suma de cubos se puede obtener como sigue,

$$\begin{aligned}
A^3 + B^3 &= A^3 - (-B)^3 \\
&= (A - (-B))(A^2 + A(-B) + (-B)^2)
\end{aligned}$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Una diferencia o suma de cubos se factoriza como el producto de dos factores, **un binomio por un trinomio**, el binomio tiene el mismo signo de la diferencia o de la suma de cubos; el primer y el segundo término del trinomio se forma por la suma de los cuadrados de los términos del

binomio, el tercer término es el producto de los términos del binomio, sumándolo para diferencia de cubos y restándolo para suma de cubos. Esto es,

$$\begin{aligned} A^3 - B^3 &= \underbrace{(A - B)}_{\text{binomio}} \underbrace{(A^2 + B^2 + AB)}_{\text{trinomio}} \\ A^3 + B^3 &= \underbrace{(A + B)}_{\text{binomio}} \underbrace{(A^2 + B^2 - AB)}_{\text{trinomio}} \end{aligned}$$

Ejemplo 47 Factorización de diferencia de cubos.

1. $8 - x^3$; $A = \sqrt[3]{8} = 2$, $B = \sqrt[3]{x^3} = x$

$$\begin{aligned} 8 - x^3 &= 2^3 - x^3 \\ &= (2 - x)(2^2 + 2x + x^2) \\ &= (2 - x)(4 + 2x + x^2) \end{aligned}$$

2. $125a^3 - b^3$; $A = \sqrt[3]{125a^3} = 5a$, $B = \sqrt[3]{b^3} = b$

$$\begin{aligned} 125a^3 - b^3 &= (5a)^3 - b^3 \\ &= (5a - b)((5a)^2 + 5ab + b^2) \\ &= (5a - b)(25a^2 + 5ab + b^2) \end{aligned}$$

3. $250a^4 - 54ab^3$. Primero factorizando por factor común,

$$250a^4 - 54ab^3 = 2a(125a^3 - 27b^3)$$

identificando $A = \sqrt[3]{125a^3} = 5a$, $B = \sqrt[3]{27b^3} = 3b$

$$\begin{aligned} 2a(125a^3 - 27b^3) &= 2a((5a)^3 - (3b)^3) \\ &= 2a(5a - 3b)((5a)^2 + (5a)(3b) + (3b)^2) \\ &= 2a(5a - 3b)(25a^2 + 15ab + 9b^2) \end{aligned}$$

4. $a^6b^9 - 27c^{12}$. La expresión se puede reescribir así,

$$a^6b^9 - 27c^{12} = (a^2b^3)^3 - (3c^4)^3$$

se tiene $A = \sqrt[3]{(a^2b^3)^3} = a^2b^3$, $B = \sqrt[3]{(3c^4)^3} = 3c^4$.

$$\begin{aligned} (a^2b^3)^3 - (3c^4)^3 &= (a^2b^3 - 3c^4)((a^2b^3)^2 + (a^2b^3)(3c^4) + (3c^4)^2) \\ &= (a^2b^3 - 3c^4)(a^4b^6 + 3a^2b^3c^4 + 9c^8) \end{aligned}$$

3.2.5 Factorización de Suma de Cubos

El modelo de factorización es,

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Ejemplo 48 Factorización de suma de cubos

$$1. 27x^3 + \frac{8}{125}y^3; A = \sqrt[3]{27x^3} = 3x, B = \sqrt[3]{\frac{8y^3}{125}} = \frac{2y}{5}$$

$$\begin{aligned} 27x^3 + \frac{8}{125}y^3 &= (3x)^3 + \left(\frac{2y}{5}\right)^3 \\ &= \left(3x + \frac{2y}{5}\right) \left((3x)^2 - (3x)\left(\frac{2y}{5}\right) + \left(\frac{2y}{5}\right)^2\right) \\ &= \left(3x + \frac{2y}{5}\right) \left(9x^2 - \frac{6xy}{5} + \frac{4y^2}{25}\right) \end{aligned}$$

$$2. 8x^3 + 125y^3; A = \sqrt[3]{8x^3} = 2x, B = \sqrt[3]{125y^3} = 5y$$

$$\begin{aligned} 8x^3 + 125y^3 &= (2x)^3 + (5y)^3 \\ &= (2x + 5y) \left((2x)^2 - (2x)(5y) + (5y)^2\right) \\ &= (2x + 5y) (4x^2 - 10xy + 25y^2) \end{aligned}$$

$$3. \frac{x^3}{64} + (x-2)^3; A = \sqrt[3]{\frac{x^3}{64}} = \frac{x}{4}, B = \sqrt[3]{(x-2)^3} = x-2$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{64} + (x-2)^3 &= \left(\frac{x}{4}\right)^3 + (x-2)^3 \\ &= \left(\frac{x}{4} + x-2\right) \left[\left(\frac{x}{4}\right)^2 + (x-2)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)(x-2)\right] \\ &= \left(\frac{x}{4} + x-2\right) \left(\frac{x^2}{16} + x^2 - 4x + 4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \left(\frac{5x}{4} - 2\right) \left(\frac{13x^2}{16} - \frac{7x}{2} + 4\right) \\ &= \left(\frac{5x-8}{4}\right) \left(\frac{13x^2 - 56x + 64}{16}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{64}}_{4 \times 16} (5x-8) (13x^2 - 56x + 64) \end{aligned}$$

3.2.6 Factorización de Diferencias de Potencias Pares

Para factorizar un binomio de la forma,

$$A^n - B^n$$

con n par, se pueden factorizar al considerar dicho binomio como una diferencia de cuadrados, aplicando sucesivamente la factorización para diferencia de cuadrados, y la factorización de la suma o diferencia de cubos.

- Factorizar $A^4 - B^4$

Al reescribir $A^4 - B^4$ como una diferencia de cuadrados (DC),

$$\begin{aligned} (A^2)^2 - (B^2)^2 &= \underbrace{(A^2 - B^2)}_{\text{DC}} (A^2 + B^2) \\ &= (A - B)(A + B)(A^2 + B^2) \end{aligned}$$

2. Factorizar $A^6 - B^6$

Al reescribir $A^6 - B^6$ como una diferencia de cuadrados

$$\begin{aligned}(A^3)^2 - (B^3)^2 &= \underbrace{(A^3 - B^3)}_{\text{Dif. cubos}} \underbrace{(A^3 + B^3)}_{\text{Sum. cubos}} \\ &= (A - B)(A^2 + AB + B^2)(A + B)(A^2 - AB + B^2) \\ &= (A - B)(A + B)(A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2)\end{aligned}$$

Otra opción es reescribir la expresión como una diferencia de cubos $(A^2)^3 - (B^2)^3$.

Ejercicio 28 Identifique y factorizar las expresiones algebraicas siguientes

1. $x^3 - y^3$

2. $64z^{12} + y^6$

3. $k^3 - 27$

4. $125a^3 - 8b^3$

5. $250a^4 - 54ab^3$

6. $\frac{1}{8}x^3 - 125y^3$

7. $27x^6 + \frac{8}{125}y^9$

8. $216x^{12}y^{18} - \frac{1}{216}z^{21}$

9. $a^4 - b^4$

10. $40ab^3 - 5a^4$

11. $a^4 + 16b^2$

12. $2ax^6 - 16a^4y^3$

13. $y^6 - a^6$

3.2.7 Factorización de Trinomios

Los trinomios de la forma,

$$ax^2 + bx + c$$

se factorizan como el producto de dos binomios, existen tres casos de factorización,

1. Si el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto (TCP), su factorización es un binomio al cuadrado.

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

2. Con $a = 1$, se tiene,

$$x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$$

el producto de los binomios es,

$$x^2 + bx + c = x^2 + \underbrace{(r + s)x}_b + \underbrace{rs}_c$$

entonces, se busca factores de c ,

$$c = rs$$

tales que,

$$b = r + s$$

3. Con $a \neq 1$, se tiene,

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

el producto de los binomios es,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= pqx^2 + (ps + rq)x + rs \\ &= \underbrace{pq}_a x^2 + \underbrace{(ps + rq)}_b x + \underbrace{rs}_c \end{aligned}$$

se busca factores de a y c ,

$$a = pq$$

$$c = rs$$

tales que,

$$b = ps + qr$$

Para ambos casos de factorización se requiere que p , q , r y s sean enteros.

Ejemplo 49 Factorización de trinomios cuadrados perfectos (TCP).

1. $4x^2 + 4xy + y^2$; $A = \sqrt{4x^2} = 2x$, $B = \sqrt{y^2} = y$. Cumple,

$$\begin{aligned} 2AB &= 2(2x)(y) \\ &= 4xy \end{aligned}$$

es el segundo término del trinomio, por lo tanto, se tiene un TCP, la factorización es,

$$4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$$

2. $w^2 - 24w + 144$; $A = \sqrt{w^2} = w$, $B = \sqrt{144} = 12$. Cumple,

$$\begin{aligned} 2AB &= 2(w)(12) \\ &= 24w \end{aligned}$$

se tiene un TCP, la factorización es,

$$w^2 - 24w + 144 = (w - 12)^2$$

3. $y^2 + 10y + 16$; $A = \sqrt{y^2} = y$, $B = \sqrt{16} = 4$. No se cumple,

$$\begin{aligned} 2AB &= 2(y)(4) \\ &= 8y \end{aligned}$$

el trinomio **no es TCP**, no se puede factorizar como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 50 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

1. $x^2 - 3x - 10$. Se describe el procedimiento paso a paso.

(a) La factorización es el producto de dos binomios, el primer término del primero y segundo binomio es x :

$$x^2 - 3x - 10 = \left(x \underbrace{\quad}\right) \left(x \underbrace{\quad}\right)$$

- (b) El signo intermedio del primer binomio es el signo del término en x , el signo intermedio del segundo binomio es el producto de los signos del término en x y el término constante, así se tiene

$$x^2 - 3x - 10 = \left(x \underbrace{-}_{\text{signo}(-3x)} \right) \left(x \underbrace{+}_{\text{signo}(-3x)(-10)} \right)$$

- (c) El segundo término de ambos binomios son r y s , respectivamente, son factores del término constante (10),

$$x^2 - 3x - 10 = \left(x - \underbrace{r} \right) \left(x + \underbrace{s} \right)$$

los factores de 10, pueden ser,

$$\begin{aligned} \text{factor}(10) &= 2 \times 5 \\ &= 5 \times 2 \\ &= 10 \times 1 \end{aligned}$$

tales que,

$$\begin{aligned} (-r)(s) &= -10 \\ -r + s &= -3 \end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} r &= 5 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

- (d) Los factores elegidos y el orden correcto da lugar a la factorización,

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

2. $x^2 + 25x + 144$. La factorización es,

$$x^2 + 25x + 144 = \left(x + \underbrace{r} \right) \left(x + \underbrace{s} \right)$$

Los factores de 144 (r y s) se obtienen de la descomposición de 144 en sus factores primos, como se vio en el capítulo 1. Los factores probables de 144 se pueden obtener como sigue,

144	2	
72	2	2×72
36	2	$(2 \times 2) 36 = 4 \times 36$
18	2	$(2 \times 2 \times 2) 18 = 8 \times 18$
9	3	$(2 \times 2 \times 2 \times 2) 9 = 16 \times 9$
3	3	$(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3) 3 = 48 \times 3$
1		
$\underbrace{\hspace{10em}}_{144=2^4 3^2}$		

Al elegir los factores que cumplan que la suma sea 25, se tiene,

$$x^2 + 25x + 144 = (x + 16)(x + 9)$$

3. $-3x^5 + 3x^4 + 60x^3$, factorizando primero por factor común,

$$-3x^3(x^2 - x - 20)$$

factorizando ahora el trinomio,

$$-3x^3(x^2 - x - 20) = -3x^3\left(x - \underbrace{\quad}\right)\left(x + \underbrace{\quad}\right)$$

los factores de 20, posible elegir son:

$$20 = 2 \cdot 10$$

$$= 4 \cdot 5$$

$$= 1 \cdot 20$$

se elige los factores que cumplan que la suma sea -1 , la factorización resultante es,

$$-3x^3(x^2 - x - 20) = -3x^3(x - 5)(x + 4)$$

4. $13 + 12x - x^2$. Reescribiendo el trinomio de la forma siguiente, $-(x^2 - 12x - 13)$, la factorización es,

$$\begin{aligned} -(x^2 - 12x - 13) &= -(x - \underbrace{\quad})(x + \underbrace{\quad}) \\ &= -(x - 13)(x + 1) \end{aligned}$$

3.2.8 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Método por cambio de variable

En el trinomio,

$$ax^2 + bx + c$$

al multiplicar toda la expresión por el coeficiente de x^2 y hacer un cambio de variable definido por $X = ax$, se obtiene,

$$a(ax^2 + bx + c) \rightarrow (ax)^2 + b(ax) + ac \rightarrow X^2 + bX + C$$

este trinomio es factorizable por el procedimiento visto anteriormente,

$$X^2 + bX + C \rightarrow (X + R)(X + S)$$

donde C ,

$$C = RS$$

tales que,

$$b = R + S$$

cuando se consiguen los factores R y S , la expresión se escribe en términos de la variable original y se divide por a ,

$$\frac{1}{a}(ax + R)(ax + S)$$

uno de los dos binomios debe ser dividido por a o ambos binomios pueden ser divididos por factores de a . El ejemplo siguiente aclara este procedimiento.

Ejemplo 51 Factorizar el trinomio $5x^2 - 14x - 3$.

1. Multiplicar el trinomio por el coeficiente de x^2 de la forma siguiente,

$$5(5x^2 - 14x - 3) \rightarrow (5x)^2 - \underbrace{14(5x)}_{\text{indicar el producto}} - 15$$

2. Al definir el cambio de variable,

$$X = 5x$$

se obtiene un trinomio en términos de la variable X dado por,

$$X^2 - 14X - 15$$

el cual es factorizable como se ha visto anteriormente.

3. La factorización del trinomio es,

$$X^2 - 14X - 15 = (X - R)(X + S)$$

R y S son factores de 15, estos pueden ser,

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5 \\ &= 15 \cdot 1 \end{aligned}$$

se elige los factores que cumplan,

$$\begin{aligned} (-R)(S) &= -15 \\ -R + S &= -14 \end{aligned}$$

Se tiene,

$$X^2 - 14X - 15 = (X - 15)(X + 1)$$

4. La factorización en términos de la variable original es,

$$(5x - 15)(5x + 1)$$

la cual tiene que ser dividida por $a = 5$, recordar que esta expresión fue multiplicada por el coeficiente de x^2 , esto es,

$$\begin{aligned} \frac{(5x - 15)(5x + 1)}{5} &= \frac{(5x - 15)}{5}(5x + 1) \\ &= (x - 3)(5x + 1) \end{aligned}$$

se elige el factor que sea divisible por 5, la factorización es,

$$5x^2 - 14x - 3 = (x - 3)(5x + 1)$$

Ejemplo 52 Factorizar el trinomio $4x^2 - 4x - 3$. Aplicando el procedimiento anterior de forma breve se tiene,

$$4(4x^2 - 4x - 3) = 16x^2 - \underbrace{4(4x)}_{\text{indicar el producto}} - 12$$

la factorización de este trinomio es el producto de dos binomios, el primer término del primero y segundo binomio es $\sqrt{16x^2} = 4x$, el signo intermedio del primer binomio es el signo del término

en x , el signo intermedio del segundo binomio es el producto de los signos del término en x y el término constante; el segundo término de ambos binomios son factores de 12,

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 6 \\ &= 12 \cdot 1 \end{aligned}$$

la suma de los factores de 12 debe ser -4 , se tiene entonces,

$$16x^2 - 4(4x) - 12 = (4x - 6)(4x + 2)$$

finalmente al dividir entre 4, note que los binomios no son divisibles por 4, se puede dividir ambos factores por factores de 4, como se indica,

$$\begin{aligned} \frac{(4x - 6)(4x + 2)}{4} &= \frac{(4x - 6)}{2} \frac{(4x + 2)}{2} \\ &= (2x - 3)(2x + 1) \end{aligned}$$

la factorización de $4x^2 - 4x - 3$ es $(2x - 3)(2x + 1)$

Ejemplo 53 Factorizar $2y^2 - 7y - 4$, se sigue el procedimiento,

$$\begin{aligned} 2y^2 - 7y - 4 &= \frac{2}{2} (2y^2 - 7y - 4) \\ &= \frac{1}{2} [4y^2 - 7(2y) - 8] \\ &= \frac{1}{2} (2y - 8)(2y + 1) \\ &= \frac{(2y - 8)}{2} (2y + 1) \\ &= (y - 4)(2y + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 54 $8(2m + 3)^2 + 14(2m + 3) - 15$. Si $X = (2m + 3)$, la expresión se puede reescribir como,

$$8X^2 + 14X - 15$$

la factorización es como sigue,

$$8X^2 + 14X - 15 = \frac{1}{8} \left((8X)^2 + 14(8X) - 120 \right)$$

los factores de 120 se obtienen mediante el proceso siguiente,

<u>120</u>	<u>2</u>	
60	2	2 × 60
30	2	4 × 30
15	3	8 × 15
5	5	24 × 5
1		
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{120=2^3 \cdot 3 \cdot 5}$		

note que ninguno de los factores anteriores cumple con la condición que su suma sea 14, por lo tanto, descartamos estos factores y buscamos otros, por ejemplo,

$$(5 \times 2 \times 2)(2 \times 3) = 20 \times 6$$

se tiene entonces,

$$\begin{aligned} 8X^2 + 14X - 15 &= \frac{1}{8} (8X + 20) (8X - 6) \\ &= \frac{(8X + 20)}{4} \frac{(8X - 6)}{2} \\ &= (2X + 5) (4X - 3) \end{aligned}$$

en términos de la expresión original,

$$\begin{aligned} 8(2m + 3)^2 + 14(2m + 3) - 15 &= (2(2m + 3) + 5) (4(2m + 3) - 3) \\ &= (4m + 6 + 5) (8m + 12 - 3) \\ &= (4m + 11) (8m + 9) \end{aligned}$$

Método por factor común y agrupamiento

Para factorizar el trinomio,

$$ax^2 + bx + c$$

se busca dos números (R y S) tales que,

$$RS = ac$$

y su suma algebraica sea,

$$R + S = b$$

una vez encontrado tales números el trinomio se reescribe como,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + Rx + Sx + c$$

el cual puede ser factorizado por agrupamiento y factor común. El ejemplo siguiente aclara este proceso,

Ejemplo 55 Factorizar el trinomio $3x^2 + 14x + 8$

Donde $a = 3$, $b = 14$, $c = 8$; se buscan factores de

$$RS = ac = 24$$

tales que la suma sea,

$$R + S = b = 14$$

se tiene que la decomposición de 24 en sus factores primos es, $24 = 2^3 3$, los factores posibles pueden ser,

$$(24) (1); (8) (3); (4) (6); (12) (2);$$

los factores que cumplen son $(12) (2)$, estos factores permiten escribir el trinomio de la forma siguiente,

$$3x^2 + 14x + 8 = 3x^2 + 2x + 12x + 8$$

agrupando y factorizando por factor común,

$$\begin{aligned} (3x^2 + 12x) + (2x + 8) &= 3x(x + 4) + 2(x + 4) \\ &= (3x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

al efectuar la comprobación

$$(3x + 2)(x + 4) = 3x^2 + 14x + 8$$

Ejemplo 56 Factorizar el trinomio $6x^2 - 13x - 5$

Se tiene $a = 6$, $b = -13$, $c = -5$; se buscan factores tales que,

$$\begin{aligned} RS &= ac \\ &= -30 \\ R + S &= b \\ &= -13 \end{aligned}$$

estos factores son, (-15) y 2 .

$$\begin{aligned} 6x^2 - 13x - 5 &= 6x^2 - 15x + 2x - 5 \\ &= (6x^2 + 2x) - (15x + 5) \\ &= 2x(3x + 1) - 5(3x + 1) \\ &= (2x - 5)(3x + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 57 Factorizar el trinomio $3x^2 + 19x - 14$

Se tiene que $(3)(-14) = -42$, luego se buscan factores de -42 , cuya suma sea 19 . Estos factores son 21 y -2 .

$$\begin{aligned} 3x^2 + 19x - 14 &= 3x^2 + 21x - 2x - 14 \\ &= (3x^2 + 21x) - (2x + 14) \\ &= 3x(x + 7) - 2(x + 7) \\ &= (3x - 2)(x + 7) \end{aligned}$$

Ejercicio 29 Identifica y factoriza los trinomios siguientes

1. $1 + 100h^2 + 20h$

2. $9a^2 - 24a + 16$

3. $\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{3}x + 16$

4. $x^2 + 5x + 6$

5. $y^2 - 9y + 18$

6. $x^2 + 6x + 5$

7. $x^2 - 6x + 9$

8. $x^2 + 7x + 12$

9. $x^2 - 3x + 2$

10. $x^2 - x - 6$

11. $z^2 - 10z + 21$

12. $5w^3 + 10w^2 - 315w$

13. $x^2 - 6x + 8$

14. $9 - 8x - x^2$

15. $72 + 6y - y^2$

16. $x^2 + 4x - 5$

17. $z^2 - z - 42$

18. $x^2 + x + 1$

19. $z^2 + 14z + 49$

20. $y^2 - 12y + 36$

21. $-3x^5 + 3x^4 + 60x^3$

22. $72 + 6y - y^2$

23. $z^2 - 7z + 9$

24. $16 - 8y + y^2$

25. $3x^2 - 13x + 4$

26. $4 - 4z - 15z^2$

27. $5x^2 - 2x - 7$

28. $9y^2 - 448y + 64$

29. $5z^2 + 14z - 3$

30. $60 + 4z - z^2$

31. $4y^2 + 4y + 1$

32. $-4t^2 - 14t - 12$

33. $14w^2 - 19w - 3$

34. $25w^2 + 15w - 4$

35. $-6t^2 - 26t - 8$

36. $6w^2 + 35w - 6$

37. $-8w^2 - 16w - 6$

38. $4w^2 - 8w - 5$

39. $9t^2 + 6t + 1$

40. $16y^2 - 24y + 9$

41. $3 + 11x - 20x^2$

42. $2w^2 - 17w + 21$

Ejercicio 30 Completa el término que falta en la factorización de los siguientes trinomios.

1. $g^2 - 8g + 16 = (g - 4)(g - \quad)$

2. $4y^2 - y - 3 = (\quad + 3)(y - 1)$

3. $6t^2 - 23t + 20 = (3t - 4)(2t - \quad)$

4. $4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(\quad + 3)$

5. $15g^2 + 34g + 15 = (5g + 3)(3g + \quad)$

3.2.9 Caso Especial de Factorización de Trinomios

Los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ se factorizan como el producto de dos binomios

$$x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$$

tales que,

$$c = rs$$

$$b = r + s$$

donde r y s son enteros.

Una factorización de este tipo de expresiones algebraicas puede ser posible al considerar factores r y s no enteros, el ejemplo siguiente muestra este tipo de factorización. El procedimiento que se describe en adelante se conoce como Método de Completar el Cuadrado, el cual es útil cuando se resuelven ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 58 Factorizar la expresión algebraica

$$x^2 - 6x - 3$$

se buscan factores r y s que cumplan,

$$x^2 - 6x - 3 = (x - r)(x + s)$$

tales que,

$$(-r)(s) = -3$$

$$-r + s = -6$$

lo cual no es posible si r y s deben ser enteros. El procedimiento siguiente muestra la posibilidad de factorizar este trinomio.

1. Agrupar los términos x^2 y x ,

$$(x^2 - 6x) - 3$$

2. Agregar a los términos agrupados la mitad del coeficiente de x al cuadrado y restarlo al mismo tiempo para evitar que el trinomio sea modificado,

$$\begin{aligned} & \left(x^2 - 6x + \underbrace{\left(\frac{6}{2} \right)^2}_{\text{agregar}} \right) - 3 - \underbrace{\left(\frac{6}{2} \right)^2}_{\text{restar}} \\ & (x^2 - 6x + 9) - 3 - 9 \\ & \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}_{TCP} - 12 \end{aligned}$$

3. Factorizar los términos agrupados como un trinomio cuadrado perfecto,

$$(x - 3)^2 - 12$$

4. Factorizar la expresión como una diferencia de cuadrados,

$$(x - 3)^2 - 12 = (x - 3 - \sqrt{12}) (x - 3 + \sqrt{12})$$

el método es útil siempre y cuando el signo intermedio sea negativo. Si es positivo la expresión algebraica no es factorizable.

Ejemplo 59 Factorizar el trinomio $x^2 - 6x + 10$ utilizando el método del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x) + 10 &= (x^2 - 6x + 3^2) + 10 - 3^2 \\ &= (x - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

la expresión resultante no es factorizable, el signo intermedio es positivo, por lo tanto no se puede factorizar como una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 60 Factorizar el trinomio $3x^2 - 5x + 1$ utilizando el método del ejemplo anterior.

1. Multiplicar por $\frac{3}{3}$ para evitar que el trinomio sea modificado,

$$\frac{3}{3} (3x^2 - 5x + 1)$$

2. Reescribir de la forma siguiente,

$$= 3 \left(\frac{3x^2 - 5x + 1}{3} \right) = 3 \left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \right)$$

3. Aplicar el método de los ejemplos anteriores como sigue,

$$\begin{aligned} 3 \left[\left(x^2 - \frac{5}{3}x \right) + \frac{1}{3} \right] &= 3 \left[\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{2 \times 3} \right)^2 \right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{2 \times 3} \right)^2 \right] \\ &= 3 \left[\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} \right) + \frac{1}{3} - \frac{25}{36} \right] \\ &= 3 \left[\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} \right) + \frac{1}{3} - \frac{25}{36} \right] \\ &= 3 \left[\left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{13}{36} \right] \\ &= 3 \left(x - \frac{5}{6} - \sqrt{\frac{13}{36}} \right) \left(x - \frac{5}{6} + \sqrt{\frac{13}{36}} \right) \end{aligned}$$

3.2.10 Factorización y Simplificación de Derivadas Algebraicas

Los ejemplos siguientes muestran la aplicación de la factorización y la simplificación de expresiones algebraicas, obtenidas en la derivación de funciones algebraicas. El procedimiento se lleva a cabo paso a paso y con detalle para que el lector identifique el proceso de simplificación.

Ejemplo 61 *Simplifique las expresiones algebraicas siguientes.*

1.

$$\begin{aligned} x^3 \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) + \left(x^{1/2} + 1 \right) (3x^2) &= \frac{1}{2} x^{5/2} + 3x^{5/2} + (3x^2) \\ &= \frac{7}{2} x^{5/2} + 3x^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^2 \left(\frac{x-2-x-3}{(x-2)^2} \right) &= \frac{3(x+3)^2}{(x-2)^2} \left(\frac{-5}{(x-2)^2} \right) \\ &= \frac{-15(x+3)^2}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{(x^2-1)^4(2x) - x^2(4)(x^2-1)^3(2x)}{(x^2-1)^8} &= \frac{2x(x^2-1)^4 - 8x^3(x^2-1)^3}{(x^2-1)^8} \\ &= \frac{\overbrace{2x}^1 \overbrace{(x^2-1)^4}^2 - \overbrace{8x^3}^3 \overbrace{(x^2-1)^3}^4}{(x^2-1)^8} \end{aligned}$$

los términos 1 y 3, y los términos 2 y 4; contienen variables comunes, el factor común estará formado por las variables comunes de menor potencia, esto es,

$$\begin{aligned} &\overbrace{2x(x^2-1)^3}^{\text{factor común}} ((x^2-1) - 4x^2) \\ &= \frac{2x(x^2-1)^3((x^2-1) - 4x^2)}{(x^2-1)^8} \\ &= \frac{2x(x^2-1)^3(-3x^2-1)}{(x^2-1)^8} \\ &= \frac{2x(x^2-1)^3(-1)(3x^2+1)}{(x^2-1)^8} \\ &= \frac{-2x(3x^2+1)}{(x^2-1)^5} \end{aligned}$$

$$4. \frac{(x^2-1)(2x+1)^{-1/2} - 2x(2x+1)^{1/2}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1) \overbrace{(2x+1)^{-1/2}}^1 - \overbrace{2x(2x+1)^{1/2}}^2}{(x^2-1)^2}$$

los términos 1 y 2 son términos comunes, el factor común estará formado por el factor de menor potencia, en este caso, $(2x + 1)^{-1/2}$, se tiene,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2x + 1)^{-1/2} \overbrace{\left((x^2 - 1) - 2x(2x + 1)\right)}^{\text{simplificando}}}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{(2x + 1)^{-1/2} (-3x^2 - 1 - 2x)}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{-(3x^2 + 2x + 1)}{(2x + 1)^{1/2} (x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{-(3x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x + 1} (x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 \frac{(x^{1/2} + 1) \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - (x^{1/2} - 1) \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{(x^{1/2} - 1)^2} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(x^{1/2} - 1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \overbrace{x^{-1/2}}^{\text{términos}} + \frac{1}{2} \overbrace{x^{-1/2}}^{\text{semejantes}}}{(x^{1/2} - 1)^2} = \frac{x^{-1/2}}{(x^{1/2} - 1)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 31 Simplifique las expresiones algebraicas siguientes.

1. $\frac{1}{3} \left[\frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)(x^3 + 1)} \right]$
2. $\frac{(x^2 + x)(6x^2) - 2x^3(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$
3. $\frac{(x^2 + 1) \frac{1}{2}x^{-1/2} - x^{1/2}(2x)}{(x^2 + 1)^2}$
4. $\frac{18x(x^2 - 1)^4(3x^2 + 1)^2 - 8x(3x^2 + 1)^3(x^2 - 1)^3}{(x^2 - 1)^8}$
5. $x^2(2xe^{x^2}) + e^{x^2}(2x)$
6. $(5x^2 + 2) \frac{1}{2}(x^4 + 5)^{-1/2} 4x^3 + (x^4 + 5)^{1/2}(10x)$
7. $\frac{(m^2 + 9)^{1/2}(20m) - 10m^2 \left(\frac{1}{2}\right) (m^2 + 9)^{-1/2}(2m)}{m^2 + 9}$
8. $3x^4(-e^{-x}) + e^{-x}(12x^3)$
9. $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2}$

$$10. \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$11. \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$12. \frac{w^2(2e^{2w}) - 2we^{2w}}{w^4}$$

$$13. (x^2 - 1)(3e^{3x+2}) + e^{3x+2}(2x)$$

$$14. \frac{(x^2 + x)(6x^2) - 2x^3(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$$

Capítulo 4

Expresiones Racionales

Una expresión racional es una expresión algebraica fraccionaria, donde numerador y denominador son polinomios, por ejemplo, los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de orden 4 y 5, respectivamente,

$$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + x$$

y

$$Q(x) = 9x^5 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2$$

pueden formar la expresión racional,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + x}{9x^5 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2}$$

4.1 Operaciones con Expresiones Racionales

4.1.1 Evaluación de Expresiones Racionales

Evaluar una expresión racional significa sustituir el valor de la o las variables en la expresión racional y efectuar los cálculos indicados.

Ejemplo 62 *Evalúe las expresiones racionales siguientes.*

1. Evaluar $\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12}$ en $x = -2$. Una forma de indicar que la expresión racional será evaluada en $x = -2$, es,

$$\left[\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12} \right]_{x=-2}$$

Al sustituir el valor de -2 en la expresión racional es recomendable utilizar paréntesis para distinguir los signos que corresponden a la expresión racional y el signo que corresponde al valor asignado de la variable, puede visualizar la expresión racional como sigue,

$$\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12} = \frac{(\square)^4 - 27(\square)}{(\square)^2 + (\square) - 12}$$

en la cual existen campos pendientes de ser llenados con el valor de la variable. Se tiene entonces,

$$\begin{aligned}\left[\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12} \right]_{x=-2} &= \frac{(-2)^4 - 27(-2)}{(-2)^2 + (-2) - 12} \\ &= \frac{16 + 54}{4 - 2 - 12} \\ &= \frac{70}{-10} = -7\end{aligned}$$

2. Evaluar $\frac{xy}{x+y}$ en $x = -2$, $y = 4$, se denota por,

$$\left[\frac{xy}{x+y} \right]_{x=-2, y=4}$$

al evaluar se tiene,

$$\begin{aligned}\left[\frac{xy}{x+y} \right]_{x=-2, y=4} &= \frac{(-2)(4)}{(-2) + 4} \\ &= \frac{-8}{2} = -4\end{aligned}$$

3. Evaluar $\frac{4x^2 - 5x + 7}{3x - 5}$ en $x = -5$,

$$\begin{aligned}\frac{4(-5)^2 - 5(-5) + 7}{3(-5) - 5} &= \frac{100 + 25 + 7}{-15 - 5} \\ &= \frac{132}{-20} = -\frac{33}{5}\end{aligned}$$

4. Evaluar $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10}$ en $x = -2$,

$$\frac{(-2)^2 - 5(-2)}{(-2)^2 - 3(-2) - 10} = \frac{14}{0} \text{ (ned)}$$

note que esta expresión racional **no está definida (ned)** para $x = -2$. O de otra forma, la expresión racional **está definida** para cualquier valor de $x \neq -2$.

5. Evaluar $\frac{4x^2 - 13x + 3}{8x^2 - 10x + 2}$ en $x = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}\frac{4\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 13\left(\frac{1}{4}\right) + 3}{8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{4}\right) + 2} &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{13}{4} + 3}{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2} \\ &= \frac{0}{0}\end{aligned}$$

esta expresión racional se **indetermina** para $x = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 32 Evalúa las siguientes expresiones racionales para el valor de la variable indicada cuando sea posible, indique si no está definida.

$$1. \frac{4t^2 - 5t}{4t - 10}, \quad t = \frac{5}{2}$$

$$2. \frac{x^2 - 3x + 12}{9x + 6}, \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$3. \frac{3z^3 + 4z + 1}{5z^2 - 1}, \quad z = \frac{1}{5}$$

$$4. \frac{x^4 - 2x^3 + 5x - 27}{x(x-8)(x-2)}, \quad x = -2$$

$$5. \frac{8t^2 - 6t + 9}{16t^2 - 56t + 49}, \quad t = \frac{3}{4}$$

$$6. \frac{z^4 - 190}{z^3 - 4z^2 - 2z}, \quad z = 0$$

$$7. \frac{3w^3 - 6w^2 + 3w}{2w^4 + 5w^3 - 3w - 8}, \quad w = 1$$

$$8. \frac{x^2 - 9}{2x + 6}, \quad x = 3$$

$$9. \frac{y^2 - 49x^2}{y - 7x}, \quad y = \frac{1}{7}$$

$$10. \frac{x + 5}{x^2 + x - 20}, \quad x = 0$$

Ejemplo 63 Determinar los valores de la o las variables para los cuales las expresiones racionales siguientes no están definidas.

Recuerde que una expresión racional no está definida cuando el denominador es cero; por lo tanto es necesario encontrar los valores que hacen al denominador cero.

1. Dada $\frac{5x^2 - 7x + 9}{x^2 - x - 30}$. Se debe encontrar los valores de x que hacen el denominador,

$$x^2 - x - 30 = 0$$

Al factorizar el trinomio se tiene,

$$(x + 5)(x - 6) = 0$$

se tiene que cuando $x = -5$,

$$(-5 + 5)(-5 - 6) = 0$$

$$(0)(-11) = 0$$

recuerde, todo número multiplicado por cero, es cero.

La forma factorizada del trinomio muestra que el segundo factor es cero cuando $x = 6$, cualquiera de estos valores de la variable x hacen el denominador "cero". Esto significa que la expresión racional no está definida para $x = -5$ y $x = 6$. O de otra forma, la expresión racional **está definida** para cualquier valor de $x \neq -5$ y $x \neq 6$.

2. Dada $\frac{(z-4)(2z+3)}{(2z^3 - z^2 - 15z)}$. De forma similar, se debe encontrar los valores de z tales que el denominador,

$$(2z^3 - z^2 - 15z) = 0$$

$$z(2z + 5)(z - 3) = 0$$

la forma factorizada muestra que para,

$$z = 0$$

$$(2z + 5) = 0 \rightarrow z = -\frac{5}{2}$$

$$(z - 3) = 0 \rightarrow z = 3$$

la expresión $\frac{(z-4)(2z+3)}{(2z^3 - z^2 - 15z)}$ no está definida.

3. Dada $\frac{a^2 - b^2 - 1}{a^2 - 2ab + b^2}$ determine los valores de a y b para los cuales la expresión racional no está definida.

Se tiene que determinar que,

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= 0 \\ (a - b)^2 &= 0 \end{aligned}$$

note que si $a = b$, el denominador es cero. Por lo tanto, la expresión racional $\frac{a^2 - b^2 - 1}{a^2 - 2ab + b^2}$ no está definida para valores de $a = b$.

4. Dada $\frac{b^2 - 3b - 4}{b^2 - 13b + 36}$ determine los valores de b para los cuales la expresión racional no está definida e indeterminada.

Se tiene que determinar para que valores de b denominador y numerador sean cero, por lo tanto, para el numerador,

$$\begin{aligned} b^2 - 3b - 4 &= 0 \\ (b + 1)(b - 4) &= 0 \\ b &= -1; b = 4 \end{aligned}$$

para el denominador,

$$\begin{aligned} b^2 - 13b + 36 &= 0 \\ (b - 4)(b - 9) &= 0 \\ b &= 4; b = 9 \end{aligned}$$

luego $\frac{b^2 - 3b - 4}{b^2 - 13b + 36}$:

(a) **No está definida** para $b = 9$.

(b) **Se indetermina** para $b = 4$.

(c) **Vale cero** para $b = -1$

Ejercicio 33 Encuentra para qué valores de la variable, cada expresión racional no está definida.

1. $\frac{z^3 + z^2 - 3z - 21}{7 + 4z}$

2. $\frac{6t^3 - 17t + 4}{(2t - 7)(3t + 21)}$

3. $\frac{3z^2 + 4z - 10}{z^2 - 16}$

4. $\frac{w^2 - 9}{w^2 - 9w + 14}$

5. $\frac{5x^2 + 13x - 6}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 25)}$

6. $\frac{a^2 - 16}{a^2 - 3a + 2}$

7. $\frac{8w^3 + 6w^2}{9w^2 - 25}$

8. $\frac{32x - 56}{2x^2 - 11x + 14}$

9. $\frac{12t^3 - 15t + 7}{9t^2 - 30t + 25}$

10. $\frac{z^5 - 5z^3 - 6}{z^4 - 9z^2}$

Ejercicio 34 Determine los valores de variable para los cuales la expresión racional no está definida e indeterminada.

3. $\frac{4x^2 + 8x + 4}{5x^2 + 10x + 5}$

4. $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 12}$

1. $\frac{x^2 - 36}{x^2 + x - 30}$

5. $\frac{a^2 + 4a - 12}{a^2 + 2a - 8}$

2. $\frac{14x^2 + 35x + 21}{12x^2 + 30x + 18}$

6. $\frac{x + 4}{x^2 + 8x + 16}$

4.1.2 Simplificación de Expresiones Racionales

Para simplificar expresiones racionales, primero se debe reescribir la expresión racional en su forma factorizada, esto es, factorizar tanto el numerador como el denominador. Las formas factorizadas permiten aplicar la propiedad de las fracciones siguiente,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

esto es, cancelar los factores comunes.

Ejemplo 64 Simplificar las expresiones racionales, determinar los valores de la o las variables para los cuales las expresiones racionales no estén definidas.

1. Simplificar $\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12}$

$$\frac{x^4 - 27x}{x^2 + x - 12} = \frac{x(x^3 - 27)}{x^2 + x - 12} = \frac{x(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+4)}$$

antes de cancelar los factores comunes observe que la expresión original factorizada no está definida para $x = 3$ y $x = -4$. Esto es, la expresión original factorizada se puede simplificar, si se considera,

$$x \neq 3 \quad y \quad x \neq -4$$

luego,

$$\underbrace{\frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+4)}}_{\text{Expresión original}} \xrightarrow{\text{si } x \neq 3, x \neq -4} \underbrace{\frac{x(x^2+3x+9)}{(x+4)}}_{\text{Expresión simplificada}}$$

se cancela el factor $(x-3)$. La expresión original y la expresión simplificada no está definida para $x = -4$; la expresión simplificada está definida para $x = 3$, pero como ésta proviene de una expresión racional no definida en este valor, se dice entonces que la expresión simplificada no está definida para este mismo valor, esto es,

$$\frac{x(x^2 + 3x + 9)}{(x + 4)} \text{ definida para } x \neq 3, x \neq -4$$

Este hecho se utiliza frecuentemente en Cálculo Diferencial para eliminar la indeterminación y poder conocer el valor de una expresión que presenta una indeterminación en un valor dado de la variable.

2. Simplificar $\frac{x^3 - 8}{5x^2 - 9x - 2}$

$$\frac{x^3 - 8}{5x^2 - 9x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(5x + 1)(x - 2)}$$

note que la expresión original no está definida para,

$$(5x + 1)(x - 2) = 0$$

o también,

$$(5x + 1) = 0 \rightarrow x = -1/5$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

o de otra forma, la expresión original esta definida para,

$$x \neq -1/5 \text{ o } x \neq 2$$

la expresión simplificada es,

$$\frac{(x^2 + 2x + 4)}{(5x + 1)} \text{ definida para } x \neq -1/5, x \neq 2$$

3. Simplificar $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)^2} = \frac{(a + b)}{(a - b)} \text{ definida para } a \neq b$$

note que en este caso, tanto la expresión original como la expresión simplificada están definidas $a \neq b$.

Ejercicio 35 Simplifica las siguientes expresiones racionales

7. $\frac{a^2 - 12a + 27}{a^2 - 7a - 18}$

1. $\frac{(4t - 9)(7t + 2)}{7t^2 + 23t + 6}$

8. $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 14x + 40}$

2. $\frac{c^2 - 4c + 4}{(c - 2)^2(3c + 1)}$

9. $\frac{(c + 8)(c + 6)}{c^2 + 9c + 18}$

3. $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 + 2x - 35}$

10. $\frac{2x^2 - 7x - 15}{3x^2 - 13x - 10}$

4. $\frac{a^2 - 14a + 48}{(a - 6)^2}$

11. $\frac{3m^2 - 25m + 28}{9m^2 - 16}$

5. $\frac{6x^2 - 6y^2 - 5xy}{8x^3 - 27y^3}$

12. $\frac{2x^4y^3 - x^3y^3}{x^2y^4 + x^4y^4}$

6. $\frac{w^2 + 7w - 8}{w^2 - 1}$

13. $\frac{a^4 - b^4}{a^8 - b^8}$

14. $\frac{a+b}{a^3+b^3}$

18. $\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3+ab^2-ba^2}$

15. $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}$

19. $\frac{x^2-5x}{x^2-3x-10}$

16. $\frac{x-4}{x^2-7x+12}$

20. $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$

17. $\frac{64-b^3}{16-8b+b^2}$

21. $\frac{x^4-27x}{x^2+x-12}$

4.1.3 Multiplicación de Expresiones Racionales

Si $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$ son expresiones racionales, donde $Q \neq 0$, $S \neq 0$, la multiplicación de estas expresiones sigue la regla siguiente,

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

esto es, para multiplicar expresiones racionales multiplique numerador por numerador y denominador por denominador. Es recomendable, antes de efectuar la multiplicación simplificar la expresión racional.

Ejemplo 65 *Simplifique y multiplique las expresiones racionales siguientes, indique las condiciones de las variables en la expresiones.*

$$1. \frac{x^3-125}{x^2+x-6} \times \frac{3x^2-4x-4}{3x^2-13x-10} \times \frac{x^2}{x^2+5x+25}$$

La expresión factorizada es,

$$\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{(3x+2)(x-2)}{(3x+2)(x-5)} \times \frac{x^2}{x^2+5x+25}$$

definida para, $x \neq 3$, $x \neq 2$, $x \neq -2/3$ o $x \neq 5$.

La expresión simplificada es,

$$\frac{x^2}{x-3}$$

definida para $x \neq 3$, $x \neq 2$, $x \neq -2/3$ o $x \neq 5$

$$2. \left(\frac{2y^2+2y-40}{2y^2-28y+80} \right)^3 \left(\frac{y^2-5y-50}{y^2+10y+25} \right)^4$$

La expresión factorizada es,

$$\left(\frac{2(y+5)(y-4)}{2(y-4)(y-10)} \right)^3 \left(\frac{(y+5)(y-10)}{(y+5)^2} \right)^4$$

La expresión original está definida para $y \neq 4$, $y \neq 10$, $y \neq -5$.

La expresión simplificada es,

$$\begin{aligned} \left(\frac{(y+5)}{(y-10)} \right)^3 \left(\frac{(y-10)}{(y+5)} \right)^4 &= \frac{(y+5)^3 (y-10)^4}{(y-10)^3 (y+5)^4} \\ &= \frac{y-10}{y+5} \text{ definida para} \\ y &\neq 4, y \neq 10, y \neq -5. \end{aligned}$$

3. $\frac{z^2 + 4z - 5}{z^2 + 7z - 8} \times \frac{z^2 + 10z + 16}{z^2 - 25}$

La expresión factorizada es,

$$\begin{aligned} \frac{(z+5)(z-1)}{(z+8)(z-1)} \times \frac{(z+8)(z+2)}{(z-5)(z+5)} \\ \text{definida para} \\ z \neq -8, z \neq 1, z \neq 5, z \neq -5. \end{aligned}$$

La expresión simplificada es,

$$\begin{aligned} \frac{(z+2)}{(z-5)} \\ \text{definida para} \\ z \neq -8, z \neq 1, z \neq 5, z \neq -5 \end{aligned}$$

Ejercicio 36 En cada ejercicio simplifique las expresiones algebraicas. Indica las condiciones para poder hacerlo.

1. $\frac{5a^2 + 7a - 24}{a^2 + 6a + 8} \times \frac{a - 4}{5a - 8}$

2. $\frac{z^2 - 9z + 8}{z^2 + 2z - 8} \times \frac{4 - z}{z^2 + z - 2}$

3. $\frac{24x - 30}{14x^3} \times \frac{21x^5}{4x - 5}$

4. $\frac{4x^2 - 25}{x^2 - 11x + 18} \times \frac{x^2 - 81}{2x^2 + 14x - 45}$

5. $\frac{w^2 - w - 12}{w^2 - 6w - 8} \times \frac{w^2 - 7w + 10}{w^2 - 9}$

6. $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10} \times \frac{2x^2 + 7x - 15}{2x^3 + x^2}$

7. $\left(\frac{(w+9)(w-2)}{w^2 + 2w - 8} \right)^3 \left(\frac{w^2 + 8w + 16}{w^2 - 81} \right)^3$

4.1.4 División de Expresiones Racionales

Si $\frac{P}{Q}$ y $\frac{R}{S}$ son expresiones racionales, con $Q \neq 0$, $R \neq 0$ y $S \neq 0$, la división de estas expresiones racionales se indica por,

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S}$$

La división de una expresión racional entre una expresión racional distinta de cero se define como la multiplicación de la expresión racional del dividendo $\frac{P}{Q}$ por el recíproco del divisor $\frac{R}{S}$ esto es,

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} &= \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R} \\ \text{con } Q &\neq 0, R \neq 0 \text{ y } S \neq 0 \end{aligned}$$

o también,

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{PS}{QR} = \frac{\text{productos de extremos}}{\text{productos de medios}}$$

Ejemplo 66 Efectuar las operaciones siguientes.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\frac{x^2 - 64}{x^2}}{\frac{(x-8)(8x^2 + 64x)}{x}} &= \frac{x^2 - 64}{x^2} \div \frac{(x-8)(8x^2 + 64x)}{x} \text{ con } x \neq 0, \text{ luego,} \\ &= \frac{(x-8)(x+8)}{x^2} \div \frac{(x-8)8x(x+8)}{x} \\ &= \frac{(x-8)(x+8)}{x^2} \times \frac{x}{8x(x-8)(x+8)} \\ &= \frac{1}{8x^2} \\ &\text{con } x \neq 0, x \neq 8, x \neq -8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{\frac{3z^2 - 4z - 4}{z^2 + 5z + 6}}{\frac{9z^2 + 12z + 4}{z^2 - 4}} &= \frac{3z^2 - 4z - 4}{z^2 + 5z + 6} \div \frac{9z^2 + 12z + 4}{z^2 - 4} \\ &= \frac{3z^2 - 4z - 4}{z^2 + 5z + 6} \times \frac{z^2 - 4}{9z^2 + 12z + 4} \\ &= \frac{(3z+2)(z-2)}{(z+3)(z+2)} \times \frac{(z-2)(z+2)}{(3z+2)^2} \\ &= \frac{(z-2)^2}{(3z+2)(z+3)} \\ &\text{con } z \neq -3, z \neq -2, z \neq -\frac{2}{3}, z \neq 2. \end{aligned}$$

4.1.5 Adición y Sustracción de Expresiones Racionales

La **suma de expresiones racionales con igual denominador**, resulta en una expresión racional que tiene el mismo denominador y numerador igual a la suma de los numeradores, esto es,

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q} \text{ con } Q \neq 0$$

de forma similar se tiene,

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q} \text{ con } Q \neq 0$$

Ejemplo 67 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique,

$$1. \quad \frac{3x^2 - 2x}{x+2} + \frac{x^2 + 2x - 16}{x+2}$$

Esto es, suma de expresiones racionales con igual denominador,

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - 2x}{x + 2} + \frac{x^2 + 2x - 16}{x + 2} &= \frac{3x^2 - 2x + x^2 + 2x - 16}{x + 2} \\ &= \frac{4x^2 - 16}{x + 2} \\ &= \frac{4(x - 2)(x + 2)}{x + 2}, \text{ si } x \neq -2 \\ &= 4(x - 2)\end{aligned}$$

$$2. \frac{(y + 5)(y - 4)}{y^2 + 13y + 42} - \frac{4 - y}{(y + 6)(y + 7)}$$

Note que $y^2 + 13y + 42 = (y + 7)(y + 6)$, luego,

$$\begin{aligned}\frac{(y + 5)(y - 4)}{(y + 7)(y + 6)} - \frac{4 - y}{(y + 6)(y + 7)} &= \frac{(y + 5)(y - 4) - (4 - y)}{(y + 6)(y + 7)} \\ &= \frac{y^2 + y - 20 - 4 + y}{(y + 6)(y + 7)} \\ &= \frac{y^2 + 2y - 24}{(y + 6)(y + 7)} \\ &= \frac{(y + 6)(y - 4)}{(y + 6)(y + 7)} \\ &= \frac{(y - 4)}{(y + 7)} \text{ con } y \neq -6, y \neq -7.\end{aligned}$$

La **suma de expresiones racionales con diferente denominador**, resulta en una expresión racional con un denominador común o MCD, el cual se encuentra factorizando cada denominador y tomando el producto de los factores comunes y no comunes de mayor potencia; aplicando la regla siguiente,

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS} \text{ con } Q \neq 0, S \neq 0$$

de forma similar se tiene,

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} = \frac{PS - RQ}{QS} \text{ con } Q \neq 0, S \neq 0$$

Ejemplo 68 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

$$1. \frac{4x^2 - 9}{7x^2 + 22x + 3} - \frac{2x^2 - 3}{14x^2 + 2x}$$

Se identifica una resta de expresiones racionales con diferente denominador.

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 - 9}{7x^2 + 22x + 3} - \frac{2x^2 - 3}{14x^2 + 2x} &= \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(x + 3)(7x + 1)} - \frac{2x^2 - 3}{2x(7x + 1)} \\ \text{MCD: } &2x(x + 3)(7x + 1)\end{aligned}$$

aplicando la regla,

$$\frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(x + 3)(7x + 1)} - \frac{2x^2 - 3}{2x(7x + 1)} = \frac{\overbrace{2x(2x - 3)(2x + 3)}^{1er \text{ término}} - \overbrace{(x + 3)(2x^2 - 3)}^{2do \text{ término}}}{2x(x + 3)(7x + 1)}$$

el primer término de la fracción resultante se obtiene de,

$$\frac{2x(x+3)(7x+1)}{(x+3)(7x+1)}(2x-3)(2x+3) = 2x(2x-3)(2x+3)$$

se cancelan los factores comunes

el segundo término es,

$$\frac{2x(x+3)(7x+1)}{2x(7x+1)}(2x^2-3) = (x+3)(2x^2-3)$$

se cancelan los factores comunes

efectuando operaciones y simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{2x(2x-3)(2x+3) - (x+3)(2x^2-3)}{2x(x+3)(7x+1)} &= \frac{8x^3 - 18x - (2x^3 - 3x + 6x^2 - 9)}{2x(x+3)(7x+1)} \\ &= \frac{6x^3 - 6x^2 - 15x + 9}{2x(x+3)(7x+1)} \\ &= \frac{3(2x^3 - 2x^2 - 5x + 3)}{2x(x+3)(7x+1)} \\ \text{con } x &\neq 0, x \neq -3, x \neq -1/7. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{4x^2-9}{7x^2+22x+3} - \frac{2x^2-3}{14x^2+2x} = \frac{3(2x^3-2x^2-5x+3)}{2x(x+3)(7x+1)}$$

con $x \neq 0, x \neq -3, x \neq -1/7$.

$$2. \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+4} + \frac{6}{(x+4)^2},$$

$$\text{MCD: } (x-2)(x+4)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+4} + \frac{6}{(x+4)^2} &= \frac{1(x+4)^2 - 1(x-2)(x+4) + 6(x-2)}{(x-2)(x+4)^2} \\ &= \frac{12x+12}{(x-2)(x+4)^2} = \frac{12(x+1)}{(x-2)(x+4)^2} \\ \text{con } x &\neq 2, x \neq -4. \end{aligned}$$

Ejercicio 37 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

$$1. \frac{x+2}{(2x-1)(x+3)} + \frac{3x+1}{(2x-1)(x-2)} - \frac{6x+2}{(2x-1)(x+3)(x-2)}$$

$$2. \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+3} + \frac{9}{9-x^2}$$

$$3. \frac{1+2x}{1+2x+4x^2} - \frac{2x}{2x-1} - \frac{8x^3}{1-8x^3}$$

$$4. \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2-1}{2x^2+3x-2} - \frac{7x^3-7x^2+2x-2}{(2x^2+3x-2)(x+2)}$$

$$5. \frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{y^2-x^2}$$

$$6. \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} + \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$7. \frac{a}{a^2-(b-c)^2} - \frac{b}{b^2-(a-c)^2}$$

$$8. \frac{x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)}{x - \frac{1}{x}}$$

4.2 Fracciones Complejas

Fracciones complejas son aquellas en el que el numerador, o el denominador, o ambos a la vez contienen fracciones; por ejemplo:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad \frac{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x \cdot y}}{\frac{y}{x^2-y^2}}, \quad \frac{w + \frac{1}{w}}{1 - \frac{1}{w}}.$$

Ejemplo 69 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{xy}}{\frac{y}{x^2-y^2}} \\ &= \frac{\frac{xy-x-y}{(x+y)xy}}{\frac{y}{(x-y)(x+y)}} = \frac{xy-x-y}{(x+y)xy} \times \frac{(x-y)(x+y)}{y} \\ &= \frac{(xy-x-y)(x-y)}{xy^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 70 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique,

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

Ejemplo 71 Efectúe las operaciones indicadas y simplifique,

$$\begin{aligned}
 \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} &= \frac{(1+x^2)^{1/2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{1/2}}}{1+x^2} \\
 &= \frac{\frac{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)^{1/2} - x^2}{(1+x^2)^{1/2}}}{1+x^2} \\
 &= \frac{\frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^{1/2}}}{1+x^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1+x^2}} \\
 &= \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} \times \frac{1}{1+x^2} \\
 &= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

4.3 Racionalización de Expresiones Racionales

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A+B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador multiplicando el numerador y denominador por el radical conjugado $A-B\sqrt{C}$, esto conduce a,

$$(A+B\sqrt{C})(A-B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

Ejercicio 38 Efectúa las operaciones siguientes

$$1. \frac{x^2 - 7x + 4}{x^2 + 10x + 25} + \frac{1}{x + 5}$$

$$2. \frac{w+1}{w^2+3} + \frac{w-1}{w^2-3}$$

$$3. \frac{\frac{a-3}{a-4} - \frac{a-4}{a-3}}{\frac{1}{a-3} - \frac{1}{a-4}}$$

$$4. \frac{a}{a^2-4} - \frac{a+2}{a^2-4a+4}$$

$$5. 1 - \frac{x+y}{x-y}$$

$$6. \frac{1 - \frac{2ab}{a^2+b^2}}{\frac{a^3-b^3}{a-b} - 3ab}$$

$$7. 4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x-1}}}$$

$$8. \frac{a}{a^2+a-20} + \frac{3-a}{a^2-6a+8} - \frac{1}{a^2+8a+15}$$

$$9. \frac{3x-1}{2x^2-9x-5} - \frac{2x-1}{3x^2-14x-5}$$

$$10. \frac{1}{2a^2+11a-6} - \frac{3}{4a^2+14a-30}$$

$$11. \frac{7r}{49-r^2} - \frac{7-r}{r+7}$$

$$12. \frac{7b-4}{2b-8} - \frac{2b^2-5b}{8-2b}$$

$$13. \frac{(w+5)(w-4)}{w^2+13w+42} - \frac{4-w}{(w+6)(w+7)}$$

$$14. \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Capítulo 5

Ecuación Algebraica

Una **Ecuación Algebraica** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, recuerde que una expresión algebraica contiene variables y constantes las cuales se combinan con los operadores matemáticos de adición, sustracción, multiplicación, división, exponenciación y raíz. Algunos ejemplos de ecuaciones algebraicas son:

$$\begin{aligned}-2x + \frac{3x}{5} - 1 &= x + \frac{2}{3}x \\ \frac{x+3}{x-3} &= \frac{5}{2} - \frac{x-3}{x+3} \\ \sqrt{x-4} + x &= 16 \\ (2x-1)(x-1) &= 6\end{aligned}$$

Las expresiones algebraicas de cada lado de la igualdad se llaman miembros de la ecuación, así se tiene,

$$\underbrace{\sqrt{3x+4}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{-2x^2-9}_{\text{Segundo miembro}}$$

Resolver la ecuación significa encontrar los valores de la incógnita (variable) que hacen verdadera la proposición de igualdad; para resolverla tratamos de encontrar una ecuación simple y equivalente en la cual la incógnita se encuentre aislada en un lado de la ecuación, generalmente del lado izquierdo. Una ecuación equivalente tiene la misma solución que la ecuación original.

En este capítulo se dan a conocer los procedimientos utilizados para resolver ecuaciones algebraicas lineales y no lineales de una sola variable.

5.1 Ecuaciones Equivalentes

Si A , B y C son expresiones algebraicas, una ecuación equivalente se obtiene al aplicar las siguientes propiedades.

1. Propiedad de igualdad de la suma,

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$$

Por una cuestión práctica se requiere $C \neq 0$.

$\Leftrightarrow$: significa equivalente a... o es lo mismo que...

Ejemplo 72 Al aplicar la propiedad de la suma a la ecuación $x = x$, se obtienen las ecuaciones equivalentes siguientes las cuales tienen la misma solución, no esta de menos recordar que las operaciones se efectúan sobre ambos miembros de la ecuación

$$\begin{array}{rcll} x & = & x & \text{Ecuación original} \\ x + 2 & = & x + 2 & \text{sumar 2} \\ x + 2(x - 1) & = & x + 2(x - 1) & \text{sumar } 2(x - 1) \\ x + 2(x - 1) - 5 & = & x + 2(x - 1) - 5 & \text{sumar } -5 \end{array}$$

2. Propiedad de igualdad de la multiplicación,

$$A = B \Leftrightarrow AC = BC$$

Por una cuestión práctica se requiere $C \neq 0$.

Ejemplo 73 Al aplicar la propiedad de la multiplicación a la ecuación $x = x$, se obtienen las ecuaciones equivalentes siguientes las cuales tienen la misma solución, no esta de menos recordar que las operaciones se efectúan sobre ambos miembros de la ecuación

$$\begin{array}{rcll} x & = & x & \text{ecuación original} \\ 2x & = & 2x & \text{multiplicar por 2} \\ \frac{1}{2(x-1)}x & = & \frac{1}{2(x-1)}x & \text{multiplicar por } \frac{1}{2(x-1)} \\ \frac{-5x}{2(x-1)} & = & \frac{-5x}{2(x-1)} & \text{multiplicar por } -5 \end{array}$$

3. Propiedad del producto nulo,

$$AB = 0, \text{ si y sólo si } A = 0 \text{ o bien } B = 0$$

para aplicar la propiedad de producto nulo se requiere una expresión algebraica factorizada.

La propiedad del producto nulo, puede ser extendida a mayor número de factores, por ejemplo,

$$ABC...G = 0, \text{ si y sólo si } A = 0, B = 0, \dots \text{ o bien } G = 0$$

Ejemplo 74 Al aplicar la propiedad del producto nulo a las ecuaciones siguientes, se tiene,

$$\begin{array}{rcll} 2x & = & 0, & \text{el único factor que puede ser "0" es } x, x = 0 \\ x(x - 3) & = & 0, & x = 0; x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \\ (x - 2)(x - 5) & = & 0, & x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \end{array}$$

5.1.1 Resolución de Ecuaciones de Primer Grado

Una ecuación de primer grado tiene la forma,

$$bx + c = 0, \text{ con } b \neq 0$$

donde b y c son número reales.

Para resolver ecuaciones de primer grado se aplica sucesivamente la propiedad de igualdad de la suma y de la multiplicación, y recordando los conceptos de opuesto y recíproco.

Ejemplo 75 Resolver la ecuación $7x - 4 = 6x + 8$.

La solución de esta ecuación se presenta con el mayor detalle posible. La idea principal es **aislar la incógnita** al primer miembro de la ecuación al aplicar la propiedad de igualdad de la suma.

$$\begin{array}{rcll}
 7x - 4 & = & 6x + 8 & \text{sumar el opuesto de } -4 \\
 7x - 4 + 4 & = & 6x + 8 + 4 & \text{simplificar} \\
 7x & = & 6x + 12 & \text{sumar el opuesto de } 6x \\
 7x - 6x & = & 6x + 12 - 6x & \text{simplificar} \\
 x & = & 12 & \text{solución}
 \end{array}$$

Ejemplo 76 Resolver la ecuación $3x - 2 = 5(x + 4)$.

La solución de esta ecuación se presenta con el mayor detalle posible. La idea principal es **aislar la incógnita** al primer miembro de la ecuación al aplicar la propiedad de igualdad de la suma.

$$\begin{array}{rcll}
 3x - 2 & = & 5(x + 4) & \text{efectuar operaciones} \\
 3x - 2 & = & 5x + 20 & \text{sumar el opuesto de } -2 \\
 3x - 2 + 2 & = & 5x + 20 + 2 & \text{simplificar} \\
 3x & = & 5x + 22 & \text{sumar el opuesto de } 5x \\
 3x - 5x & = & 5x + 22 - 5x & \text{simplificar} \\
 -2x & = & 22 & \text{multiplicar por el recíproco de } -2 \\
 \frac{-2x}{-2} & = & \frac{22}{-2} & \text{simplificar} \\
 x & = & -11 & \text{solución}
 \end{array}$$

O dividir ambos miembros de la ecuación por -2

Ejemplo 77 Resolver las ecuaciones siguientes.

1. $(x - 3)(x + 1) = (x - 5)(x - 2)$

$$\begin{array}{rcll}
 (x - 3)(x + 1) & = & (x - 5)(x - 2) \\
 x^2 - 2x - 3 & = & x^2 - 7x + 10 \\
 -2x - 3 & = & -7x + 10 \\
 -2x + 7x & = & 10 + 3 \\
 5x & = & 13 = \frac{13}{5}
 \end{array}$$

2. $\frac{2x - 8}{3} + 5 = 6 - \frac{3x - 5}{4}$

Para resolver ecuaciones de primer grado que contenga fracciones, se recomienda multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD para eliminar los denominadores y operar sin fracciones.

$$\begin{aligned}
 \frac{2x-8}{3} + 5 &= 6 - \frac{3x-5}{4} && \text{multiplicar } 3 \times 4 \\
 (3)(4) \left(\frac{2x-8}{3} + 5 \right) &= \left(6 - \frac{3x-5}{4} \right) (3)(4) \\
 (3)(4) \frac{2x-8}{3} + 5(3)(4) &= 6(3)(4) - \frac{3x-5}{4} (3)(4) \\
 4(2x-8) + 60 &= 72 - (3x-5)(3) && \text{operar} \\
 8x - 32 + 60 &= 72 - 9x + 15 && \text{sumar los opuestos} \\
 8x + 9x &= 72 + 15 + 32 - 60 \\
 17x &= 59 && \text{dividir toda la ecuación entre 17} \\
 x &= \frac{59}{17}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 39 Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned}
 1. \quad 5x + 3x &= 2 + 2x && 8. \quad -\frac{14}{5}y + 8 = \frac{6y-20}{5} \\
 2. \quad \frac{4}{3}x - \frac{x}{3} + 25 &= 2x + 2 && 9. \quad \frac{z-4}{4} + \frac{z-12}{6} = \frac{z}{3} \\
 3. \quad 6x - 7 &= 2x + 29 && 10. \quad 6x = 4(5x-2) + 20 \\
 4. \quad \frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} &= \frac{4x+2}{9} && 11. \quad \frac{5y-6}{2} = -y-9 \\
 &&& \text{Resolver para } x; a, b \text{ y } c \text{ son constantes} \\
 &&& \text{diferentes de cero.} \\
 5. \quad 6x &= 4(5x-2) + 20 && 12. \quad 3ax + b = cx + 4 \\
 6. \quad \frac{5}{6}w - \frac{1}{3} &= \frac{w}{3} + \frac{7}{6} && 13. \quad \frac{x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{2a}{b}s \\
 7. \quad 2(z+15) + 3z &= 180 + 2z
 \end{aligned}$$

5.2 Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación cuadrática escrita en su forma general es,

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

donde a , b y c son números reales, los términos (t) de la ecuación cuadrática se identifican como sigue,

$$\underbrace{ax^2}_{\text{t. cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{t. lineal}} + \underbrace{c}_{\text{t. constante}} = 0$$

resolver una ecuación cuadrática es encontrar sus raíces o los valores de x que satisfacen la ecuación.

Las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por cualquiera de los métodos siguientes.

1. Directo
2. Factorización
3. Completando el cuadrado
4. Fórmula general

El método a elegir depende de la ecuación a resolver y de la facilidad para aplicar el método.

5.2.1 Método Directo

Este método se aplica a las ecuaciones del tipo,

$$ax^2 - c = 0$$

al resolver para x se tiene,

$$\begin{aligned} ax^2 &= c \\ x^2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

se extrae la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \\ x &= \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

frecuentemente para distinguir las soluciones obtenidas se denota cada solución como x_1 y x_2 , se tiene:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 78 Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $10x^2 - 20 = 0$, resolviendo para x^2 y extrayendo raíz cuadrada,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{20}{10} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x_1 &= \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

La comprobación se lleva a cabo al sustituir los valores de la incógnita en la ecuación original.

Para $x_1 = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 10(\sqrt{2})^2 - 20 &= 0 \\ 20 - 20 &= 0 \end{aligned}$$

Para $x_2 = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 10(-\sqrt{2})^2 - 20 &= 0 \\ 20 - 20 &= 0 \end{aligned}$$

ambas soluciones obtenidas satisfacen a la ecuación original.

2. $x^2 + 9 = 0$, resolviendo para x^2 y extrayendo raíz cuadrada,

$$2x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

esta ecuación no tiene solución dentro del conjunto de los números reales. No existe la raíz cuadrada real de un número negativo.

3. $(2x - 7)^2 = 0$, extrayendo raíz cuadrada y resolviendo para x ,

$$\begin{aligned}\sqrt{(2x - 7)^2} &= \pm\sqrt{0} \\ 2x - 7 &= \pm 0 \\ x &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

comprobando para $x = \frac{7}{2}$,

$$\left(2\left(\frac{7}{2}\right) - 7\right)^2 = 0$$

4. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$, extrayendo raíz cuadrada y resolviendo para x ,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} &= \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \\ x - \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \\ x &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}}\end{aligned}$$

Comprobando

$$\text{Para } x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4} \\ \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4} \\ \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2 &= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

$$\text{Para } x = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4} \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{13}{4} \\ \left(-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2 &= \frac{13}{4}\end{aligned}$$

ambas soluciones satisfacen la ecuación.

Ejercicio 40 Resolver las ecuaciones siguientes por el método de directo.

$$7. \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = 0$$

$$1. 4x^2 = 13$$

$$2. 6(x-1)^2 = 9$$

$$8. (x+3)^2 = 0$$

$$3. 7y^2 - 20 = 0$$

$$9. -(x+3)^2 = 9$$

$$4. x^2 = 169$$

$$10. 12x^2 = 48$$

$$5. (x-2)^2 = 6$$

$$11. r^2 + 25 = 0$$

$$6. \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

5.2.2 Método por Factorización

Para resolver una ecuación cuadrática por el método de factorización se requiere la forma factorizada de la ecuación para aplicar la propiedad del producto nulo. Los ejemplos siguientes aclaran este proceso.

Ejemplo 79 Resolver las ecuaciones cuadráticas siguientes.

$$1. \text{ Resolver } x^2 + x - 6 = 0.$$

La forma factorizada es:

$$(x+3)(x-2) = 0$$

aplicando la propiedad del producto nulo, se tiene,

$$x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

$$2. \text{ Resolver } (x+4)(x-1) = 6$$

Un error frecuentemente cometido es considerar que,

$$(x+4)(x-1) = 6$$

$$(x+4) = 6 \Leftrightarrow x = 6-4 = 2$$

$$(x-1) = 6 \Leftrightarrow x = 6+1 = 7$$

lo cual es **FALSO**. La propiedad del producto nulo puede aplicarse solamente cuando los factores sean iguales a cero. La solución correcta es obtenida como,

$$x^2 + 3x - 4 - 6 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x+5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5$$

$$x-2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

3. Resolver $4x^2 - 3x = 0$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x &= 0 \Leftrightarrow x(4x - 3) = 0 \\ x_1 &= 0 \\ (4x - 3) &= 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. Resolver $7x - 3 - 2x^2 = 0$

Al reescribir la ecuación y multiplicar por -1 se obtiene,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \\ (2x - 1)(x - 3) &= 0 \\ 2x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x_2 = 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 41 Resolver las ecuaciones siguientes por el método de factorización.

1. $4x^2 - 28x = 0$

2. $7x - 2x^2 = 0$

3. $2x^2 + 5x - 12 = 0$

4. $7x - 3 - 2x^2 = 0$

5. $24a^2 - 2a = 15$

6. $a^2 - \frac{3}{5}a + \frac{2}{25} = 0$

7. $x(x + 3) = 10$

8. $2w^2 = -(7w + 3)$

9. $(2x - 1)(x - 1) = 6$

10. $(x + 3)(x - 2) = 0$

11. $(y - 3)(y - 4) = 0$

12. $x^2 + x - 12 = 0$

13. $2x^2 + 4x = 30$

14. $3m^2 - 2m = 1$

15. $4t^2 + 2t - 2 = 0$

16. $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$

17. $2m^2 + m = 6$

18. $z(2z + 1) = 6$

19. $x^2 + 6x = 36 + 6x$

20. $(x + 3)(x - 2) = 6$

5.2.3 Método de Completar el Cuadrado

El método de factorización funciona para ecuaciones que pueden factorizarse con facilidad, cuando no es posible la factorización puede aplicarse el Método de Completar el Cuadrado. El procedimiento trata de obtener un trinomio cuadrado perfecto de un lado de la ecuación, el cual es factorizable fácilmente, y del otro lado de la ecuación los términos constantes.

Ejemplo 80 Resolver la ecuación $x^2 - 6x - 3 = 0$.

El procedimiento siguiente se aplica si $a = 1$, esto es, el coeficiente que multiplica a x^2 es 1.

1. Reescribir la ecuación de la forma siguiente:

$$x^2 - 6x = 3$$

2. Agregar a ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente de x al cuadrado. Esto es, agregar $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ y simplificar:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 3 + 9 \\ \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{TCP} &= 12 \end{aligned}$$

3. Factorizar el TCP obtenido del lado izquierdo de la ecuación:

$$(x - 3)^2 = 12$$

4. Extraer la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación y resolver para la incógnita:

$$\begin{aligned} x - 3 &= \pm\sqrt{12} \\ x &= 3 \pm \sqrt{12} \end{aligned}$$

Ejemplo 81 Resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$

1. Ordenando la ecuación como en el ejemplo anterior y al dividir toda la ecuación por 2, para que el coeficiente de x^2 sea 1, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x &= 1 \\ x^2 + \frac{3}{2}x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Agregar a ambos lados de la ecuación la mitad del coeficiente de x al cuadrado. Esto es, agregar $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$ y simplificar:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} &= \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \\ \underbrace{x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}}_{TCP} &= \frac{17}{16} \end{aligned}$$

3. Factorizar el TCP obtenido del lado izquierdo de la ecuación:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

4. Extraer la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación y resolver para la incógnita:

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{4} &= \pm\sqrt{\frac{17}{16}} \\ x &= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 82 Resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Siguiendo el mismo procedimiento de completar el cuadrado, a la forma general de una ecuación cuadrática, se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 ax^2 + bx &= -c & \text{reescribir la ecuación} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} & \text{dividir entre } a \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} & \text{agregar } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 \left(x + \frac{b^2}{4a^2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} & \text{Factorizar el TCP} \\
 x + \frac{b^2}{4a^2} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} & \text{extraer la raíz cuadrada} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{resolver para } x \text{ y simplificar} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{solución.}
 \end{array}$$

Ejercicio 42 Resolver las ecuaciones siguientes por el método de completar el cuadrado.

1. $x^2 - 4x - 2 = 0$
2. $2y^2 - \frac{5}{4}y = \frac{1}{2}$
3. $x^2 + 6x + 6 = 0$
4. $a^2 - \frac{3}{5}a + \frac{2}{25} = 0$
5. $x^2 - 3x - 1 = 0$
6. $x^2 + 3x + 1 = 0$
7. $3x^2 + 6x - 2 = 0$
8. $2x^2 + 3x - 1 = 0$
9. $2x^2 + 3x + 2 = 0$
10. $3x^2 - 5x - 1 = 0$
11. $x^2 - 6x + 10 = 0$
12. $6x^2 - 12x = 3$
13. $m^2 - 3 = -m$
14. $3x - 4 = -2x^2$

5.2.4 Fórmula General

La solución de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

por el método de completar el cuadrado conduce a la ecuación

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

la cual se conoce como **Fórmula General** para resolver ecuaciones cuadráticas. El término dentro de la raíz cuadrada se conoce como discriminante,

$$D = b^2 - 4ac$$

de la ecuación cuadrática, el valor del discriminante identifica el tipo de solución obtenida, así se tiene,

1. Si $D > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales diferentes.
2. Si $D = 0$, la ecuación cuadrática tiene una solución real.
3. Si $D < 0$, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

Ejemplo 83 Resolver mediante la fórmula general las ecuaciones siguientes.

1. $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Para utilizar la ecuación cuadrática identifique cada término en la ecuación general, así se tiene,

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$a = 3, b = -5, c = 1$$

luego calcule el valor del discriminante, se tiene que,

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4(3)(1) \\ &= 13 \end{aligned}$$

como $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes. Sustituya los valores de las constantes y use paréntesis para evitar confusiones.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{13}}{(2)(3)} \\ x &= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \\ x_1 &= \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \\ x_2 &= \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

2. $12x^2 - 17x + 6 = 0$

Identificando se tiene

$$a = 12, b = -17, c = 6.$$

$$D = (-17)^2 - (4)(12)(6) = 1 > 0$$

La ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y diferentes.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{1}}{(2)(12)} \\ x &= \frac{17 \pm 1}{24} \\ x_1 &= \frac{17 + 1}{24} = \frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{17 - 1}{24} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. $2x^2 + 3x + 2 = 0$

Identificando se tiene

$$a = 2, b = 3, c = 2.$$

$$D = 3^2 - (4)(2)(2) = -7 < 0$$

por lo tanto, la ecuación no tendrá soluciones reales.

Ejercicio 43 Resolver las ecuaciones siguientes utilizando la fórmula general.

1. $3x^2 - 5x + 1 = 0$

2. $12x^2 - 17x + 6 = 0$

3. $6x^2 - 31x + 35 = 0$

4. $2x^2 - x - 6 = 0$

5. $m^2 = 4m - 1$

6. $8x + 3 = 8x^2$

7. $-2x^2 + 0.7x = -0.3$

8. $4x = -2x^2 + 3$

9. $2.1x^2 - 4.7x - 6.2 = 0$

10. $1.34a^2 - 1.1a = -1.02$

5.3 Reducción de Ecuaciones a la Forma Cuadrática

Una ecuación cuadrática tiene la forma general,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

una ecuación que puede convertirse a la forma anterior y resolverse por los métodos antes vistos, tiene la forma,

$$a \left(\underbrace{x^2}_{\text{cuadrático}} \right)^d + b \underbrace{x}_{\text{lineal}}^d + c = 0$$

donde el término cuadrático y el término lineal están elevados a un exponente d , particularmente el exponente mayor de la incógnita debe ser el doble del exponente menor de dicha incógnita y tener un término contante o independiente.

$$ax^{2d} + bx^d + c = 0$$

Cuando las ecuaciones cumple con la condición anterior se pueden reducir y resolver como una ecuación cuadrática mediante un cambio de variable.

Ejemplo 84 Identifique si las ecuaciones dadas a continuación pueden reducirse a la forma cuadrática general.

1. $x - 6x^{1/2} - 15 = 0$

En principio la ecuación tiene tres términos, el exponente mayor de la incógnita x es "1" y el exponente menor de la incógnita es $\frac{1}{2}$, esto es, $d = 1/2$ y $2d = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, el exponente mayor de la incógnita es el doble del menor exponente de la incógnita. Por lo tanto, la ecuación puede reducirse y resolverse como una ecuación cuadrática.

2. $-15x^{3/2} - 100 + x^3 = 0$

El mayor exponente de x es "3" y el menor exponente es " $\frac{3}{2}$ " se tiene $3 = 2\left(\frac{3}{2}\right)$, lo cual cumple con la condición. Por lo tanto, la ecuación puede reducirse y resolverse como una ecuación cuadrática. Reordenando la ecuación de mayor a menor exponente de la incógnita, se tiene,

$$x^3 - 15x^{3/2} - 100 = 0$$

3. $-x^4 - 12x^2 - 5 = 0$.

La ecuación puede reducirse y resolverse como una ecuación cuadrática ya que el exponente mayor de la incógnita es el doble del menor exponente de la incógnita. A esta ecuación se le conoce como ecuación bicuadrada.

4. $x^{6/5} + x^{3/5} - 300 = 0$

El exponente mayor de la incógnita cumple: $2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$

La ecuación puede reducirse y resolverse como una ecuación cuadrática.

5. $(m^2 - 2)^3 - 7(m^2 - 2)^{3/2} + 5 = 0$

Note que el término $m^2 - 2$ contiene a la incógnita y aparece elevado a diferentes exponentes, para visualizar de forma fácil cambiamos $(m^2 - 2)$ por X , esto es, $X = m^2 - 2$, con este cambio la ecuación se convierte en,

$$\begin{aligned}(m^2 - 2)^3 - 7(m^2 - 2)^{3/2} + 5 &= 0 \\ X^3 - 7X^{3/2} + 5 &= 0\end{aligned}$$

note entonces, que el exponente mayor de la incógnita es el doble del exponente menor, por lo tanto, la ecuación es reducible a una ecuación cuadrática.

Ejemplo 85 Resolver la ecuaciones reducibles a la forma cuadrática.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (ecuación bicuadrada)

La ecuación es reducible a la forma cuadrática, el mayor exponente de la incógnita es el doble del menor exponente, esto es, $d = 2$, se define un cambio de variable o incógnita, donde la nueva incógnita, por ejemplo u , será igual a la incógnita original (x) elevado al exponente menor, esto es,

$$u = x^d = x^2$$

la ecuación original se convierte ahora en,

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 13u + 36 = 0$$

la cual puede resolverse por los métodos ya revisados. Resolviendo por factorización se tiene,

$$\begin{aligned}u^2 - 13u + 36 &= 0 \\ (u - 9)(u - 4) &= 0 \\ u - 9 &= 0 \rightarrow u = 9 \\ u - 4 &= 0 \rightarrow u = 4\end{aligned}$$

La solución en términos de la incógnita original es,

$$\begin{aligned}u &= 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ u &= 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2\end{aligned}$$

la cual tiene 4 soluciones.

2. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Si el cambio de variable es $u = x^2$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$u^2 - 5u - 36 = 0$$

$$(u - 9)(u + 4) = 0$$

$$u - 9 = 0 \rightarrow u = 9$$

$$u + 4 = 0 \rightarrow u = -4$$

en términos de la variable original

$$u = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$u = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}; \text{ no tiene solución real.}$$

3. $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

Si $u = x^2 + x$

$$u^2 - 8u + 12 = 0$$

$$(u - 2)(u - 6) = 0$$

$$u - 2 = 0 \rightarrow u = 2$$

$$u - 6 = 0 \rightarrow u = 6$$

En términos de la incógnita original,

$$u = 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$u = 6 \Leftrightarrow x^2 + x = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x_3 = -3$$

$$x_4 = 2$$

La solución es, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 2$.

Ejemplo 86 Resolver las ecuaciones reducibles a la forma cuadrática

1. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Si el cambio de variable es $u = x^2$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$u^2 - 5u - 36 = 0$$

$$(u - 9)(u + 4) = 0$$

$$u - 9 = 0 \Leftrightarrow u = 9$$

$$u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = -4$$

en términos de la variable original

$$\begin{aligned} u &= 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \\ u &= -4 \Leftrightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4}, \text{ no tiene solución real.} \end{aligned}$$

La cual tiene solo 2 soluciones reales.

2. $x - 6x^{1/2} - 15 = 0$

Como se vio la ecuación puede reducirse y resolverse como una ecuación cuadrática mediante un cambio de variable, dado por,

$$u = x^{1/2}$$

la ecuación se convierte ahora a una ecuación cuadrática,

$$u^2 - 6u - 15 = 0$$

al resolverse por fórmula general, $a = 1$, $b = -6$, $c = -15$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4(1)(-15) \\ &= 96 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} u &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{96}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \times 6}}{2} \\ u &= \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

la solución en términos de la variable original es,

$$x^{1/2} = 3 \pm 2\sqrt{6}$$

elevando al cuadrado ambos términos de la ecuación,

$$x = (3 \pm 2\sqrt{6})^2$$

las soluciones son,

$$\begin{aligned} x_1 &= (3 + 2\sqrt{6})^2 \\ x_2 &= (3 - 2\sqrt{6})^2 \end{aligned}$$

3. $(m^2 - 2)^3 - 7(m^2 - 2)^{3/2} + 5 = 0$

Si $Z = m^2 - 2$,

$$Z^3 - 7Z^{3/2} + 5 = 0$$

la ecuación es reducible a una ecuación cuadrática con el cambio de variable $U = Z^{3/2}$,

$$U^2 - 7U + 5 = 0$$

al resolverla por fórmula general, con $a = 1$, $b = -7$, $c = 5$.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4(1)(5) \\ &= 29 \end{aligned}$$

luego,

$$U = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

la solución en términos de Z ,

$$Z^{3/2} = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}$$

eleva toda la ecuación a la potencia $\frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} (Z^{3/2})^{2/3} &= \left(\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3} \\ Z &= \left(\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

la solución en términos de la variable original,

$$m^2 - 2 = \left(\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}$$

resolviendo para m ,

$$\begin{aligned} m^2 &= 2 + \left(\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3} \\ m &= \pm \sqrt{2 + \left(\frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}} \end{aligned}$$

las soluciones son,

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{2 + \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}} = 2.318; & m_2 &= \sqrt{2 + \left(\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}} = 1.693; \\ m_3 &= -\sqrt{2 + \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}} = -2.318; & m_4 &= -\sqrt{2 + \left(\frac{7 - \sqrt{29}}{2} \right)^{2/3}} = -1.693. \end{aligned}$$

Ejercicio 44 Resolver las ecuaciones reducibles a la forma cuadrática.

1. $x^4 + 10x^2 + 14 = 0$

2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

4. $6w - 13\sqrt{w} + 6 = 0$

5. $(2x^2 - 5x)^4 - (2x^2 - 5x)^2 - 6 = 0$

6. $x^3 - 3x^2 - 3x = 0$

5.4 Ecuaciones con Valor Absoluto

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x se define por,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La definición de valor absoluto se aplica de igual forma para resolver ecuaciones que involucre el valor absoluto.

Ejemplo 87 Resolver $\left|x - \frac{7}{4}\right| = \frac{11}{4}$

El valor de la expresión algebraica $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ puede ser positivo o negativo.

Si el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ es positivo, entonces

$$\left|x - \frac{7}{4}\right| = x - \frac{7}{4}$$

Si el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ es negativo, entonces

$$\left|x - \frac{7}{4}\right| = -\left(x - \frac{7}{4}\right)$$

esto es, se debe multiplicar por (-1) para convertir el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ en positivo.

Por lo tanto, se tiene dos ecuaciones de primer grado a resolver,

$$\begin{aligned} \text{si } x - \frac{7}{4} &> 0 \text{ entonces } x - \frac{7}{4} = \frac{11}{4} \\ \text{si } x - \frac{7}{4} &< 0 \text{ entonces } -\left(x - \frac{7}{4}\right) = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

resolviendo la primera ecuación,

$$\begin{aligned} x - \frac{7}{4} &= \frac{11}{4} \\ x &= \frac{11}{4} + \frac{7}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

para la segunda,

$$\begin{aligned} -\left(x - \frac{7}{4}\right) &= \frac{11}{4} \\ x - \frac{7}{4} &= -\frac{11}{4} \\ x &= -\frac{11}{4} + \frac{7}{4} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Comprobación para $x = \frac{9}{2}$ en la ecuación original,

$$\begin{aligned}\left|\frac{9}{2} - \frac{7}{4}\right| &= \frac{11}{4} \\ \left|\frac{11}{4}\right| &= \frac{11}{4} \\ \frac{11}{4} &= \frac{11}{4}\end{aligned}$$

para $x = -1$

$$\begin{aligned}\left|-1 - \frac{7}{4}\right| &= \frac{11}{4} \\ \left|-\frac{11}{4}\right| &= \frac{11}{4} \\ -\left(\frac{-11}{4}\right) &= \frac{11}{4} \\ \frac{11}{4} &= \frac{11}{4}\end{aligned}$$

Ejemplo 88 Resolver $|3x + 4| = 8$

De la misma forma planteada anteriormente, directamente, las ecuaciones a resolver son,

$$\begin{aligned}\text{si } 3x + 4 &> 0 \text{ entonces } 3x + 4 = 8 \\ \text{si } 3x + 4 &< 0 \text{ entonces } -(3x + 4) = 8\end{aligned}$$

$$3x + 4 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$-(3x + 4) = 8 \Leftrightarrow x = -4$$

Ejemplo 89 Resolver $|x^2 - 4| = x + 2$

De la misma forma planteada anteriormente, directamente, las ecuaciones a resolver son,

$$\begin{aligned}\text{si } x^2 - 4 &> 0 \text{ entonces } x^2 - 4 = x + 2 \\ \text{si } x^2 - 4 &< 0 \text{ entonces } -(x^2 - 4) = x + 2\end{aligned}$$

la primera ecuación se resuelve,

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= x + 2 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 \\ x - 3 &= 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \\ x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x_2 = -2\end{aligned}$$

Comprobación para $x_1 = 3$

$$\begin{aligned}|3^2 - 4| &= 3 + 2 \\ |5| &= 5\end{aligned}$$

para $x_1 = -2$

$$\begin{aligned} |(-2)^2 - 4| &= -2 + 2 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación se resuelve,

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= x + 2 \\ 0 &= x^2 + x - 2 \\ 0 &= (x + 2)(x - 1) \\ x + 2 &= 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \\ x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 \end{aligned}$$

la comprobación para $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} |1 - 4| &= 1 + 2 \\ |-3| &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Se tiene entonces que la soluciones encontradas son aceptadas.

Ejercicio 45 Resolver las ecuaciones siguientes.

1. $|7x + 2| = -2$

2. $|3e - 7| < 2$

3. $|3x + 4| < 8$

4. $|2.2y - 1.1| = 5.5$

5. $\left| \frac{2 - 3x}{5} \right| \geq 2$

6. $\left| \frac{1}{2} - 3p \right| < \frac{7}{2}$

5.5 Conjunto de Números Complejos (opcional)

Sea la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

al resolver se tiene,

$$\begin{aligned} x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} \end{aligned}$$

la cual no tiene solución real, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo, así los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Este tipo de ecuaciones, sin embargo, tiene solución en el Conjunto de Números Complejos ($\mathbb{C}$) donde se define i como la unidad imaginaria, tal que,

$$i = \sqrt{-1}$$

o también,

$$i^2 = -1$$

es decir, un artificio matemático que le permite a un número negativo tener raíz cuadrada.

Ejemplo 90 Resolver $x^2 + 9 = 0$.

Al resolver se tiene,

$$\begin{aligned}x^2 &= -9 \\x &= \pm\sqrt{-9} \\&= \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} \\&= \pm 3i\end{aligned}$$

comprobando la solución se tiene, para $x = \pm 3i$

$$\begin{aligned}(\pm 3i)^2 + 9 &= 0 \\9i^2 + 9 &= 0 \\9(-1) + 9 &= 0\end{aligned}$$

5.5.1 Introducción a los Números Complejos

Los números complejos es un conjunto ($\mathbb{C}$) que contiene elementos de la forma,

$$a + bi$$

donde a y b son números reales. Un número complejo esta formado por una parte real (a) y una parte imaginaria (b); el conjunto de números complejos es un conjunto más amplio que el conjunto de los números reales, se tiene entonces que,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

y

$$I \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Ejemplo 91 Ejemplos de números complejos.

La parte real de un número complejo la identificamos como "a" y la parte imaginaria como "b", así tenemos.

1. $3i$, parte real $a = 0$; parte imaginaria $b = 3$. (número imaginario puro)
2. $-2 - \frac{3}{4}i$, $a = -2$, $b = \frac{3}{4}$.
3. $-\pi - \sqrt{2}i$, $a = -\pi$, $b = -\sqrt{2}$
4. -20 , $a = -20$, $b = 0$ (un número real es un número complejo con parte imaginaria igual con cero).

Los números complejos se identifican mediante variable compleja, z ,

$$z = a + bi$$

donde z representa un número complejo.

Operaciones Elementales en $\mathbb{C}$

Sea z_1 y z_2 números complejos, dados por,

$$z_1 = a + bi \quad \text{y} \quad z_2 = c + di$$

entonces se tiene las operaciones elementales siguientes:

1. Igualdad de números complejos,

$$z_1 = z_2$$

si y sólo si, las partes reales de ambos números complejos serán iguales y sus partes imaginarias correspondientes también sean iguales, esto es.

$$z_1 = z_2, \text{ si y sólo si, } a = c \text{ y } b = d$$

2. Suma

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

sumar las partes reales de cada número y sume sus partes imaginarias respectivas.

3. Resta

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

reste las partes reales de cada número y reste sus partes imaginarias respectivas.

4. Multiplicación

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

5. División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

donde $\bar{z}_2$ es el conjugado complejo del denominador, esto es, si

$$z_2 = a + bi$$

su complejo conjugado es,

$$\bar{z}_2 = a - bi$$

así la operación es,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \\ &= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (ad + bc)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

note que el producto de z_2 por su conjugado complejo, $\bar{z}_2$, resulta en una suma de cuadrados, esto es

$$\begin{aligned} z_2 \bar{z}_2 &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 92 Operaciones fundamentales con números complejos. Sea $z_1 = 3 - 2i$ y $z_2 = 4 - 5i$

1. $z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (4 - 5i) = 7 - 7i$
2. $z_1 - z_2 = (3 - 2i) - (4 - 5i) = -1 + 3i$
3. $z_1 z_2 = (3 - 2i)(4 - 5i) = 3(4 - 5i) - 2i(4 - 5i) = 2 - 23i$
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(3 - 2i)}{(4 - 5i)} \cdot \frac{(4 + 5i)}{(4 + 5i)} = \frac{22 + 7i}{16 + 25} = \frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$

Ejemplo 93 Potencias de números complejos

1. $i^{23} = (i^2)^{11} i = (-1)^{11} i = -i$
2. $i^{46} = (i^2)^{23} = (-1)^{23} = -1$
3. $(\sqrt{-3}) = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$
4. $\sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i$
5. $(\sqrt{-5})(\sqrt{-3}) = (i\sqrt{5})(i\sqrt{3}) = i^2\sqrt{5 \times 3} = -\sqrt{15}$

Nota: La propiedad de los números reales,

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

sólo se cumple cuando ambos números a y b son positivos, no se cumple cuando ambos son negativos.

*Así lo siguiente es **FALSO***

$$\sqrt{-2}\sqrt{-8} = \sqrt{(-2)(-8)} = \sqrt{16} = 4$$

es importante escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de la unidad imaginaria. Como se presenta,

$$(\sqrt{-1}\sqrt{2})(\sqrt{-1}\sqrt{8}) = (i\sqrt{2})(i\sqrt{8}) = i^2\sqrt{16} = -4.$$

Ejemplo 94 Resolver la ecuación $2x^2 + 3x + 2 = 0$ y comprobar.

Note que $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(2) = -7 < 0$, por lo tanto, la ecuación tendrá soluciones complejas.

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 3x + 2 &= 0 \\
 2x^2 + 3x &= -2 \\
 x^2 + \frac{3}{2}x &= -1 \\
 x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} &= -1 + \frac{9}{16} \\
 \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 &= -\frac{7}{16} \\
 x + \frac{3}{4} &= \pm\sqrt{-\frac{7}{16}} \\
 x &= -\frac{3}{4} \pm i\sqrt{\frac{7}{16}} \\
 x &= -\frac{3}{4} \pm \frac{i\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}
 \end{aligned}$$

comprobación, para $x = -\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4}$

$$\begin{aligned}
 2\left(-\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4}\right) + 2 &= 0 \\
 2\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{i\sqrt{7}}{4}\right) + \left(\frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^2\right) + \frac{3}{4}i\sqrt{7} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
 2\left(\frac{9}{16} - \frac{6}{16}i\sqrt{7} - \frac{7}{16}\right) + \frac{3}{4}i\sqrt{7} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
 2\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8}i\sqrt{7}\right) + \frac{3}{4}i\sqrt{7} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
 \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i\sqrt{7} + \frac{3}{4}i\sqrt{7} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

para $x = -\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4}$

$$\begin{aligned}
 2\left(-\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4}\right) + 2 &= 0 \\
 \frac{3}{4}i\sqrt{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i\sqrt{7} - \frac{9}{4} + 2 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto, ambas soluciones satisfacen la ecuación.

Ejemplo 95 Comprobar que $x = 1/3$ es una solución de,

$$\frac{1}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{2x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Sustituyendo en ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1}} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1}} &= 1 \\ \frac{1}{\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - 1}} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} - 1}} &= 1 \\ \frac{1}{\frac{2}{3} + \sqrt{-\frac{8}{9}}} + \frac{1}{\frac{2}{3} - \sqrt{-\frac{8}{9}}} &= 1 \\ \frac{\left(\frac{2}{3} - i\sqrt{\frac{8}{9}}\right) + \left(\frac{2}{3} + i\sqrt{\frac{8}{9}}\right)}{\underbrace{\left(\frac{2}{3} + i\sqrt{\frac{8}{9}}\right)\left(\frac{2}{3} - i\sqrt{\frac{8}{9}}\right)}_{\text{suma de cuadrado}}} &= 1 \\ \frac{\frac{2}{3} - i\sqrt{\frac{8}{9}} + \frac{2}{3} + i\sqrt{\frac{8}{9}}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2} &= 1 \\ \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{8}{9}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = 1 \end{aligned}$$

5.6 Ecuaciones con Radicales

Una ecuación con radicales contiene a la incógnita dentro del radical. Para resolver este tipo de ecuaciones seguimos la misma idea, aislar la incógnita, para esto es necesario primero aislar un radical que contenga a la incógnita, luego elevar la ecuación a la potencia que indica el índice del radical.

Ejemplo 96 Resolver $\sqrt[5]{x} - 2 = 0$.

El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x} - 2 &= 0 && \text{aislar el radical} \\ \sqrt[5]{x} &= 2 && \text{elevar a la potencia que indica el índice del radical.} \\ (\sqrt[5]{x})^5 &= 2^5 && \text{Simplificar} \\ x &= 32 && \text{solución} \end{aligned}$$

Ejemplo 97 $\sqrt{x+6} = x$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+6} &= x \\
 (\sqrt{x+6})^2 &= x^2 \\
 x+6 &= x^2 \\
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 (x+2)(x-3) &= 0 \\
 x+2 &= 0 \Leftrightarrow x = -2 \\
 x-3 &= 0 \Leftrightarrow x = 3
 \end{aligned}$$

es importante comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación original.

Para $x = -2$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-2+6} &= -2 \\
 \sqrt{4} &= -2 \\
 2 &= -2 \text{ (Rechazada)}
 \end{aligned}$$

Para $x = 3$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3+6} &= 3 \\
 3 &= 3 \text{ (Válida)}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 98 Resolver $-\sqrt{x+1} - \sqrt{x+6} + \sqrt{x+22} = 0$

El procedimiento es el siguiente:

1. Aislar un radical, $\sqrt{x+22} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6}$

2. Elevar al cuadrado, $(\sqrt{x+22})^2 = \underbrace{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6})^2}_{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$

3. Efectuar operaciones y simplificar,

$$\begin{aligned}
 x+22 &= (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+6} + (\sqrt{x+6})^2 \\
 x+22 &= x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x+6} + x+6 \\
 15-x &= 2\sqrt{(x+1)(x+6)}
 \end{aligned}$$

4. Elevar al cuadrado $(15-x)^2 = \left(2\sqrt{(x+1)(x+6)}\right)^2$

5. Efectuar operaciones y simplificar

$$\begin{aligned}
 x^2 - 30x + 225 &= 4(x+1)(x+6) \\
 x^2 - 30x + 225 &= 4x^2 + 28x + 24 \\
 3x^2 + 58x - 201 &= 0
 \end{aligned}$$

6. Factorizar $3x^2 + 58x - 201 = 0$

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 58x - 201 &= 0 \quad (\times 3) \\
 9x^2 + 58(3x) - 603 &= 0 \\
 (3x+67)(3x-9) &= 0
 \end{aligned}$$

7. La solución es,

$$(3x + 67) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{67}{3}$$

$$(3x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

8. Comprobación, para $x = -67/3$, note que el término $\sqrt{x+1}$ de la ecuación original es negativo, por lo tanto $x = -67/3$ no es solución real de la ecuación.

Para $x = 3$

$$-\sqrt{3+1} - \sqrt{3+6} + \sqrt{3+22} = 0$$

$$-\sqrt{4} - \sqrt{9} + \sqrt{25} = 0$$

$$-2 - 3 + 5 = 0$$

por lo tanto, la única solución real para la ecuación:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} - \sqrt{x+22} = 0$$

es $x = 3$.

Ejercicio 46 Resolver las ecuaciones con radicales siguientes.

1. $\sqrt{3-4x} = -2x$

2. $\sqrt{6x^2-5x}-2=0$

3. $-x+5=-2\sqrt{2x-5}$

4. $(5x-6)^{\frac{1}{5}} = -\frac{x}{(5x-6)^{\frac{4}{5}}}$

5. $\sqrt{u-2} - (u+3)^{1/2} + 1 = 0$

6. $\sqrt{w+1} - \sqrt{2w-5} = -1$

7. $(x^2-6x+20)^{1/3} = 3$

8. $\sqrt{x^{1/3}+4} = 3$

9. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+2x+1} = x+1$

10. $x-3\sqrt{x}+2=0$

11. $\sqrt{x-4}+x=16$

12. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5}$

13. $\sqrt{x+4}=\sqrt{x-7}-1$

14. $\sqrt{x-7}=\sqrt{x+4}-1$

15. $x-\sqrt{x+7}=-1$

16. $(x^2-x-5)^{1/5}=1$

17. $\sqrt[3]{x^3+x^2-3x+9}=x+1$

18. $\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+5}=3$

5.7 Ecuaciones con Fracciones

Una ecuación con fracciones es una igualdad entre expresiones algebraicas, en la que al menos se tiene un término racional, y en la cual la incógnita se encuentre en el numerador, en el denominador o en ambos, por ejemplo en la ecuación siguiente,

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{5}{2}$$

es importante determinar el valor o valores de la incógnita para los cuales la expresión racional no este definida, ya que estos no serán solución de la ecuación original.

Para resolver ecuaciones con fracciones seguimos el procedimiento hasta ahora impuesto, aislar la variable; para aislar la variable es necesario convertir la expresión con fracciones a una expresión sin denominadores, la forma más simple es multiplicar toda la ecuación por el *MCD*, recuerde que el *MCD* está formado por los factores comunes y no comunes de mayor potencia de los denominadores.

Ejemplo 99 Resolver

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{5}{2}$$

Los denominadores $x-3$ y $x+3$, no deben tomar el valor "0". Por lo tanto, $x \neq 3$ o $x \neq -3$; si cualquiera de estos dos números se encuentran en la solución, entonces la ecuación original no tiene solución.

Multiplmando toda la ecuación por el MCD: $2(x-3)(x+3)$, multiplicando cada término y simplificando,

$$\underbrace{2(x-3)(x+3)}_{MCD} \frac{x+3}{x-3} + \underbrace{2(x-3)(x+3)}_{MCD} \frac{x-3}{x+3} = \underbrace{2(x-3)(x+3)}_{MCD} \frac{5}{2}$$

$$2(x+3)^2 + 2(x-3)^2 = 5(x-3)(x+3)$$

note que al multiplicar por el MCD en cada término se cancelan los factores comunes, operando y simplificando se tiene,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 18 + 2x^2 - 12x + 18 &= 5x^2 - 45 \\ 4x^2 + 36 &= 5x^2 - 45 \\ 81 - x^2 &= 0 \\ x &= \pm 9 \end{aligned}$$

Comprobación, para $x = 9$

$$\begin{aligned} \frac{9+3}{9-3} + \frac{9-3}{9+3} &= \frac{5}{2} \\ \frac{12}{6} + \frac{6}{12} &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

para $x = -9$

$$\begin{aligned} \frac{-9+3}{-9-3} + \frac{-9-3}{-9+3} &= \frac{5}{2} \\ \frac{-6}{-12} + \frac{-12}{-6} &= \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Se tiene que $x = \pm 9$ es solución de la ecuación original.

Ejemplo 100 Resolver $\frac{9}{x+5} + \frac{3}{x-2} + \frac{1-3x}{(x-2)(x+5)} = 1$

El MCD es $(x+5)(x-2)$, al multiplicar cada término de la ecuación por el MCD.

$$\begin{aligned} 9(x-2) + 3(x+5) + 1-3x &= (x-2)(x+5) \\ 9x - 18 + 3x + 15 + 1 - 3x &= x^2 + 3x - 10 \\ 9x - 2 &= x^2 + 3x - 10 \\ 0 &= x^2 - 6x - 8 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación mediante el método de completar el cuadrado se tiene,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= 8 \\ x^2 - 6x + 9 &= 8 + 9 \\ (x-3)^2 &= 17 \\ x &= 3 \pm \sqrt{17} \end{aligned}$$

al llevar a cabo la comprobación, para $x = 3 + \sqrt{17}$,

$$\begin{aligned}(3 + \sqrt{17})^2 - 6(3 + \sqrt{17}) &= 8 \\ 26 + 6\sqrt{17} - 18 - 6\sqrt{17} &= 8 \Leftrightarrow 8 = 8\end{aligned}$$

para $x = 3 + \sqrt{17}$,

$$\begin{aligned}(3 - \sqrt{17})^2 - 6(3 - \sqrt{17}) &= 8 \\ 26 - 6\sqrt{17} - 18 + 6\sqrt{17} &= 8 \Leftrightarrow 8 = 8\end{aligned}$$

por lo tanto, ambas son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 101 Resolver $\frac{x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = 5$.

El MCD es $\sqrt{x-2}$, así se tiene,

$$\begin{aligned}\underbrace{\sqrt{x-2}}_{MCD} \left(\frac{x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} \right) &= 5 \underbrace{\sqrt{x-2}}_{MCD} \\ x + x - 2 &= 5\sqrt{x-2} \\ (2x - 2)^2 &= 25(x - 2) \\ 4x^2 - 33x + 54 &= 0 \\ (4x - 9)(x - 6) &= 0 \\ 4x - 9 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \\ x - 6 &= 0 \Leftrightarrow x = 6\end{aligned}$$

Comprobación: para $x = \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{9}{4}}{\sqrt{\frac{9}{4}-2}} + \sqrt{\frac{9}{4}-2} &= 5 \Leftrightarrow \frac{\frac{9}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 5 \\ \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} &= 5 \Leftrightarrow \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5 \\ \frac{10}{2} &= 5\end{aligned}$$

Para $x = 6$

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{6-2}} + \sqrt{6-2} &= 5 \\ \frac{6}{\sqrt{4}} + \sqrt{4} &= 5 \\ 3 + 2 &= 5 \\ 5 &= 5\end{aligned}$$

la solución de la ecuación es $x = 9/4$ y $x = 6$.

Ejemplo 102 Resolver $\frac{1}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{2x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1$

Multiplicar por el MCD: $(2x + \sqrt{x^2 - 1})(2x - \sqrt{x^2 - 1})$.

$$(2x + \sqrt{x^2 - 1})(2x - \sqrt{x^2 - 1}) \left(\frac{1}{2x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{2x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \right)$$

$$(2x - \sqrt{x^2 - 1}) + (2x + \sqrt{x^2 - 1}) = \underbrace{(2x + \sqrt{x^2 - 1})(2x - \sqrt{x^2 - 1})}_{\text{binomios conjugados}}$$

$$2x + 2x = (2x)^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2$$

$$4x = 4x^2 - (x^2 - 1)$$

$$4x = 3x^2 + 1$$

$$(3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

comprobando, cuando $x = \frac{1}{3}$ el término $\sqrt{x^2 - 1}$ de la ecuación original es negativo, por lo tanto, está no es solución real de la ecuación.

Para $x = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(1) + \sqrt{1^2 - 1}} + \frac{1}{2(1) - \sqrt{1^2 - 1}} &= 1 \\ \frac{1}{2 + \sqrt{0}} + \frac{1}{2 - \sqrt{0}} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto, $x = 1$ es la única solución real de la ecuación.

Ejercicio 47 Resolver las ecuaciones con fracciones siguientes.

1. $\frac{6}{k^2} + \frac{1}{k} - 2 = 0$

2. $\frac{2t+1}{t-2} - \frac{t}{t+1} = -1$

3. $\frac{3x}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{24}{x^2-4}$

4. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{7}{3}$

5. $1 - \frac{5}{2y} - \frac{6}{y^2} = 0$

6. $x + 2 - \frac{3}{2x-1} = 0$

7. $\frac{2}{x+3} - \frac{4}{x} = 4$

8. $\frac{3}{1-u} + \frac{6}{1+u} = \frac{7}{u-2}$

9. $\frac{4-u}{4-u^2} = \frac{u}{u-2} + 2$

10. $\frac{u}{1-u} - \frac{3}{u^2-1} = \frac{u+4}{2(u+1)}$

11. $\frac{2}{5(x-2)} + \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{1-x}{x+2}$

12. $\frac{3}{x+3} - 1 = \frac{2x}{x-2} - \frac{5(x+2)}{(x+3)(x-2)}$

13. $\frac{y}{y-2} - \frac{27}{7} = \frac{2}{y^2-y-2}$

$$14. \frac{\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2} + 1} = \frac{2}{3}$$

Capítulo 6

Desigualdades

Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo de igualdad se tiene uno de los siguientes símbolos: $>$, $<$, $\geq$ o $\leq$. Por ejemplo, en la desigualdad,

$$3(x - 1) > 2$$

el interés es encontrar los valores de la variable x que satisfagan la desigualdad. Al contrario de lo que ocurre al resolver una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, los valores que puede tomar la variable se encuentra en un intervalo en la recta numérica.

Por ejemplo, la solución de la ecuación,

$$3(x - 1) = 2$$

es $x = \frac{5}{3}$, este valor se representa en la recta numérica por un círculo relleno,



por lo contrario, para la desigualdad,

$$3(x - 1) \geq 2$$

los valores que satisfacen a la desigualdad son $x \geq \frac{5}{3}$, esto es, valores de x que estén a la derecha de $\frac{5}{3}$, incluyendo este valor. Algunos valores de variable x que satisfacen la desigualdad.

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{3}: 3\left(\frac{5}{3} - 1\right) \geq 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \\ x &= 2: 3(2 - 1) \geq 2 \Leftrightarrow 3 > 2 \\ x &= 5: 3(5 - 1) \geq 2 \Leftrightarrow 12 > 2 \\ x &= 7: 3(7 - 1) \geq 2 \Leftrightarrow 18 > 2 \end{aligned}$$

En notación de intervalo, la solución de esta desigualdad es $\left[\frac{5}{3}, \infty\right)$, ambas formas de escribir la solución de una desigualdad son equivalentes, esto es,

$$x \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$$

la representación gráfica de la solución de esta desigualdad es,



la línea gruesa denota que los valores de x que satisfacen la desigualdad se encuentran a la derecha.

El procedimiento para resolver una desigualdad es parecida a la resolución de una ecuación, tomando en cuenta las propiedades de las desigualdades.

6.1 Propiedades de las Desigualdades

Si A , B y C son expresiones algebraicas, se tiene las propiedades (P) siguientes.

P1. Si $A \geq B \Leftrightarrow A + C \geq B + C$:

al sumar o restar el mismo valor a ambos lados de una desigualdad, se obtiene una desigualdad equivalente. Por ejemplo, para la desigualdad

$$5x - 3 > 3x$$

sumando a ambos lados de la desigualdad 3,

$$\begin{aligned} 5x - 3 + 3 &> 3x + 3 \\ 5x &> 3x + 3 \end{aligned}$$

restando a ambos lados de la última desigualdad $3x$,

$$\begin{aligned} 5x - 3x &> 3x + 3 - 3x \\ 2x &> 3 \end{aligned}$$

P2. Si $C > 0$, $A \geq B \Leftrightarrow AC \geq BC$:

al multiplicar (o dividir) a ambos lados de una desigualdad por un valor positivo, se obtiene una desigualdad equivalente que conserva el sentido de desigualdad. Por ejemplo, si a la desigualdad,

$$2x > 3$$

se le multiplica por $\frac{1}{2}$ o equivalentemente se divide entre 2, se tiene

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

P3. Si $C < 0$, $A \geq B \Leftrightarrow AC \leq BC$:

al multiplicar (o dividir) a ambos lados de una desigualdad por un valor negativo, se obtiene una desigualdad equivalente con el sentido de desigualdad cambiado. Por ejemplo, si a la desigualdad

$$-4x \geq 2$$

se multiplica por $\frac{1}{-4}$ o se divide entre -4 , se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{-4x}{-4} &\leq \frac{2}{-4} \\ x &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

P4. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces,

$$A \leq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$$

al obtener el recíproco en una desigualdad que contiene valores positivos, el sentido de la desigualdad cambia. Por ejemplo, si $A = 2$ y $B = 5$, ambos positivos, se tiene,

$$2 < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{5}$$

P5. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces,

$$A + C \leq B + D$$

las desigualdades se pueden sumar (o restar), siempre cuando ambas desigualdades tengan el mismo sentido. Por ejemplo,

$$4 > 2 \quad \text{y} \quad 9 > 6$$

entonces, sumando ambas desigualdades, se tiene

$$\begin{array}{rcl} 4 + 9 & > & 2 + 6 \\ 13 & > & 8 \end{array}$$

6.1.1 Resolución de Desigualdades

Para resolver una desigualdad utilizamos las propiedades dadas anteriormente para aislar la variable, tratando de encontrar una desigualdad simple y equivalente. Resolver una desigualdad significa encontrar un intervalo, una intersección o unión de intervalos en los cuales la variable cumpla con la desigualdad. En este capítulo se dan a conocer los procedimientos utilizados para resolver desigualdades algebraicas lineales y no lineales con una sola variable.

Resolución de Desigualdades Lineales

Una desigualdad lineal tiene la forma,

$$ax + b > 0$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$. El símbolo de la desigualdad puede ser $<$, $\geq$ o $\leq$. Al resolver la desigualdad se tiene,

$$\begin{array}{ll} ax + b - b > 0 - b & \text{Sumar el opuesto de } b. \\ ax > -b \text{ si } a > 0 & \text{Dividir entre } a. \\ x > -\frac{b}{a} & \text{Solución en notación de desigualdad.} \end{array}$$

Ejemplo 103 Resolver las desigualdades lineales siguientes.

1. $3x + 2 \leq 17$

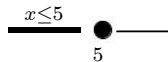
La idea principal al resolver una desigualdad es aislar la variable de un lado de la desigualdad al aplicar sucesivamente las propiedades mencionadas anteriormente.

$$\begin{array}{ll} 3x + 2 - 2 \leq 17 - 2 & \text{Sumar a ambos lados el opuesto de 2.} \\ 3x \leq 15 & \text{Dividir entre 3.} \\ x \leq 5 & \text{Solución en notación de desigualdad.} \end{array}$$

la solución en forma de intervalo:

$$x \leq 5 \Leftrightarrow (-\infty, 5)$$

la solución gráfica es,



2. $\frac{3}{5}x + 3 > 3x - 5$

El procedimiento paso a paso es,

$$\frac{3}{5}x + 3 - 3 > 3x - 5 - 3 \quad \text{Sumar a ambos lados el opuesto de 3.}$$

$$\frac{3}{5}x > 3x - 8 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{3}{5}x - 3x > 3x - 8 - 3x \quad \text{Sumar a ambos lados el opuesto de } 3x.$$

$$-\frac{12}{5}x > -8 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{-5}{12} \left(-\frac{12}{5}x \right) < -8 \left(\frac{-5}{12} \right) \quad \text{Multiplicar por el recíproco de } \frac{-12}{5}, \text{ cambiar el sentido de la desigualdad.}$$

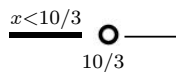
$$x < \frac{40}{12} \quad \text{Simplificar.}$$

$$x < \frac{10}{3}$$

la solución en forma de intervalo:

$$x < \frac{10}{3} \Leftrightarrow \left(-\infty, \frac{10}{3} \right)$$

la solución gráfica es,



3. $-3x + 2 \leq 17$

El procedimiento es,

$$-3x \leq 17 - 2$$

$$-3x \leq 15$$

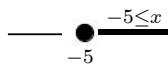
$$x \geq -\frac{15}{3}$$

$$x \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq x$$

la solución en forma de intervalo:

$$-5 \leq x \Leftrightarrow [-5, \infty)$$

la solución gráfica es,



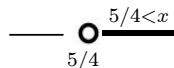
4. $3(1 - 2x) < -2(x + 3) + 4$

$$\begin{aligned} 3 - 6x &< -2x - 6 + 4 \\ 3 - 6x &< -2x - 2 \\ -6x + 2x &< -2 - 3 \\ -4x &< -5 \\ x &> \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < x \end{aligned}$$

la solución en forma de intervalo:

$$\frac{5}{4} < x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}, \infty \right)$$

la solución gráfica es,



5. $6 \leq -3(2x - 4) < 12$.

Este tipo de desigualdad equivale a dos desigualdades, éstas son:

$$6 \leq -3(2x - 4) < 12: \begin{cases} 6 \leq -3(2x - 4) \\ -3(2x - 4) < 12 \end{cases}$$

las cuales pueden resolverse separadamente o en forma simultánea. Al resolver simultáneamente, aislamos la variable al centro de la desigualdad, aplicando las propiedades a la derecha, al centro y a la izquierda. El procedimiento es,

$$6 \leq -3(2x - 4) < 12$$

efectuamos operaciones en el centro

$$6 \leq -6x + 12 < 12$$

sumamos -12 , a la izquierda, al centro y a la derecha de la desigualdad,

$$6 - 12 \leq -6x + 12 - 12 < 12 - 12$$

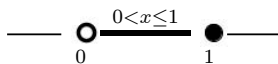
dividimos entre -6 , a la izquierda, al centro, a la derecha de la desigualdad, y cambiando el sentido de la desigualdad,

$$\begin{aligned} -6 &\leq -6x < 0 \\ 1 &\geq x > 0 \end{aligned}$$

generalmente se escriben las desigualdades con el sentido apuntando hacia la izquierda, la solución es,

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow (0, 1]$$

la solución gráfica es,



$$6. \ 3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$$

Resolviendo,

$$3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7 \quad (\times 5)$$

$$5(3) \leq 5\left(\frac{2x-3}{5}\right) < 5(7)$$

$$15 \leq 2x-3 < 35$$

$$15+3 \leq 2x-3+3 < 35+3$$

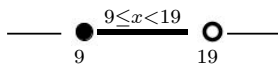
$$18 \leq 2x < 38 \quad \div (2)$$

$$9 \leq x < 19$$

la solución en forma de intervalo:

$$9 \leq x < 19 \Leftrightarrow [9, 19)$$

la solución gráfica es,



Ejercicio 48 Resuelva las desigualdades dadas.

$$1. \ 5 - 4m + 8 - 10n < 20$$

$$2. \ \frac{2x-3}{5} < 7$$

$$3. \ x < \frac{2x-15}{3}$$

$$4. \ 9r + 15 \geq 24 + 10r$$

$$5. \ 6p - 2 \leq 3p + 12$$

$$6. \ 4y + 2 < 8y - (6y - 10)$$

$$7. \ -3x + 2 \leq 17$$

$$8. \ 3(x-2) - 8x < 44$$

$$9. \ 3.1q - 1.4 > 1.3q + 6.7$$

$$10. \ -5(k+4) \geq 3(k-4)$$

$$11. \ 5(2h-6) - 7(h+7) > 4h$$

$$12. \ 7 + 3y > 2(y+3) - 2(-1-y)$$

$$13. \ 3x + 4 > 2(x+3) + x$$

$$14. \ 3 - 3(y-2) < 13 - 3(y-6)$$

$$15. \ ((k+4) - 2(k+6)) \geq 5(k+1) - 1$$

$$16. \ 3x + 2 \leq 17$$

$$17. \ 3(1-2x) < -2(x+3) + 4$$

$$18. \ 6 \leq -3(2x-4) < 12$$

$$19. \ \frac{4-2x}{5} < -x-2$$

$$20. \ 3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$$

Desigualdades con Valor Absoluto

Para resolver desigualdades que involucran valor absoluto, hacemos uso de la definición,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 104 Resolver $\left|x - \frac{7}{4}\right| \geq \frac{11}{4}$

El valor de la expresión algebraica $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ puede ser positivo o negativo, esto se indica como,

$$x - \frac{7}{4} > 0 \quad \text{ó} \quad x - \frac{7}{4} < 0$$

Si el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ es positivo, entonces

$$\left|x - \frac{7}{4}\right| = x - \frac{7}{4}$$

esto es, el valor absoluto es el mismo. Si el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ es negativo, entonces

$$\left|x - \frac{7}{4}\right| = -\left(x - \frac{7}{4}\right)$$

esto es, se debe multiplicar por (-1) la expresión para convertir el valor de $\left(x - \frac{7}{4}\right)$ en positivo.

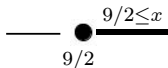
Por lo tanto, se consideran los dos casos, y se tiene dos desigualdades a resolver ,

$$\text{si } x - \frac{7}{4} > 0 \text{ entonces } x - \frac{7}{4} \geq \frac{11}{4}$$

$$\text{si } x - \frac{7}{4} < 0 \text{ entonces } -\left(x - \frac{7}{4}\right) \geq \frac{11}{4}$$

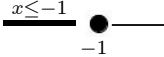
resolviendo la primera desigualdad,

$$\begin{aligned} x - \frac{7}{4} &\geq \frac{11}{4} \\ x &\geq \frac{11}{4} + \frac{7}{4} \\ x &\geq \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{9}{2} \leq x \Leftrightarrow \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$


para la segunda desigualdad,

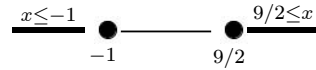
$$\begin{aligned} -\left(x - \frac{7}{4}\right) &\geq \frac{11}{4} \quad \times (-1) \\ x - \frac{7}{4} &\leq -\frac{11}{4} \quad \text{cambiar el sentido de la desigualdad.} \\ x &\leq -\frac{11}{4} + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$x \leq -1 \Leftrightarrow (-\infty, -1]$$


la solución se encuentra en dos intervalos diferentes y no hay intersección de ellos, en notación de intervalo la solución es,

$$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$

gráficamente esta unión de intervalos se puede ver de forma simple como,



Ejemplo 105 Resolver las siguientes desigualdades con valor absoluto.

1. $|7x + 2| > 2$

Se tienen que resolver dos desigualdades, estas son,

$$7x + 2 > 2 \Leftrightarrow 7x > 0$$

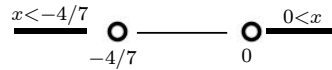
$$x > 0 \Leftrightarrow 0 < x$$

$$0 < x \Leftrightarrow (0, \infty)$$

$$-(7x + 2) > 2 \Leftrightarrow 7x + 2 < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{7}$$

$$x < -\frac{4}{7} \Leftrightarrow \left(-\infty, -\frac{4}{7}\right)$$

la representación gráfica de ambos intervalos es,



la solución se encuentra en dos intervalos diferentes sin puntos en común, la solución en notación de intervalos es,

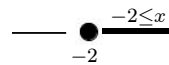
$$0 < x, x < -\frac{4}{7} \Leftrightarrow (0, \infty) \cup \left(-\infty, -\frac{4}{7}\right)$$

2. $|5 - 2x| \leq 9$

$$5 - 2x \leq 9 \Leftrightarrow -2x \leq 9 - 5$$

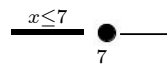
$$-2x \leq 4 \Leftrightarrow -2x \leq 4$$

$$x \geq -2 \Leftrightarrow [-2, \infty)$$

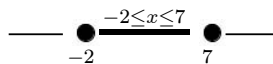


$$-(5 - 2x) \leq 9 \Leftrightarrow -2x \geq -14$$

$$x \leq 7 \Leftrightarrow (-\infty, 7]$$



la intersección de ambos intervalos es la solución. Su representación gráfica es,



3. $3|x| + 2 \leq 17$

$$\begin{aligned} 3|x| &\leq 17 - 2 \\ 3|x| &\leq 15 \quad (\div 3) \\ |x| &\leq 5 \end{aligned}$$

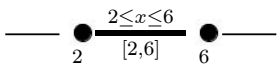
se tienen que resolver dos desigualdades

$$\begin{aligned} x &\leq 5 \Leftrightarrow (-\infty, 5] \\ -x &\leq 5 \Leftrightarrow x \geq -5 \\ -5 &\leq x \Leftrightarrow [-5, \infty) \\ -5 \leq x \leq 5 &\Leftrightarrow [-5, 5] \end{aligned}$$

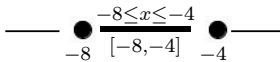
4. $3 \leq |x + 1| \leq 7$

$$3 \leq |x + 1| \leq 7$$

esto significa resolver dos desigualdades simultáneas, la primera con el valor de $(x + 1)$ positivo,

$$3 \leq (x + 1) \leq 7 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$$


en la segunda desigualdad se considera el valor de $(x + 1)$ negativo, de tal forma que al quitar las barras de valor absoluto de la expresión $(x + 1)$, se multiplica por -1 , como se indica,

$$\begin{aligned} 3 &\leq -(x + 1) \leq 7 \\ -3 &\geq x + 1 \geq -7 \\ -4 &\geq x \geq -8 \\ -8 &\leq x \leq -4 \end{aligned}$$


se tienen dos intervalos separados sin valores en común, por lo tanto la solución se encuentra en la unión de estos dos intervalos, en forma gráfica se tiene,

$$[2, 6] \cup [-8, -4] :$$


Ejercicio 49 Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $|2x + 5| < 4$

2. $|7x + 2| > 2$

3. $|3x + 4| = 8$

4. $|5 - 2x| \leq 9$

5. $|2x - 1| > 3$

6. $3|x| + 2 \leq 17$

7. $|6x - 5| > 4x + 7$

8. $|3e - 7| < 2$

9. $|3x + 4| < 8$

10. $|2.2y - 1.1| = 5.5$

$$11. \left| \frac{2-3x}{5} \right| \geq 2$$

$$12. \left| \frac{1}{2} - 3p \right| < \frac{7}{2}$$

$$13. |x-3| \leq 7$$

$$14. |x-1| \leq -2$$

$$15. |x+2| \geq -2$$

$$16. |x+2| \geq 2$$

$$17. 3 \leq |x+1| \leq 7$$

6.2 Desigualdades no Lineales

6.2.1 Desigualdad Cuadrática

Una desigualdad cuadrática tiene la forma general,

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

donde a , b y c son números reales con $a \neq 0$; el símbolo en la desigualdad puede ser $>$, $<$, o $\leq$.

La forma factorizada de una desigualdad cuadrática es,

$$(px + r)(qx + s) \geq 0$$

esta forma es preferible sobre la forma general, ya que el análisis de los signos es más fácil de realizar. La desigualdad anterior establece que los valores de la variable deben ser tal que el producto de los factores sea positivo o cero; se establece de forma simple que el producto de los dos factores es positivo cuando ambos son positivos o cuando ambos son negativos, los valores de la variable que hacen que el producto de los dos factores sea cero se encuentran de forma rápida al resolver la ecuación cuadrática.

Para resolver este tipo de desigualdades es importante determinar los valores de la variable donde la desigualdad sea cero, este valor se conoce como *valor crítico*.

Ejemplo 106 Resolver $2x^2 - 8 \geq 0$

1. Al resolver desigualdades cuadráticas es recomendable tener las formas factorizadas de las desigualdades, así se tiene,

$$2x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+2) \geq 0$$

los valores críticos se encuentran al resolver la ecuación,

$$\begin{aligned} 2(x-2)(x+2) &= 0 \\ (x-2) &= 0 \rightarrow x = 2 \\ (x+2) &= 0 \rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

la desigualdad es cero cuando la variable toma el valor crítico, cuando $x = 2$ y $x = -2$; la desigualdad es positiva cuando ambos factores son positivos o ambos son negativos. Un procedimiento simple para analizar el comportamiento es el siguiente.

Los valores críticos colocados en una recta numérica, dividen a la recta en tres intervalos, dados por:

$$\underline{(-\infty, -2]} \quad | \quad \underline{[-2, 2]} \quad | \quad \underline{[2, \infty)}$$

se debe determinar el signo de cada factor y el signo del producto en cada intervalo. Esto se hace de forma sistemática por medio de la tabla de signos, los encabezados de la tabla

son los intervalos en que se divide la recta numérica, incluyendo los valores críticos, la primera columna tiene los factores de la desigualdad. Se determina el signo que tiene cada factor en el intervalo dado mediante un valor de prueba, lo único que interesa es el signo que resulta y no tanto su valor, la tabla de signos correspondiente es,

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 2$	2	$2 < x$
$2(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x-4)(x+2) \geq 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
<i>cumple</i>	<i>si</i>	<i>si</i>	<i>no</i>	<i>si</i>	<i>si</i>

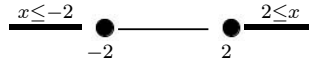
Ejemplo 107 En la tabla de signos se encuentra los intervalos que satisfacen la desigualdad, la solución es,

$$x < -2; x = -2 \Leftrightarrow x \leq -2$$

$$x > 2; x = 2 \Leftrightarrow x \geq 2$$

la solución en notación de intervalo y la solución gráfica es:

$$x \leq -2; 2 \leq x \Leftrightarrow (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$



Ejemplo 108 Resolver $(x-1)(2-x)(x+3) \leq 0$.

Aunque está no es una desigualdad cuadrática, el proceso de solución es similar, ya que se tiene la forma factorizada, los valores críticos se encuentran al resolver la ecuación,

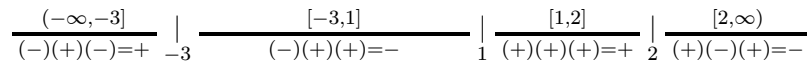
$$(x-1)(2-x)(x+3) = 0$$

$$(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$(2-x) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$(x+3) = 0 \rightarrow x = -3$$

En los valores críticos la desigualdad se cumple, el producto de los tres factores es cero. Los valores críticos dividen la recta numérica en cuatro, el análisis de los signos se indica para cada intervalo.



Note que los intervalos en los cuales el producto de los tres factores es negativo son:

$$-3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow [-3, 1]$$

$$x \geq 2 \Leftrightarrow [2, \infty)$$

Ejercicio 50 Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $x^2 - 5x > -6$

2. $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

3. $(x+3)(x-5) \leq 0$

4. $\frac{-19}{x-6} < 2$

5. $2x^2 - 9 \leq 3x$

6.2.2 Desigualdades Racionales

Una desigualdad racional es un cociente de expresiones algebraicas, esto es, tanto el numerador como el denominador son polinomios. Un ejemplo,

$$\frac{3x^4 + 5x^3 - 6x^2 + x}{9x^5 - 4x^3 + 7x^2 + x - 2} \geq 0$$

el símbolo en la desigualdad puede ser cualquier otro. En el análisis de las desigualdades racionales se prefiere las formas factorizadas y simplificadas, el análisis se lleva a cabo de forma simple. Sea la siguiente desigualdad racional en su forma factorizada,

$$\frac{(x+p)(x-q)}{(x-r)(x+s)} \geq 0$$

se determina que la desigualdad es cero cuando el numerador es cero y el denominador diferente de cero; por otro lado, la desigualdad se indetermina cuando el denominador es cero no importa el valor del numerador. Los valores que hacen la desigualdad sea cero o se indetermina se conocen como *valores críticos*.

Ejemplo 109 Resolver $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$

El valor crítico que hace que la desigualdad sea cero, se encuentra al resolver,

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

el valor crítico que hace que la desigualdad se indetermina, se encuentra al resolver,

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

los valores críticos dividen a la recta numérica en tres intervalos abiertos

$$\frac{x < -2}{-2} \mid \frac{-2 < x < 3}{3} \mid \frac{3 \leq x}{}$$

la tabla de signos que se puede construir es,

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 3$	3	$x > 3$
$\frac{x-3}{x+2}$	$\frac{-}{-} = +$	∞	$\frac{-}{+} = -$	0	$\frac{+}{+} = +$
$\frac{x-3}{x+2} \geq 0$	<i>si</i>	<i>no</i>	<i>no</i>	<i>si</i>	<i>si</i>

La desigualdad se satisface en los intervalos

$$x < -2; x \geq 3 \Leftrightarrow (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$$

Ejemplo 110 Resolver $\frac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$

Los valores críticos son:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= 0 \rightarrow x = -2 \\ x-3 &= 0 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\frac{x < -2}{-2} \quad | \quad \frac{-2 < x < 3}{3} \quad | \quad \frac{x > 3}{3}$$

la tabla de signos es,

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 3$	3	$x > 3$
$\frac{(x+2)^2}{x-3}$	$\frac{+}{-} = -$	0	$\frac{+}{-} = -$	∞	$\frac{+}{+} = +$
$\frac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$	<i>no</i>	<i>si</i>	<i>no</i>	<i>no</i>	<i>si</i>

La desigualdad se satisface en los intervalos

$$x = -2; x > 3 \Leftrightarrow \{-2\} \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 111 Resuelva $\frac{x-3}{x+1} \geq 1$.

Para analizar una desigualdad racional se debe tener la forma,

expresión racional	símbolo de desigualdad	cero
--------------------	------------------------	------

Es necesario reescribir la desigualdad de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{x-3-(x+1)}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{-4}{x+1} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} \leq 0 \end{aligned}$$

está última desigualdad tiene la forma que se requiere. El único valor crítico que hace que la desigualdad se indetermina es $x = -1$. Este valor divide a la recta numérica en dos intervalos abiertos,

$$\frac{x < -1}{-1} \quad | \quad \frac{x > -1}{-1}$$

la tabla de signos correspondiente es,

x	$x < -1$	-1	$x > -1$
$\frac{4}{x+1}$	$-$	∞	$+$
$\frac{4}{x+1} \leq 0$	<i>si</i>	<i>no</i>	<i>no</i>

La desigualdad se satisface en el intervalo:

$$x < -1 \Leftrightarrow (-\infty, -1)$$

Ejemplo 112 Resolver $\frac{4}{3x+2} \geq 0$

El análisis de los puntos críticos indica, para que la desigualdad sea cero el numerador debe ser cero y el denominador diferente de cero, estos valores no existen, no hay incógnita en el

numerador, la desigualdad nunca es cero. Por otro lado, la desigualdad se indetermina cuando el denominador es cero, esto es, cuando,

$$3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

si la incógnita toma este valor la expresión se indetermina. La desigualdad nunca es cero y sólo se cumple para valores positivos, la desigualdad ahora es,

$$\frac{4}{3x + 2} > 0$$

para que se cumpla el denominador debe ser positivo, esto es,

$$3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

este análisis se puede realizar como en el ejemplo anterior.

Ejercicio 51 Compruebe la solución de la desigualdad dada.

1. $\frac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)(x-5)} \geq 0$; $1 \leq x < 2$; $x = 3$; $x > 5$.
2. $\frac{(x^2 - 4x + 5)(x-2)}{x-1} \leq 0$; $1 < x \leq 2$.
3. $\frac{\sqrt[3]{x-4}}{(x-1)(x-2)} \geq 0$; $1 < x < 2$; $x \geq 4$
4. $\frac{3}{x+2} \geq \frac{2}{3-x}$; $-2 < x \leq 1$; $x > 3$.
5. $x^3 + 3x^2 - 4x > 0$; $-4 < x < 0$; $x > 1$.

Capítulo 7

Ecuaciones de la Línea Recta

7.1 Plano Coordenado o Cartesiano (x, y)

Los valores numéricos de la solución de una ecuación o de una desigualdad se representan gráficamente como puntos localizados o como intervalos en la recta numérica, respectivamente; esta representación se dice que es en una dimensión (*unidimensional*).

Una representación en dos dimensiones (*bidimensional*) se logra mediante un plano formado por dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto en común conocido como origen, el eje horizontal se conoce como *abscisa* (eje x) y el eje vertical como *ordenada* (eje y) (ver Figura 2). Un punto en el *plano xy* es localizado mediante un *par ordenado de números* dado por,

$$(\text{abscisa}, \text{ordenada}) = (x, y)$$

el par ordenado se llama *coordenada* del punto en cuestión.

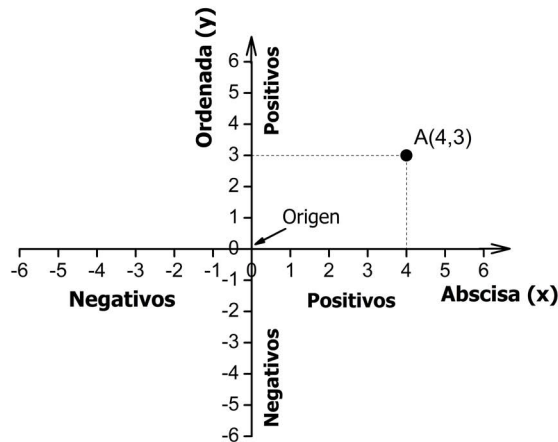


Figura 2. Plano coordenado o cartesiano.

La palabra par ordenado significa que este debe ser el orden de escritura, así por ejemplo, notar que,

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Por ejemplo, para localizar el punto A con coordenadas $(4, 3)$, o simplemente $A(4, 3)$, el primer valor del par ordenado se localiza en el eje x y el segundo valor en el eje y , a partir de estos

valores localizados en ambos ejes se trazan líneas perpendiculares, el lugar donde ambas líneas cortan se localiza la coordenada de A , vease la Figura 3.

Ejemplo 113 Representación de puntos en el plano coordenado. Localice en el plano cartesiano los puntos A , B , C , D , E y F , con coordenadas dadas por: $A(3, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 3)$, $E(0, 3)$ y $F(-4, 0)$.

En la Figura 3 se representan graficamente cada uno de estos puntos.

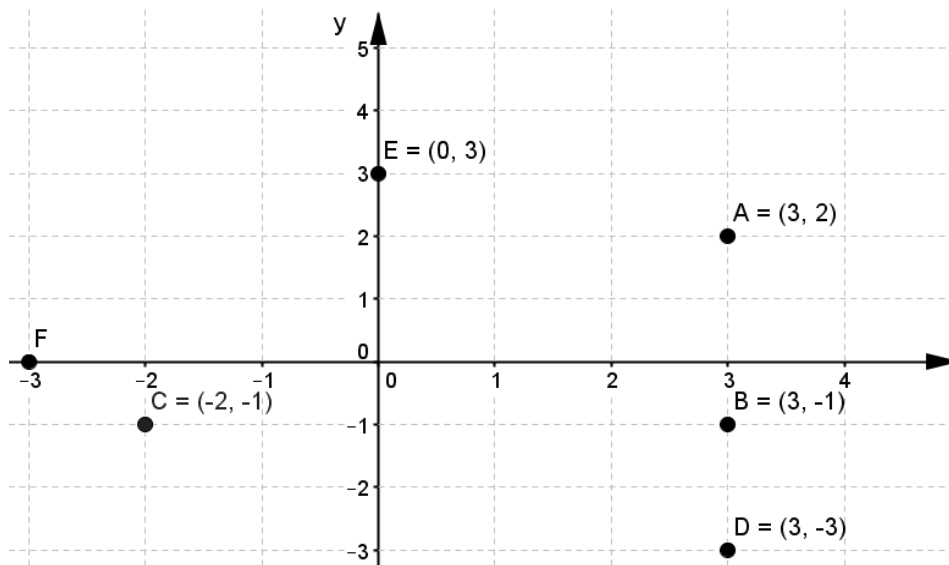


Figura 3. Gráfica para los puntos $A(3, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -1)$, $D(3, -3)$, $E(0, 3)$ y $F(-3, 0)$.

7.2 Puntos y Líneas Rectas en el Plano xy

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano xy , ver Figura 4, la línea recta que pasa por los dos puntos tiene una pendiente (m) definida por,

$$\text{pendiente} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_2 - x_1 \neq 0$$

en la definición es importante se cumpla que $x_2 - x_1 \neq 0$, en caso contrario si $x_2 - x_1 = 0$ la *pendiente no existe*. En la Figura 4 se presenta el concepto de pendiente.

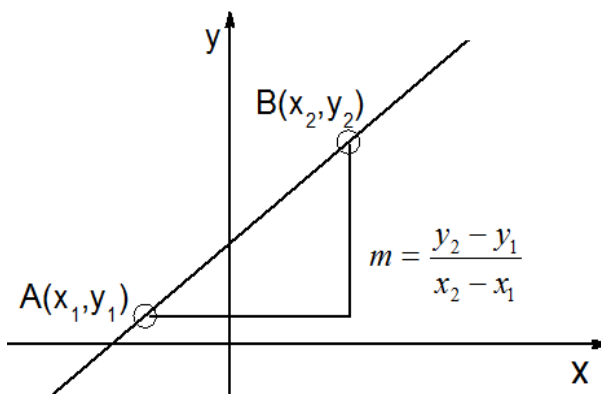


Figura 4. Pendiente de una línea recta.

La pendiente de una línea recta se interpreta como una *razón de cambio* definida por la razón del desplazamiento vertical al desplazamiento horizontal, en otras palabras, lo que se eleva a lo que se avanza o recorre horizontalmente en el plano xy , esto es,

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$$

en el lenguaje algebraico, la razón de cambio se denota por el cociente del incremento de la ordenada (Δy) entre el incremento de la abscisa (Δx),

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

el incremento (Δ) de una variable o de un valor, se calcula por,

$$\Delta = \text{valor final} - \text{valor inicial}$$

Una analogía importante para comprender el concepto de pendiente se encuentra en lo siguiente, con la línea recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se puede formar un triángulo rectángulo como el que se muestra en la Figura 4, la pendiente se puede interpretar con el cociente de la altura a la base del triángulo.

$$m = \frac{\text{Altura}}{\text{Base}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Al calcular la pendiente, el orden de los puntos no es importante, pero si la correspondencia, nótese que,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1(y_2 - y_1)}{-1(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

esto significa, que la pendiente de la recta de AB es la misma que la pendiente de la recta de BA . Debe tener cuidado ya que, la pendiente de la recta AB *no es igual* a (Figura 4).

$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo 114 Escriba una interpretación a los valores de las pendientes dadas a continuación.

Para m igual a: 1). $\frac{2}{3}$, 2). 7, y 3). $-\frac{2}{9}$.

A partir de la definición de pendiente, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; se tiene la interpretación siguiente:

1. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$: por cada incremento de la variable x en 3 unidades, la variable y se incrementa en 2 unidades. El significado geométrico es, en el plano xy , a partir de un punto sobre la línea recta, por cada desplazamiento horizontalmente a la derecha en 3 unidades de la variable x , la variable y tiene un desplazamiento vertical hacia arriba (elevación) de 2 unidades.
2. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7 = \frac{7}{1}$: por cada incremento de la variable x , la variable y se incrementa en 7 unidades. El significado geométrico es similar al ejemplo anterior.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{9} = \frac{-2}{9} = \frac{2}{-9}$: la interpretación puede ser diferente, pero es equivalente. Si $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{9}$, se tiene, por cada 9 unidades que se incrementa (aumento) la variable x , la variable y se decrementa (disminuye) en 2 unidades. O equivalentemente, para $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{-9}$ se tiene que por cada 9 unidades que disminuye la variable x , la variable y aumenta en 2 unidades. La interpretación geométrica es, para $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{9}$, a partir de un punto sobre la línea recta, cuando la variable x se desplaza horizontalmente en 9 unidades a la derecha, la variable y sufre un desplazamiento vertical hacia abajo (depresión) en 2 unidades. Equivalentemente, para $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{-9}$, a partir de un punto sobre la línea recta, cuando la variable x se desplaza horizontalmente a la izquierda (retroceso) en 9 unidades, la variable y se desplaza verticalmente hacia arriba (elevación) en 2 unidades.

7.2.1 Hechos Importantes

Pendiente de una Línea Recta Horizontal

Una línea recta horizontal o paralela al eje x , como se muestra en la Figura 5, tiene una pendiente de cero, esto es,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

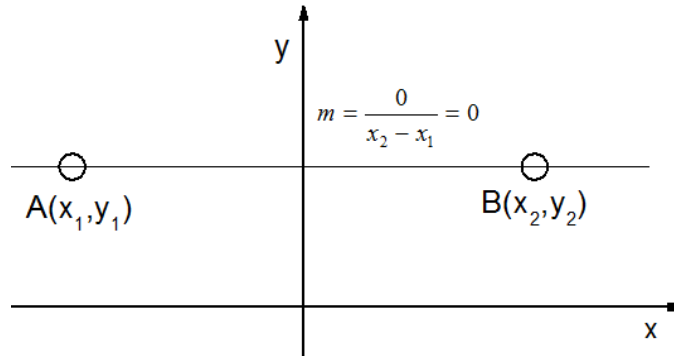


Figura 5. Pendiente de una recta horizontal.

Pendiente de una Línea Recta Vertical

La pendiente de una recta vertical o paralela al eje y , **no está definida o no existe**, esto es,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0} \rightarrow \text{no existe}$$

la Figura 6 muestra este hecho,

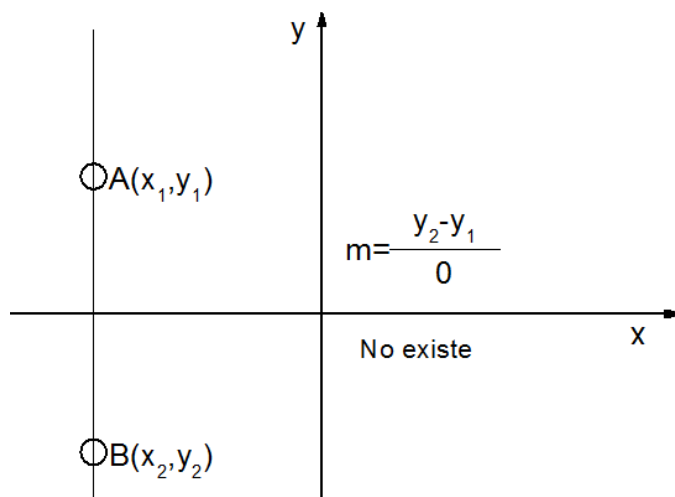
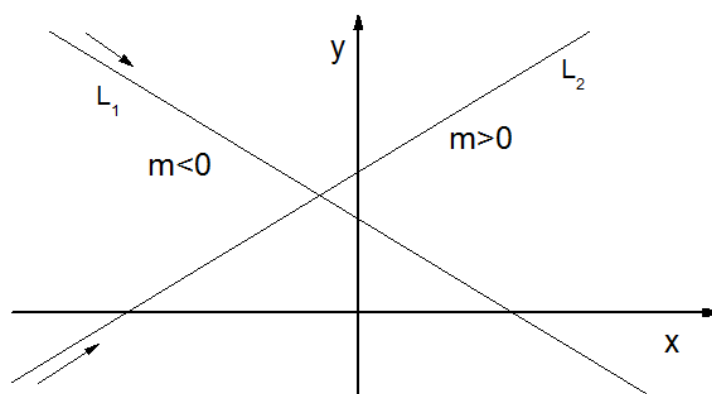


Figura 6. Pendiente de una recta vertical.

Pendiente Positiva y Negativa

La pendiente de una recta puede ser positiva o negativa. En la Figura 7 se trazan dos líneas rectas L_1 y L_2 en el plano xy . Si la línea recta desciende de izquierda a derecha la **pendiente es negativa** (L_1); por lo contrario, si la línea recta asciende de izquierda a derecha la **pendiente es positiva** (L_2); como se muestra,

Figura 7. L_1 Pendiente negativa; L_2 pendiente positiva.

Líneas Rectas Paralelas

Dos líneas rectas no verticales, L_1 y L_2 , son paralelas sí y sólo sí tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$, así como se muestra en la Figura 8.

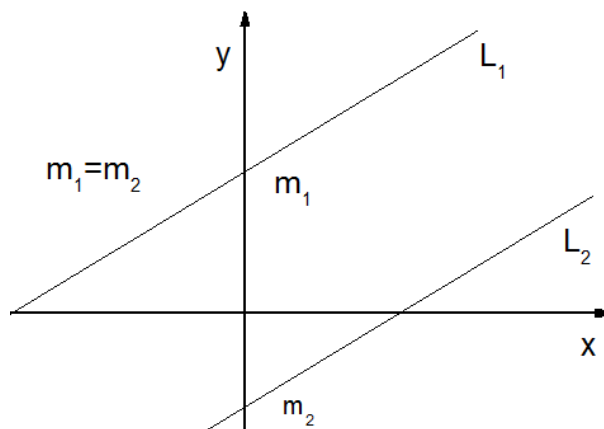


Figura 8. Rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Líneas Rectas Perpendiculares

Dos rectas, L_1 y L_2 son perpendiculares (Figura 9) si el producto de sus pendientes es menos uno, esto es,

$$m_1 m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

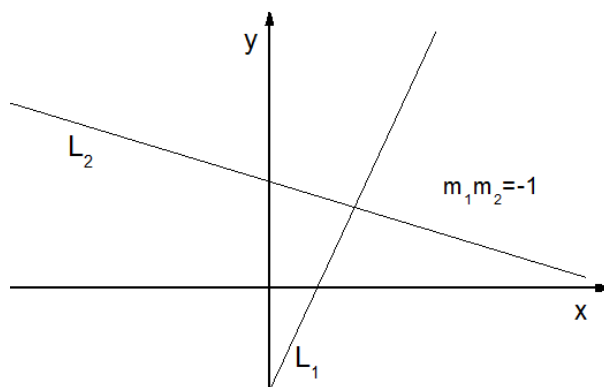


Figura 9. Rectas perpendiculares.

Ejercicio 52 Para cada una de las coordenadas de A y B dadas, si es que existe, determine la pendiente m_{AB} .

1. $A = (-2, 3); B = (2, 8)$.
2. $A = (-4, 8); B = (2, 8)$.
3. $A = (-3, 5); B = (3, 5)$.
4. $A = (-4, 0); B = (0, -5)$.
5. $A = (5, 0); B = (0, 7)$.
6. $A = (-1, 2); B = (-1, 6)$.
7. $A = (3, 0); B = (9, 0)$.
8. $A = (-7, 0); B = (5, 0)$.

9. $A = (-2, 0); B = (0, -3)$.

10. $A = (0, 3); B = (0, -4)$.

Ejercicio 53 En cada uno de los casos siguientes, determine si las rectas (AB y CD) que pasan por los puntos indicados, son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos cosas.

1. $A = (-3, 2), B = (-4, 5), C = (2, 4)$ y $D = (3, 7)$.

2. $A = (-3, 2), B = (-4, 5), C = (2, 4)$ y $D = (6, -8)$.

3. $A = (4, 2), B = (-2, 1), C = (-1, 5)$ y $D = (5, 6)$.

4. $A = (-3, 2), B = (-3, 5), C = (2, 4)$ y $D = (5, 4)$.

5. $A = (-3, 2), B = (-4, 5), C = (2, 4)$ y $D = (5, 3)$.

6. $A = (4, 2), B = (-2, 1), C = (-1, 5)$ y $D = (0, -1)$.

7.3 Ecuación de la Línea Recta

Considere a la línea recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$, $P(x, y)$ y $(0, b)$, Figura 10; la pendiente de esta línea recta que pasa por los puntos A y P es,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

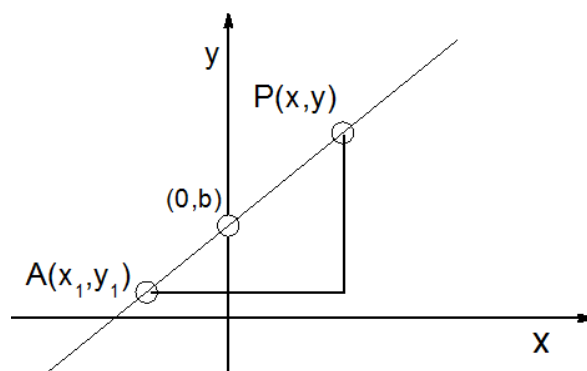


Figura 10. Línea Recta que pasa a través de $A(x_1, y_1)$ y $P(x, y)$.

al reescribir la ecuación de la forma siguiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

se obtiene la *ecuación de la línea recta* en su forma *punto-pendiente*.

Por otro lado, la recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $P(x, y)$, vea la Figura 10, tiene pendiente,

$$m = \frac{y - b}{x - 0}$$

al resolver para y se tiene,

$$y = mx + b$$

la cual se conoce como *ecuación de la línea recta* en su forma *pendiente-ordenada al origen*, o simplemente *pendiente-ordenada*, donde b es la ordenada al origen, la ordenada al origen es el valor donde la recta cruza con el eje y , así que su coordenda es $(0, b)$.

La *ecuación general de la línea recta* tiene la forma,

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{con } B \neq 0$$

o la forma,

$$Ax + By = D \quad \text{con } B \neq 0$$

donde A , B , C y D son números reales. Resolviendo para y de la ecuación de la línea recta en su forma general, se obtiene,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

se identifica la pendiente de la línea recta,

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ambas formas de la ecuación general de la línea recta son ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (x y y), los valores que satisfacen a estas ecuaciones son los pares ordenados (x, y) , geoméricamente estos valores se encuentran sobre la línea recta en el plano xy .

7.3.1 Ecuaciones de Líneas Recta Horizontal y Vertical

Una línea recta horizontal (Figura 5) que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_1) , tiene pendiente cero ($m = 0$) y una ecuación dada por,

$$y = y_1$$

Una línea recta vertical (Figura 6) que pasa por el punto (x_1, y_1) y (x_1, y_2) tiene una ecuación dada por,

$$x = x_1$$

Ejemplo 115 Determine la ecuación de la línea recta de la gráfica de la Figura 11, en su forma *pendiente-ordenada* y en su forma *general*.

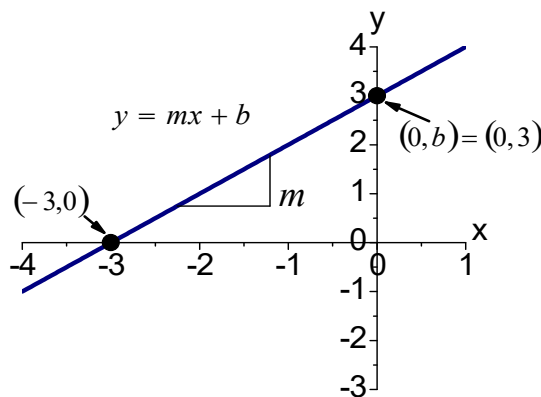


Figura 11. Ecuación de la línea recta pendiente-ordenada.

La línea recta cruza al eje y en la ordenada al origen, por lo tanto,

$$b = 3$$

la pendiente de la línea recta es positiva,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = 1$$

la ecuación de la línea recta en su forma pendiente-ordenada al origen es,

$$y = mx + b \Leftrightarrow y = x + 3$$

la ecuación de la línea recta es su forma general es,

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$$

donde $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$.

Ejemplo 116 Determine la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-4, 4)$.

Se tiene $(x_1, y_1) = (2, -1)$ y $(x_2, y_2) = (-4, 4)$; luego la pendiente,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(4 - (-1))}{(-4 - 2)} = \frac{5}{-6}$$

con el valor de la pendiente y cualquiera de los puntos dados donde pasa la recta se calcula b , por ejemplo, con $(x_1, y_1) = (2, -1)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(-\frac{5}{6}\right)x_1 + b \\ -1 &= \left(-\frac{5}{6}\right)(2) + b \\ -1 &= -\frac{5}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La ecuación de la línea recta es,

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$$

la ecuación de la línea recta en su forma general es,

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x - y + \frac{2}{3} &= 0 \\ -6\left(-\frac{5}{6}x - y + \frac{2}{3}\right) &= 0 \\ 5x + 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

donde $A = 5$, $B = 6$, $C = -4$.

Ejemplo 117 Determine la ecuación de la línea recta que pasa por el punto $(6, -4)$ y tiene pendiente $3/5$.

Se puede seguir el procedimiento anterior o a partir de la ecuación de la línea recta en su forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

con $(x_1, y_1) = (6, -4)$ y $m = 3/5$,

$$y - (-4) = \frac{3}{5}(x - 6)$$

al resolver para y ,

$$\begin{aligned} y + 4 &= \frac{3}{5}x - \frac{18}{5} \\ y &= \frac{3}{5}x - \frac{18}{5} - 4 \\ y &= \frac{3}{5}x - \frac{38}{5} \end{aligned}$$

la ecuación de la línea recta en su forma general es,

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - y - \frac{38}{5} &= 0 \\ 5\left(\frac{3}{5}x - y - \frac{38}{5}\right) &= 0 \\ 3x - 5y - 38 &= 0 \end{aligned}$$

con $A = 3$, $B = -5$, $C = -38$.

Ejemplo 118 Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y es paralela a la línea recta L cuya ecuación es $-3x + 5y = 5$.

La ecuación de la línea recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ se desconoce, pero se sabe que su pendiente es igual a la línea recta L cuya ecuación es,

$$-3x + 5y = 5$$

Con la Figura 12 se visualiza la situación del problema, por el punto $A(-1, 2)$ pasa la línea recta que es paralela a la línea recta cuya ecuación se conoce.

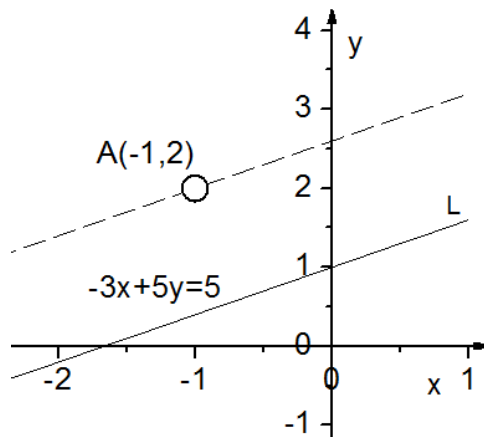


Figura 12. Ejemplo 118.

Para conocer la pendiente de la línea recta conocida es necesario escribir la ecuación en su forma pendiente-ordenada al origen, o también determinar la pendiente a partir de $m = -\frac{A}{B}$. Al resolver para y ,

$$\begin{aligned} -3x + 5y &= 5 \\ 5y &= 3x + 5 \\ y &= \frac{3}{5}x + 1 \quad \therefore \quad m = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

la pendiente de la línea recta desconocida es por lo tanto la misma. Con el punto $(-1, 2)$ y $m = \frac{3}{5}$, la ecuación de la línea recta buscada es,

$$2 = \frac{3}{5}(-1) + b$$

$$b = 2 + \frac{3}{5}$$

$$b = \frac{13}{5}$$

la ecuación de la línea recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y además es paralela a la línea recta cuya ecuación es $-3x + 5y = 5$, es,

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{5}$$

Ejemplo 119 Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa en $b = -1$, y es perpendicular a la línea recta, cuya ecuación es $-6x + 3y - 2 = 0$. En la Figura 13 se presenta el problema en forma gráfica.

La ecuación de la línea recta conocida es $-6x + 3y - 2 = 0$, al reescribirla en la forma pendiente-ordenada, se tiene,

$$-6x + 3y - 2 = 0$$

$$3y = 6x + 2$$

$$y = 2x + \frac{2}{3}$$

se tiene entonces que $m_1 = 2$; recuerde, si dos líneas rectas son perpendiculares se cumple,

$$m_1 m_2 = -1$$

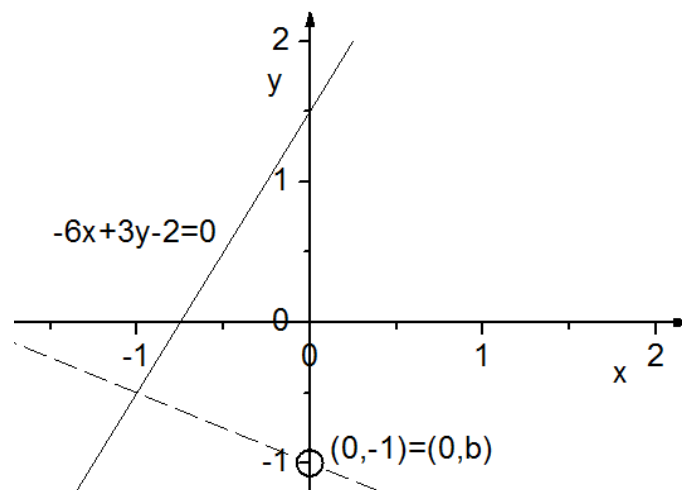


Figura 13. Ejemplo 119.

así que,

$$2(m_2) = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{2}$$

entonces la ecuación de la línea recta es,

$$y = \frac{-1}{2}x - 1$$

7.3.2 Ecuación de la Recta en su Forma Simétrica

La línea recta que pasa por la abscisa al origen (intercepto con el eje x ,) $(a, 0)$ y ordenada al origen (intercepto con el eje y) $(0, b)$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tiene pendiente

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

y su ecuación en su forma pendiente-ordenada es,

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

reescribiendo la ecuación anterior

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

al dividir entre b toda la ecuación, se obtiene,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

la cual se conoce como ecuación de la línea recta en su forma *simétrica*.

Ejemplo 120 Determine una ecuación para la línea recta en forma simétrica y en su forma pendiente ordenada, cuya gráfica se proporciona en la Figura 14.

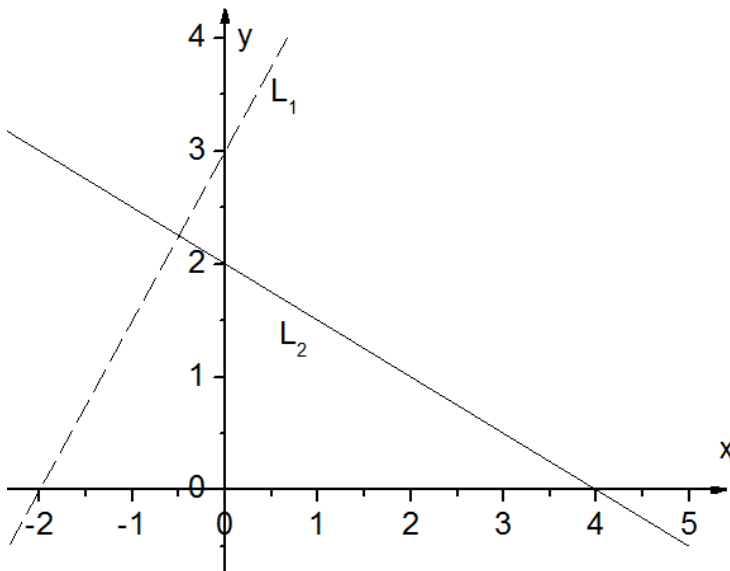


Figura 14. Ejemplo 120.

La línea recta L_1 tiene abscisa al origen $(a, 0) = (-2, 0)$ y ordenada al origen $(0, b) = (0, 3)$, la ecuación de la línea recta en su forma simétrica que pasa por estos dos puntos es,

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

Al multiplicar por 12 la ecuación anterior,

$$12 \left(\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \right)$$

se obtiene la ecuación de la línea recta en su forma general,

$$3x + 4y = 12$$

al resolver para y , se obtiene la ecuación de la línea recta en su forma pendiente-ordenada.

$$y = -\frac{3}{4}x + 3$$

De forma similar, la línea recta L_2 tiene abscisa al origen $(a, 0) = (4, 0)$ y ordenada al origen $(0, b) = (0, 2)$, la ecuación de la línea recta en su forma simétrica que pasa por estos dos puntos es,

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + \frac{y}{2} &= 1 \\ 2x + 4y &= 8 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2\end{aligned}$$

está última es la ecuación pedida.

Ejemplo 121 Grafique la ecuación de la línea recta $y = \frac{3}{2}x + 1$.

Una forma fácil es evaluar y para diferentes valores de x , y llevar los datos obtenidos a una tabla, como se muestra:

x	y	(x, y)
-2	$y = \frac{3}{2}(-2) + 1 = -2$	$(-2, -2)$
-1	$y = \frac{3}{2}(-1) + 1 = -\frac{1}{2}$	$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$
0	$y = \frac{3}{2}(-0) + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = \frac{3}{2}(1) + 1 = \frac{5}{2}$	$\left(1, \frac{5}{2}\right)$
2	$y = \frac{3}{2}(2) + 1 = 4$	$(2, 4)$

una vez construida la tabla, el par ordenado correspondiente se localiza en el plano cartesiano y se traza una línea recta que pase por todos los puntos, como se muestra en la Figura 15. Importante: para graficar un ecuación lineal es suficiente localizar 2 puntos en el plano coordenado.

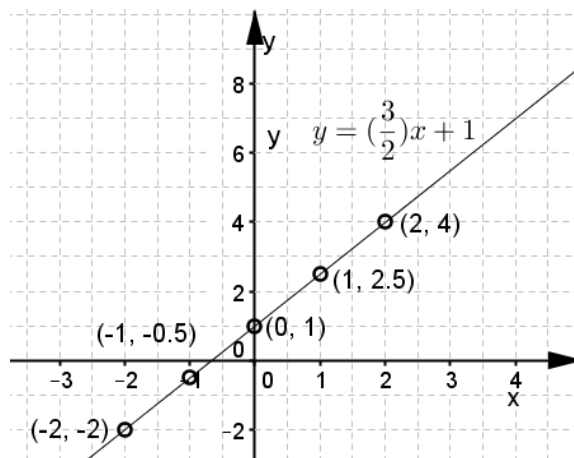


Figura 15. Ejemplo 121.

Ejemplo 122 Grafique la ecuación de la recta $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Un procedimiento simple para graficar la ecuación de una línea recta es como sigue (ver Figura 16); se identifica en la ecuación de la línea recta su pendiente y la ordenada al origen, en nuestro ejemplo,

$$m = \frac{2}{3}, \quad b = 2.$$

en el plano cartesiano se localiza la ordenada al origen $b = 2$, esta corresponde a la coordenada $(0, 2)$, sobre este punto trace una línea horizontal, paralela al eje x , a partir del punto $(0, 2)$ avance horizontalmente 3 unidades a la derecha luego avance verticalmente 2 unidades hacia arriba, como lo indica $m = \frac{2}{3}$, la coordenada final de estos desplazamientos es $(3, 4)$, por lo tanto, la línea recta pasa por la ordenada al origen $(0, 2)$ y por $(3, 4)$.

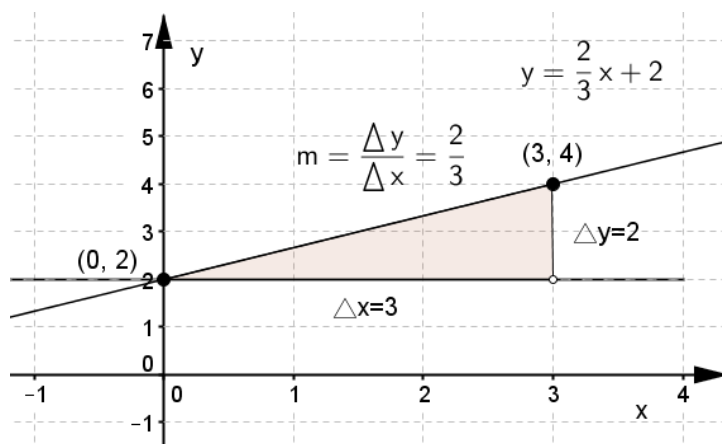


Figura 16. Ejemplo 122.

Ejemplo 123 Grafique la ecuación de la línea recta $y = -3x - 5$

De forma similar al ejemplo anterior, se identifica que,

$$\begin{aligned} m &= -3 = \frac{-3}{1} = \frac{3}{-1} \\ b &= -5 \end{aligned}$$

se localiza la ordenada al origen y se traza una línea horizontal, la pendiente puede tener dos interpretaciones, la primera es considerar $m = \frac{-3}{1}$, a partir de la ordenada al origen avance

horizontalmente 1 unidad a la derecha luego avance verticalmente 3 unidades hacia abajo, la coordenada final de estos desplazamiento es $(1, -8)$, por lo tanto, la línea recta pasa por la ordenada al origen $(0, -5)$ y por $(1, -8)$. Si consideramos la segunda interpretación, $m = \frac{3}{-1}$,

a partir de la ordenada al origen avance 1 unidad a la izquierda, luego avance verticalmente 3 unidades hacia arriba, la coordenada final de estos desplazamiento es $(-1, 2)$, por lo tanto, la recta pasa por la ordenada al origen $(0, -5)$ y por $(-1, 2)$. En la Figura 17 se identifica el proceso completo.

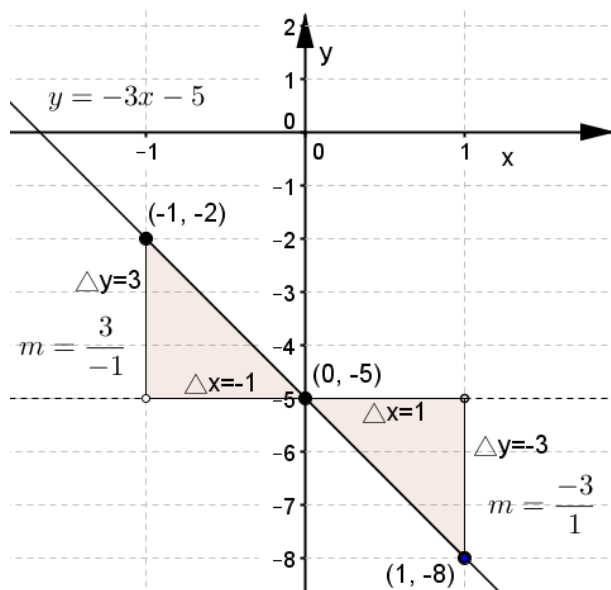


Figura 17. Ejemplo 123.

Ejemplo 124 Grafique la ecuación de la línea recta $3x - 5y = 15$.

Utilizando los interceptos con el eje x y con el eje y .

Los interceptos con el eje x y con el eje y , son la abscisa al origen $(a, 0)$ y la ordenada al origen $(0, b)$, respectivamente. Evaluando la ecuación de la línea recta:

con $y = 0$, $3x - 5(0) = 15$, $x = 5$; abscisa al origen $(a, 0) = (5, 0)$.

con $x = 0$, $3(0) - 5y = 15$, $y = -3$; ordenada al origen $(0, b) = (0, -3)$ (ver Figura 18).

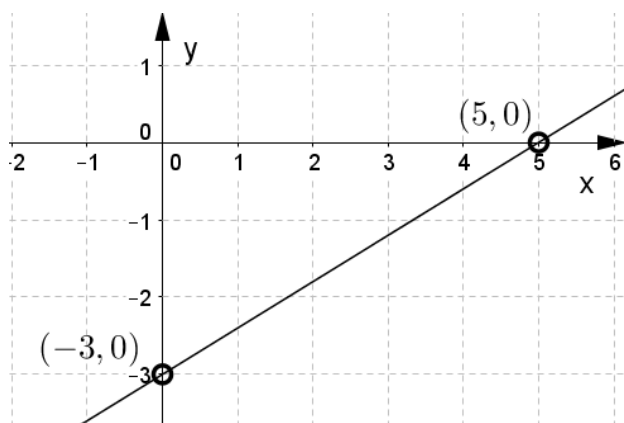


Figura 18: Ejemplo 124.

Ejercicio 54 Determine una ecuación de la línea recta en su forma simétrica y en su forma pendiente-ordenada para la línea recta cuya gráfica se proporciona en las figuras siguientes.

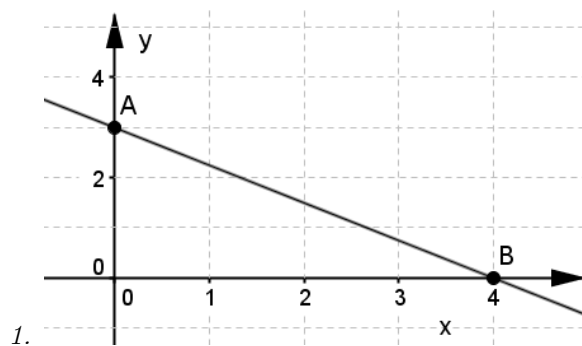


Figura 19.

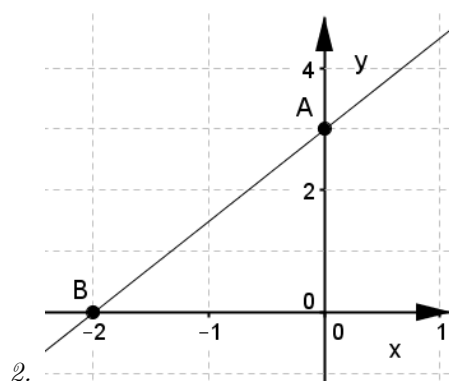


Figura 20.

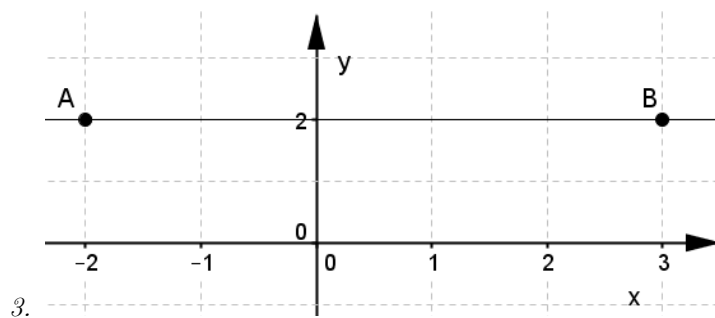


Figura 21.

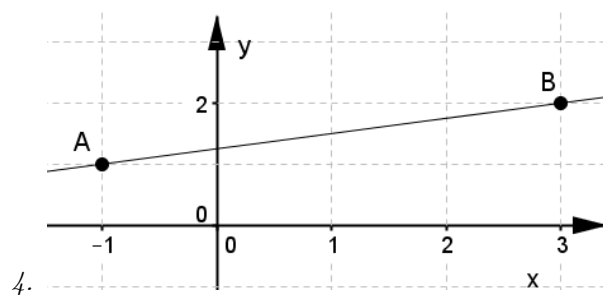


Figura 22.

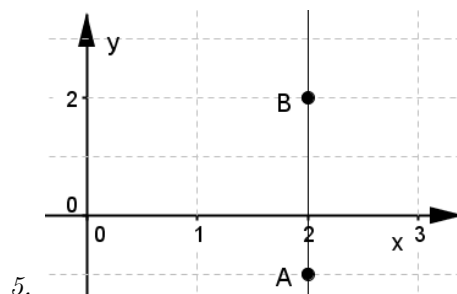


Figura 23.

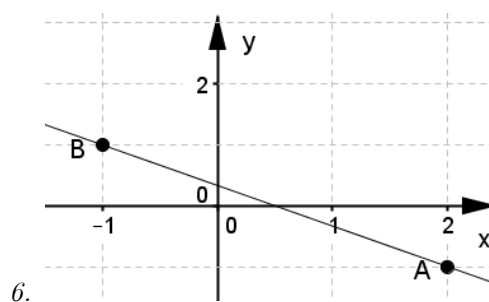


Figura 24.

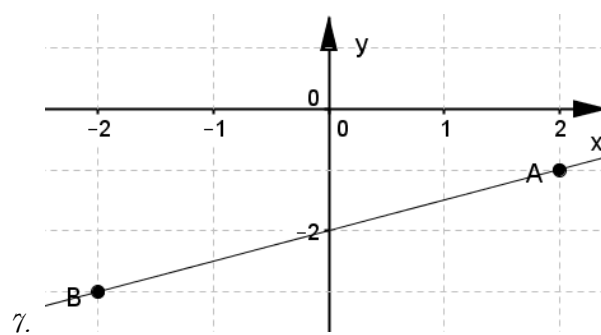


Figura 25.

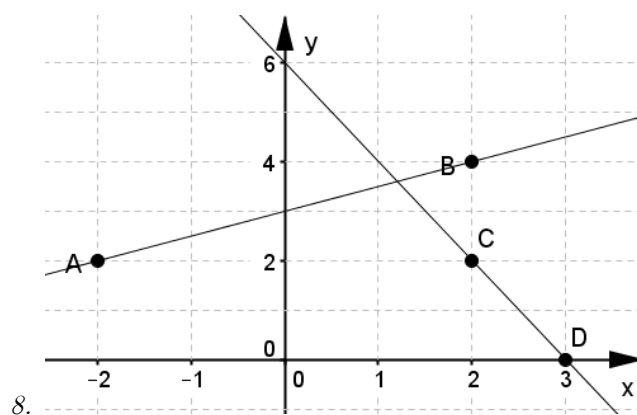


Figura 26.

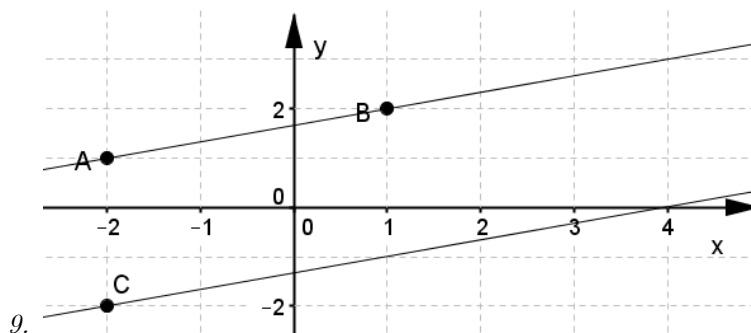


Figura 27.

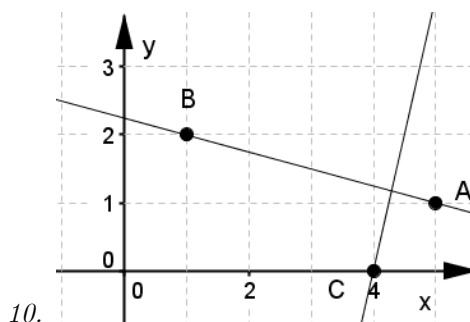


Figura 28.

Ejercicio 55 Determine una ecuación de la línea recta que cumpla las condiciones dadas

1. Pasa por $(2, 3)$; pendiente 1.
2. Pasa por $(-2, 4)$; pendiente -1 .
3. Pasa por $(1, 7)$; pendiente $\frac{2}{3}$.
4. Pasa por $(-3, -5)$; pendiente $\frac{-7}{2}$.
5. Pasa por $(1, 2)$ y $(1, 6)$.
6. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$.
7. Pendiente 3; ordenada al origen -2 .
8. Pendiente $\frac{2}{5}$; ordenada al origen 4.
9. Ordenada al origen -3 , abscisa al origen 1.
10. Abscisa al origen 8, ordenada al origen 6.
11. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x .
12. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$.

7.4 GeoGebra

GeoGebra es un *Software* de licencia libre, disponible para diferentes plataformas (*Windows*, *Mac*, *Linus*, etc.), y aplicación para tabletas, *Tablet Apps* para *Windows*, *Android* o dispositivos *iOS*. *GeoGebra* permite interactuar dinámicamente la Geometría, el Álgebra y el Análisis (Cálculo Diferencial e Integral). *GeoGebra* esta disponible en el sitio <http://www.geogebra.org/>. *GeoGebra* es un programa bastante amigable en el cual se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente.

Dos perspectivas caracterizan a *GeoGebra*: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

En la Figura 29 se presenta el espacio de trabajo de *GeoGebra*, se muestran las partes más importantes de este programa:

1. Vista algebraica.
2. Vista gráfica
3. Barra de herramientas
4. Campo de entradas
5. Ayuda de Entrada

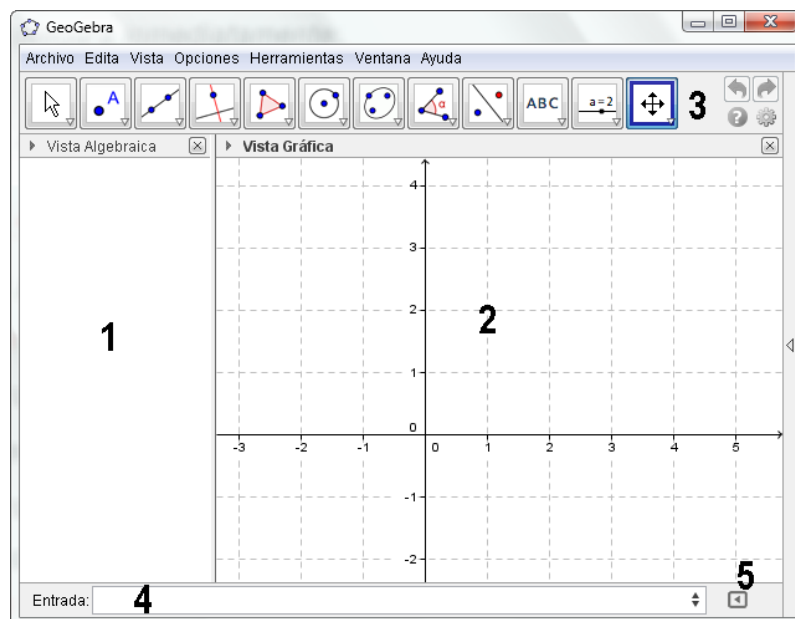


Figura 29. Espacio de trabajo de *GeoGebra*. 1 vista gráfica, 2 barra de herramientas, 3 campo de entradas, y 4 ayuda de entrada.

Los operadores básicos para las operaciones aritméticas son los siguientes:

- $+$: suma
- $-$: substracción
- $*$: mutiplicación
- $/$: división
- $^$: exponenciación

7.4.1 Álgebra y Geometría con GeoGebra

Utilizaremos *GeoGebra* para resolver algunos ejemplos relacionados con puntos y rectas localizados en el plano coordenado xy . Algunas funciones básicas de *GeoGebra* las conoceremos a través del ejemplo siguiente.

Ejemplo 125 Utilizando *GeoGebra*. Grafique la línea recta AB que pasa por los puntos $A(3, 6)$ y $B(-4, -2)$, calcule la pendiente m y la ecuación de la línea recta AB .

Dar clic en el ícono  de *GeoGebra*. Teclear en el campo .

1. $A = (3, 6)$ dar enter (introduce el punto A en el plano).
2. $B = (-4, -2)$ dar enter (introduce el punto B en el plano).
3. Escribir en el campo de entrada:

$$AB : \text{Recta}[A, B]$$

y dar enter, traza la línea recta AB que pasa por los puntos A y B .

4. Escribir en el campo de entrada:

$$m = \text{Pendiente}[AB]$$

y dar enter para calcular la pendiente de la línea recta AB .

Cada entrada introducida se despliega automáticamente en la ventana algebraica, estas se muestran en la Figura 30.

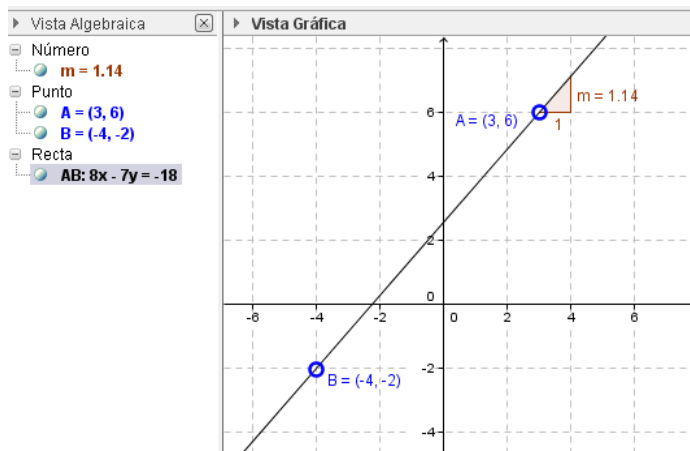


Figura 30. Vista algebraica y gráfica de *GeoGebra*.

en la ventana algebraica se muestra,

$$m = 1.44$$

$$AB : 8x - 7y = -18$$

La ecuación de la línea recta en forma de pendiente-ordenada se puede obtener como se muestra,

$$8x - 7y = -18$$

$$-7y = -8x - 18$$

$$y = \frac{8}{7}x + \frac{18}{7}$$

$$y = 1.14x + 2.57$$

Ejemplo 126 Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por el punto $A(-3, 6)$ y es paralela a la línea recta L cuya ecuación es $-3x + 5y = 5$.

Iniciar el programa al dar clic en el ícono  de GeoGebra. Teclear en el campo secuencialmente y dar enter al final de cada instrucción lo siguiente:

1. $A = (-3, 6)$ (introduce el punto A en el plano).
2. $L : -3x + 5y = 5$ (traza la recta y asigna la ecuación a L).
3. En la barra de herramientas dar clic en el ícono , seleccionar el ícono  de línea recta paralela.

Ir a la vista gráfica y dar clic sobre la línea recta L y luego sobre el punto A , o viceversa. En la ventana algebraica se desplegará inmediatamente:

$$a: 3x - 5y = -39$$

la cual es la ecuación de la línea recta que pasa por el punto A y es paralela a la línea recta L ; en la ventana gráfica se trazaran ambas rectas.

Ejemplo 127 Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa en $b = -4$, y es perpendicular a la línea recta L , cuya ecuación es $-6x + 3y = 2$.

En GeoGebra teclear en el campo y dar enter:

1. $B = (0, -4)$ (B y no b , ya que los puntos se identifican con mayúsculas).
2. $L : -6x + 3y = 2$ (introduce la ecuación de la recta L).
3. En la barra de herramientas dar clic en el ícono  y seleccionar el ícono de rectas perpendiculares. Ir a la vista gráfica y dar clic sobre la línea recta L y luego sobre el punto A , o viceversa (ver Figura 31):

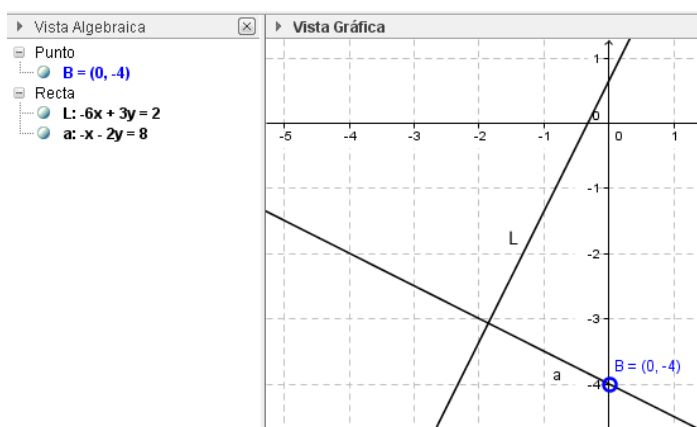


Figura 31. Vista algebraica y gráfica de GeoGebra.

En la ventana algebraica se desplegará inmediatamente:

$$a: x + 2y = -8$$

Ejercicio 56 Determine la ecuación de la línea recta que cumple las condiciones dadas, en su forma pendiente ordenada y en su forma general.

1. Pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(4, 5)$.
2. Tiene pendiente $m = 2/5$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.
3. Corta al eje x en $x = 2$ y al eje y en $y = 4$.
4. Pasa por el punto $(2, 3)$ y es paralela a la línea recta $3x - 7y = 21$.
5. Pasa por el punto $(-5, 3)$ y es perpendicular a la línea recta $y = -3x + 2$.
6. Pasa por el punto $(8, 2)$ y es paralela a la línea recta $x = -5$.

Ejercicio 57 Determine si los puntos A y B dados están o no sobre la línea recta dada:

1. $A(1, 7)$, $B(-3, 1)$ y la línea recta $y = 2x + 5$.
2. $A(2, 1)$, $B(1, 2)$ y la línea recta $y = 2$.
3. $A(1, -1)$, $B(0, 3)$ y la línea recta $3x - 2y = 1$.
4. $A(1, 5)$, $B(2, 3)$ y la línea recta $x + 2y = 1$.
5. $A(2, 6)$, $B(-5, 1)$ y la línea recta $x + 2y = 1$.

Ejercicio 58 Determine si las líneas rectas dadas son perpendiculares, paralelas o ninguna de las dos.

1. $3x + 4 - y = 0$; $-3x + 9y = 18$.
2. $4x - 3y = 2$; $3x + 4y = 5$.
3. $2x - 14y = -2$; $4x - 7y = 0$.
4. $-x + 6y = 8$; $-6x - y = 1$.

Capítulo 8

Ecuaciones Lineales Simultáneas

La *ecuación general de la línea recta* escrita en la forma,

$$Ax + By = C$$

representa una ecuación de primer grado o *ecuación lineal* con dos incógnitas, " x " y " y ", la solución que satisface esta ecuación es el conjunto de pares ordenados (x, y) , los cuales se encuentran sobre una línea recta en el plano xy .

Un conjunto de ecuaciones lineales con variables comunes se le llama *sistema de ecuaciones lineales*, o sistema de ecuaciones lineales simultáneas, por ejemplo, el sistema,

$$\begin{aligned} Ax + By &= C \\ Dx + Ey &= F \end{aligned}$$

se le identifica como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o un sistema lineal de 2×2 , donde A, B, C, D, E y F son números reales; x, y son las variables o incógnitas comunes del sistema. La solución de tal sistema de ecuaciones es el conjunto de valores de x y y que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 se puede recurrir al método gráfico o a un método algebraico.

8.1 Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 2×2

8.1.1 Método Gráfico

Cada ecuación de un sistema lineal de 2×2 representa una recta en el plano xy , cuando ambas ecuaciones se grafican en el mismo plano, puede ocurrir que,

1. Las dos rectas se cortan en un punto común, entonces, el sistema **tiene solución única**, el sistema por lo tanto es consistente.
2. Las dos rectas son paralelas, entonces, el sistema **no tiene solución**, el sistema por lo tanto es inconsistente.
3. Las dos rectas se sobreponen una sobre otra, entonces, el sistema **tiene soluciones múltiples o soluciones infinitas**, el sistema por lo tanto es consistente.

Ejemplo 128 Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones lineales ($E1$ y $E2$) dado por,

$$E1 : x + 3y = 10$$

$$E2 : x - 2y = -3$$

Para graficar ambas ecuaciones se hace uso de los visto en el Capítulo 7. Para graficar cada una de las ecuaciones sólo es necesario obtener dos puntos para cada una de ellas, así por ejemplo, para la ecuación $E1$,

$$E1 : x + 3y = 10$$

$$x = 1 \rightarrow y = \frac{10-1}{3} = 3 \rightarrow A(1, 3)$$

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{10-4}{3} = 2 \rightarrow B(4, 2)$$

para la ecuación $E2$,

$$E2 : x - 2y = -3$$

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{-3+1}{-2} = 1 \rightarrow C(-1, 1)$$

$$x = 5 \rightarrow y = \frac{-3-5}{-2} = 4 \rightarrow D(5, 4)$$

al graficar las coordenadas se trazan ambas líneas rectas que representan las ecuaciones $E1$ y $E2$, las dos líneas rectas se cortan en un punto en común, $x = 2.2$, $y = 2.6$, esta coordenada es la solución del sistema (Figura 32).

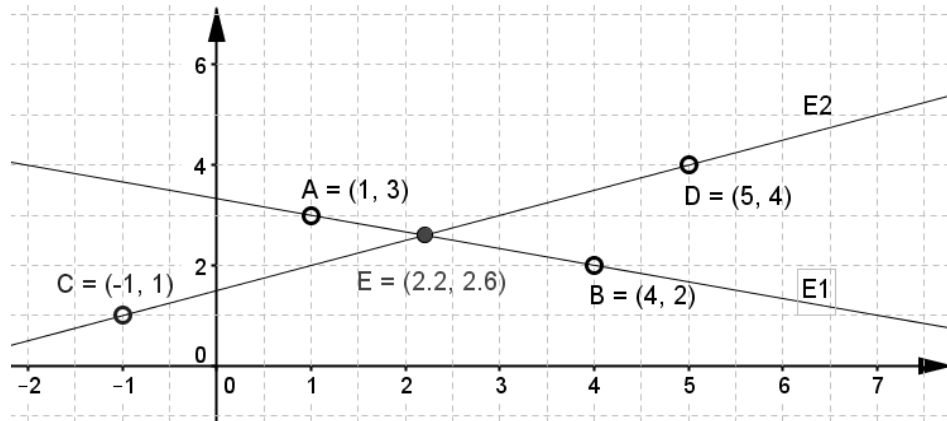


Figura 32. Método gráfico, solución única, Ejemplo 128.

Al comprobar la solución,

$$2.2 + 3(2.6) = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$$

$$2.2 - 2(2.6) = -3 \Leftrightarrow -3 = -3$$

la solución satisface a ambas ecuaciones.

Ejemplo 129 Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones lineales ($E1$ y $E2$) dado por,

$$E1 : -3x - y = 5$$

$$E2 : 2x - y = -2$$

Para graficar las ecuaciones se puede utilizar el proceso utilizado en el ejemplo anterior o el procedimiento dado en el Capítulo 7. Reescribir las ecuaciones a la forma pendiente-ordenada para identificar m y b , se tiene entonces para $E1$,

$$y = -3x - 5 \rightarrow m = -3, b = -5$$

y para $E2$,

$$y = 2x + 2 \rightarrow m = 2, b = 2$$

En la Figura 33 se muestra las dos líneas rectas que corresponden a estas ecuaciones; la solución del sistema es $x = -1.4$, $y = -0.8$.

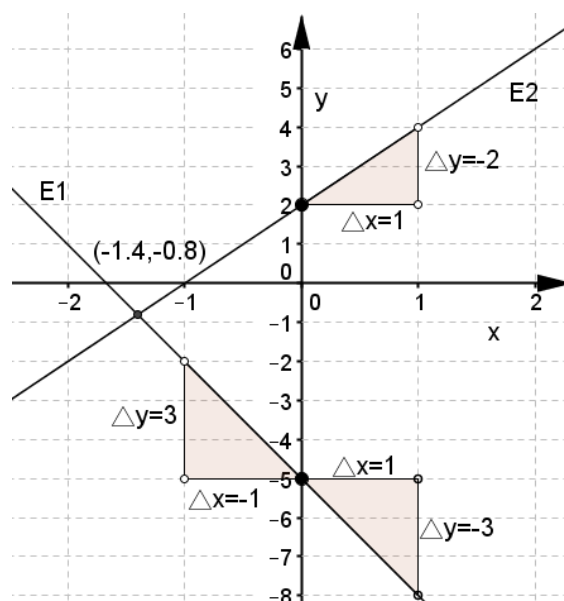


Figura 33. Ejemplo 129.

8.1.2 Método Gráfico con GeoGebra

En los siguientes ejemplos se utiliza *GeoGebra* para encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 130 Resuelva por el método gráfico el sistema de ecuaciones lineales de 2×2 siguiente,

$$E_1 : 7x - 5y = 6$$

$$E_2 : 3x + 8y = 10$$

En *GeoGebra* teclee en el campo lo siguiente,

1. $E1: 7x-5y=6$ + enter $\rightarrow$ introduce la ecuación $E1$.
2. $E2: 3x+8y=10$ + enter $\rightarrow$ introduce la ecuación $E2$.
3. $\text{Interseca}[E1,E2]$ + enter $\rightarrow$ encuentra el punto de intersección de las dos líneas rectas, está es la solución del sistema.

La solución gráfica es: $x \approx 1.38$ y $y \approx 0.73$ y se puede apreciar en la Figura 34.

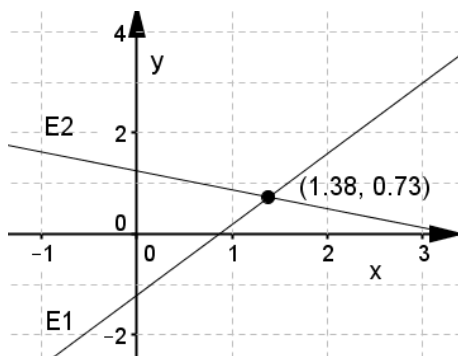


Figura 34. Ejemplo 130.

Ejemplo 131 Resuelva gráficamente el sistema lineal siguiente:

$$E_1 : 3x - 4y = -6$$

$$E_2 : 6x - 8y = 8$$

Para graficar el sistema de ecuaciones lineales en GeoGebra teclear en el campo lo siguiente

1. $E1: 3x-4y=-6 + \text{enter} \rightarrow$ introduce la ecuación $E1$.

2. $E2: 6x-8y=8 + \text{enter} \rightarrow$ introduce la ecuación $E2$.

En la Figura 35 se observa que ambas ecuaciones representan líneas rectas paralelas sin ningún punto de coincidencia.

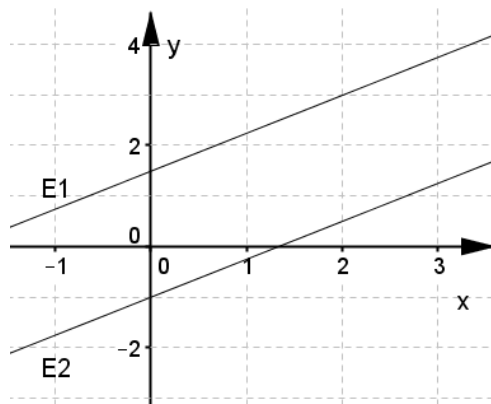


Figura 35. Sistema de ecuaciones lineales sin solución, Ejemplo 131.

Ejemplo 132 Utilizando GeoGebra resuelva gráficamente el sistema lineal siguiente

$$E_1 : 3x - 2y = -2$$

$$E_2 : 6x - 4y = -4$$

Para graficar este sistema por medio de GeoGebra teclear en el campo lo siguiente,

1. $E1: 3x-2y=-2 + \text{enter} \rightarrow$ introduce la ecuación $E1$.

2. E2: $6x-4y=-4 + \text{enter} \rightarrow$ introduce la ecuación E2.

La gráfica (Figura 36) del sistema muestra que las dos líneas rectas se superponen en un número infinito de puntos en el plano xy , se dice entonces que el sistema tiene soluciones infinitas.

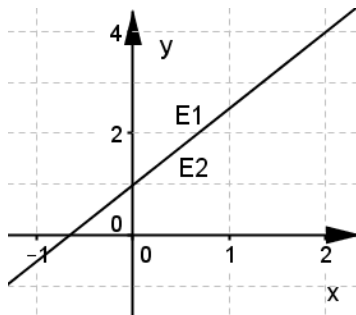


Figura 36. Sistema de ecuaciones lineales con soluciones infinitas, Ejemplo 132.

Clasificación de Soluciones

Las soluciones encontradas en un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 pueden clasificarse de la forma siguiente:

$$\text{Tipo de solución:} \begin{cases} \text{Consistente:} \begin{cases} \text{Solución única} \\ \text{Soluciones infinitas} \end{cases} \\ \text{Inconsistente:} \begin{cases} \text{Sin solución} \end{cases} \end{cases}$$

esta clasificación se puede extender a sistemas de n ecuaciones con m incógnitas.

Ejercicio 59 Resolver por el método gráfico cada sistema de ecuaciones lineales, determine si el sistema tiene solución única, soluciones infinitas o es inconsistente.

1. $y = x - 4$
 $y = -\frac{1}{3}x + 4$

2. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$
 $x = 3 + \frac{1}{4}y$

3. $4x + y = 12$
 $x = 3 - \frac{1}{4}y$

4. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$
 $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

5. $5x + 3y = 12$
 $4x - 5y = 17$

6. $x - 3 = y$
 $3x + y = 1$

7. $2x - 3y = 7$
 $3y = 7 + 2x$

8. $(y - 3) = -3(x - 2)$
 $3x + y = 1$

9. $4x + y = 12$
 $x = 3 - \frac{1}{4}y$

10. $y = \frac{1}{3}x + 2$
 $y = \frac{1}{3}x - 2$

11. $x - y = 3$
 $3x + y = 1$

12. $y = x - 4$
 $y = \frac{1}{3}x + 2$

13. $y = -\frac{1}{3}x + 4$
 $y = \frac{1}{3}x + 2$

14. $2x - 3y = 7$
 $3y = 7 + 2x$

$$\begin{aligned} 15. \quad & y = \frac{1}{3}x - 2 \\ & y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \quad & (y + 3) = \frac{2}{3}(x - 2) \\ & (y - 1) = -3(x + 4) \end{aligned}$$

8.1.3 Métodos de Eliminación

En esta sección solo se presentan los métodos fundamentales para resolver ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Los métodos de eliminación presentan un procedimiento práctico que reduce el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a una sola ecuación con una incógnita, la cual puede ser resuelta, posteriormente, encontrar la otra incógnita cancelada en el proceso de eliminación en cualquiera de las ecuaciones equivalentes obtenidas. Los métodos de eliminación son,

1. Por sustitución.
2. Por igualación.
3. Por adición o sustracción.

Tales métodos quedaran explicados a partir de ejemplos que se resuelven paso a paso, se recomienda llevar un control de las ecuaciones al numerarlas como se indica en el ejemplo siguiente.

Método por sustitución

1. Despejar una incógnita de una de las dos ecuaciones del sistema; está es la incógnita que deseamos eliminar o cancelar.
2. Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación, simplificar y resolver la ecuación para la incógnita no eliminada.
3. Sustituir el valor de la incógnita obtenida en el paso dos en la ecuación obtenida en el paso uno, simplificar y resolver.
4. Verificar que la solución satisface el sistema de ecuaciones

Ejemplo 133 Resuelva con el método por sustitución el sistema siguiente.

$$\begin{aligned} E1 & : 4x + 3y = 22 \\ E2 & : 5x - 7y = 6 \end{aligned}$$

Se identifican las ecuaciones como $E1$ y $E2$.

1. Despejar x de $E1$,

$$E3 : x = -\frac{3}{4}y + \frac{11}{2}$$

se identifica la ecuación obtenida de esta operación como $E3$.

2. Sustituir $E3$ en $E2$, simplificar y resolver para y ,

$$\begin{aligned} \underbrace{5\left(-\frac{3}{4}y + \frac{11}{2}\right)}_{E3} - 7y &= 6 \\ -\frac{15}{4}y + \frac{55}{2} - 7y &= 6 \\ -\frac{43}{4}y &= 6 - \frac{55}{2} \\ -\frac{43}{4}y &= -\frac{43}{2} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

3. Sustituir el valor obtenido para $y = 2$ en $E3$

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{4}(2) + \frac{11}{2} \\ x &= -\frac{3}{2} + \frac{11}{2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

4. Verificar que la solución $(x, y) = (4, 2)$, satisface el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} E1 &: 4(4) + 3(2) = 22 \rightarrow 16 + 6 = 22 \\ E2 &: 5(4) - 7(2) = 6 \rightarrow 20 - 14 = 6 \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución del sistema es $(4, 2)$.

Ejemplo 134 Resuelva con el método por sustitución el sistema siguiente.

$$\begin{aligned} E1 &: 2x + y = 3 \\ E2 &: 6x + 3y = 9 \end{aligned}$$

siguiendo el procedimiento anterior, resolviendo para y de $E1$,

$$E3 : y = 3 - 2x$$

al sustituir $E3$ en $E2$,

$$\begin{aligned} 6x + 3(3 - 2x) &= 9 \\ 6x + 9 - 6x &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

lo cual significa que el sistema es consistente, la solución gráfica de este sistema corresponde a dos rectas que se sobreponen en un número infinito de puntos en el plano xy , por lo tanto, el sistema tiene soluciones infinitas. La solución se puede encontrar de cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo, si elegimos la ecuación $E1$ resuelta para y , se tiene,

$$E3 : y = 3 - 2x$$

que representa la solución general del sistema, el sistema tiene soluciones infinitas o múltiples soluciones, ya que x puede tomar cualquier valor del conjunto de los números reales, algunas soluciones particulares son:

$$\begin{aligned}x &= -1 \rightarrow y = 3 - 2(-1) = 5 \rightarrow (-1, 5) \\x &= 1 \rightarrow y = 3 - 2(1) = 1 \rightarrow (1, 1) \\x &= 0 \rightarrow y = 3 - 2(0) = 3 \rightarrow (0, 3)\end{aligned}$$

como se observa, cada solución obtenida da lugar a una coordenada la cual es un punto sobre la recta $y = 3 - 2x$. La solución del sistema se escribe:

$$\begin{aligned}y &= 3 - 2t \\x &= t \\t &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Para un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas es fácil identificar cuando existen soluciones infinitas, note que,

$$E2 = 3E1$$

esto es, la ecuación $E2$ puede obtenerse al multiplicar la ecuación $E1$ por 3, por lo tanto, un sistema lineal de 2×2 tiene soluciones infinitas si las ecuaciones que forman el sistema son múltiplos entre ellas.

Método por igualación

1. Despejar la misma incógnita de cada una de las ecuaciones del sistema, está es la incógnita que deseamos eliminar.
2. Igualar ambas ecuaciones despejadas para la misma incógnita, simplificar y resolver la ecuación para la incógnita no eliminada.
3. Sustituir el valor obtenido en el paso dos en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas para la incógnita eliminada.
4. Verifique que la solución satisface el sistema de ecuaciones.

Ejemplo 135 Resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación.

$$\begin{aligned}E1 &: 4x - 5y = 2 \\E2 &: 5x + 3y = 21\end{aligned}$$

1. Despejar de $E1$ y $E2$ la incógnita x .

$$\begin{aligned}E3 &: x = \frac{5}{4}y + \frac{1}{2} \\E4 &: x = -\frac{3}{5}y + \frac{21}{5}\end{aligned}$$

2. Igualar las ecuaciones $E3=E4$, simplificar y resolver para y ,

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}y + \frac{1}{2} &= -\frac{3}{5}y + \frac{21}{5} \\ \frac{5}{4}y + \frac{3}{5}y &= -\frac{1}{2} + \frac{21}{5} \\ \frac{37}{20}y &= \frac{37}{10} \\ y &= \left(\frac{20}{37}\right)\left(\frac{37}{10}\right) \\ y &= 2\end{aligned}$$

3. Sustituir el valor de $y = 2$, en la ecuación $E3$ ó en $E4$; al sustituir en la ecuación $E3$, simplificar y resolver se tiene,

$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{4}(2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ x &= 3\end{aligned}$$

4. Verificar si ambas ecuaciones cumplen,

$$\begin{aligned}E1 &: 4(3) - 5(2) = 2 \rightarrow 12 - 10 = 2 \\ E2 &: 5(3) + 3(2) = 21 \rightarrow 15 + 6 = 21\end{aligned}$$

por lo tanto, la solución del sistema es $(3, 2)$.

Ejemplo 136 Resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación.

$$\begin{aligned}E1 &: 2x + y = -3 \\ E2 &: 6x + 3y = 1\end{aligned}$$

aplicando el método, despejando y de ambas ecuaciones, se tiene,

$$\begin{aligned}E3 &: y = -2x + \frac{1}{3} \\ E4 &: y = -2x - 3\end{aligned}$$

igualando ambas ecuaciones, se obtiene,

$$\begin{aligned}-2x + \frac{1}{3} &= -2x - 3 \\ \frac{1}{3} &= -3\end{aligned}$$

lo que significa que el sistema tiene una inconsistencia, por lo tanto, el sistema no tiene solución

Método por adición o sustracción

1. Multiplicar una ecuación o ambas ecuaciones por constantes adecuadas, para que los coeficientes de la incógnita elegida en ambas ecuaciones sean los opuestos.

2. Sumar ambas ecuaciones, para eliminar una de las incógnitas y resolver la ecuación para la incógnita no eliminada.
3. Sustituir el valor obtenido de la incógnita no eliminada en una de las dos ecuaciones del sistema de ecuaciones lineales.
4. Verificar la solución obtenida.

Ejemplo 137 Resolver el sistema de ecuaciones lineales por el método adición y sustracción.

$$E1 : 5x + y = 12$$

$$E2 : x + 5y = 36$$

1. Multiplicar la ecuación E2 por (-5) de tal forma que el coeficiente de la incógnita x en E2, sea el opuesto del coeficiente de la incógnita x en E1, esto da lugar al sistema equivalente siguiente,

$$E1 : 5x + y = 12$$

$$E2 : -5x - 25y = -180$$

2. Sumar verticalmente ambas ecuaciones,

$$E1 : 5x + y = 12$$

$$E2 : -5x - 25y = -180$$

$$E1 + E2 : -24y = -168$$

en el resultado obtenido resolver para la incógnita no eliminada,

$$-24y = -168$$

$$y = 7$$

3. Sustituir el valor de $y = 7$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema original, por ejemplo, en E1:

$$5x + 7 = 12$$

$$x = \frac{12 - 7}{5}$$

$$x = 1$$

4. Verificar la solución obtenida en el sistema original.

$$E1 : 5(1) + 7 = 12 \rightarrow 5 + 7 = 12$$

$$E2 : 1 + 5(7) = 36 \rightarrow 1 + 35 = 36$$

lo cual prueba que la solución $(1, 7)$ es correcta.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales se recurre a varios métodos, su aplicación de cada uno ellos depende de la facilidad del lector de aplicarlos, a medida que el número de ecuaciones e incógnitas aumenta los métodos presentados se vuelven complicados por el número de operaciones que se necesitan hacer, en este momento los métodos del álgebra lineal¹ son los más adecuados.

¹Ver Álgebra Lineal Básica con GeoGebra y WxMaxima, acceso libre en <http://www.mediafire.com/view/?du3dqxfvvq8atx4>

Ejemplo 138 Considere el sistema de dos ecuaciones lineales (E_1 y E_2) con dos incógnitas:

$$E1 : ax + by = e$$

$$E2 : cx + dy = f$$

donde a, b, c, d, e y f son números reales no todos nulos.

Al efectuar las operaciones siguientes: $dE1$ y $bE2$, se obtiene un sistema equivalente,

$$E3 : adx + bdy = de$$

$$E4 : bcx + bdy = bf$$

Si se efectúa $E3 - E4$, se eliminan los términos que contienen a la incógnita y , se obtiene entonces,

$$E3 - E4 : adx - bcx = de - bf$$

factorizando por factor común,

$$x(ad - bc) = de - bf$$

La ecuación anterior se puede resolver para x , siempre y cuando $ad - bc \neq 0$, esto evita la división entre cero; entonces la solución para x es,

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

De forma similar se obtiene y ,

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

8.1.4 Existencia de Soluciones

En el ejemplo anterior se observa en ambas soluciones en el denominador el factor $(ad - bc)$, este es el producto de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales de 2×2 , establece la existencia de solución única si,

$$(ad - cb) \neq 0$$

a este producto cruzado de los coeficientes del sistema se le conoce como determinante ($\det$) y se denota por,

$$\det \text{ Sistema } (2 \times 2) = ad - bc$$

Se afirma entonces, sin temor a equivocarse, que el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas dado por,

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

1. Tiene solución única, sí y sólo sí $(ad - bc) \neq 0$, esto es, su determinante de los coeficientes del sistema es diferente de cero.
2. Tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución, sí y sólo sí $(ad - bc) = 0$.

Ejemplo 139 Determine si el sistema lineal dado tiene solución única.

$$E1 : 7x - 5y = 6$$

$$E2 : 3x + 8y = 10$$

aplicando la definición de determinante, se tiene,

$$\begin{aligned}\det \text{ Sistema} &= ((7)(8) - (-5)(3)) \\ &= 71 \neq 0\end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema tiene solución única, esta solución se muestra gráficamente, ver Figura 37.

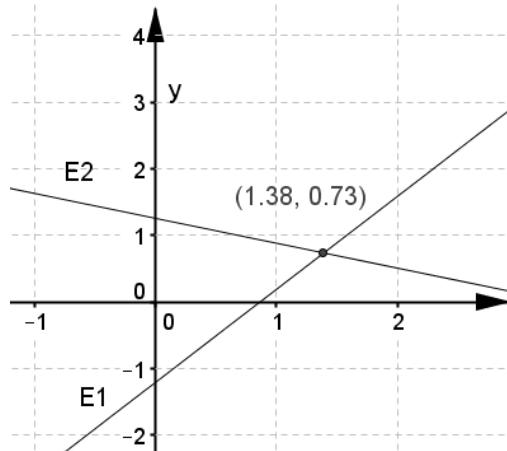


Figura 37. Solución única, Ejemplo 139.

La solución gráfica es: $x \approx 1.38$ y $y \approx 0.73$, es decir, el par ordenado $(1.38, 0.73)$. La solución algebraica puede obtenerse fácilmente por el método de sustitución de la forma siguiente, de la ecuación E1 resolvemos para x ,

$$E3 : x = \frac{5}{7}y + \frac{6}{7}$$

la ecuación E3 se sustituye en la ecuación E2, se simplifica y resuelve para la variable y :

$$\begin{aligned}3\left(\frac{5}{7}y + \frac{6}{7}\right) + 8y &= 10 \\ \frac{71}{7}y + \frac{18}{7} &= 10 \\ \frac{71}{7}y + \frac{18}{7} &= 10 \\ y &= \frac{52}{71}\end{aligned}$$

El valor de y obtenido se sustituye en la ecuación E3 para obtener el valor de la variable x .

$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{7}\left(\frac{52}{71}\right) + \frac{6}{7} \\ x &= \frac{98}{71}\end{aligned}$$

la solución es:

$$(x, y) = \left(\frac{98}{71}, \frac{52}{71}\right)$$

Ejemplo 140 Determine si el sistema lineal dado tiene solución única.

$$E1 : 3x - 4y = -6$$

$$E2 : 6x - 8y = 8$$

el valor del determinante del sistema muestra que:

$$\begin{aligned}\det \text{ Sistema} &= ((3)(-8) - (6)(-4)) \\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema no tiene solución única; el sistema puede tener soluciones infinitas o no tener solución. Aplicando el método de igualación, despejando de ambas ecuaciones x e igualando las ecuaciones, se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}y + \frac{4}{3} &= \frac{4}{3}y - 2 \\ \frac{4}{3} &= -2\end{aligned}$$

lo cual muestra que el sistema no tiene solución, ya que se presenta una inconsistencia.

Ejemplo 141 Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned}E1 &: \frac{1}{3}x + y = 12 \\ E2 &: x + 3y = 36\end{aligned}$$

el valor del determinante del sistema es,

$$\begin{aligned}\det \text{ Sistema} &= \left(\left(\frac{1}{3} \right) (3) - (1)(1) \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

lo que muestra que el sistema no tiene solución única. Note que el $E2=3E1$, por lo tanto, el sistema tiene soluciones infinitas ya que ambas ecuaciones son múltiplos una de otra. Las soluciones vienen dadas por $x = 36 - 3y$, dado cualquier número real y .

Ejercicio 60 Determine si el sistema tiene solución única, soluciones infinitas o es inconsistente. Resuelva por un método de eliminación los sistemas de ecuaciones lineales dados.

$$1. \quad \begin{aligned}2x - 4y &= 0 \\ 3x - \frac{1}{2}y &= 9\end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned}x - 3y &= -1 \\ 4x + 3y &= 11\end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned}2x - 4y &= 5 \\ 3x - 2y &= 6\end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned}x + 4y &= 7 \\ \frac{1}{2}x + 2y &= 5\end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned}3x - 4y &= 7 \\ 9x - 12y &= 14\end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned}x + 2y &= 7 \\ 2x - y &= 4\end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned}\frac{3}{2}x - 2y &= 4 \\ x - \frac{1}{3}y &= 2\end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned}2x - 5y &= 10 \\ 6x - 15y &= 30\end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned}5x - 6y &= 8 \\ 10x - 12y &= 16\end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned}4x - 5y &= 14 \\ 2x + 3y &= -4\end{aligned}$$

$$11. \quad \begin{aligned}\frac{5}{4}x - \frac{2}{3}y &= 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}y &= 6\end{aligned}$$

$$12. \quad \begin{aligned}x - y &= 7 \\ x + y &= 5\end{aligned}$$

$$13. \quad \begin{aligned} 2x - 2y &= 13 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$$

$$14. \quad \begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ -7x + 8y &= -3 \end{aligned}$$

Capítulo 9

Exponenciales y Logaritmos

9.1 Expresiones Exponenciales

Se define la *potencia n -ésima* de la variable x como,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ veces}}$$

donde x es un número real diferente de cero llamado *base* y n un *exponente* entero positivo. Por ejemplo, en la expresión x^3 , la base es x , el exponente es 3; la expresión es la potencia 3 de la variable x , x al cubo o simplemente la potencia cúbica de x .

En general, la forma que tienen este tipo de expresiones algebraicas es,

$$(\text{base variable})^{\text{potencia constante}}$$

esto es, la *base es variable* y la *potencia es un término constante*. Algunas expresiones algebraicas que contienen este tipo de términos son,

$$x^2; (2x^3 + 1)^3; x^2 + 3x + 1; x^4 - 5x^3 - 2x^2; \text{ etc}$$

Consideremos ahora expresiones algebraicas de la forma,

$$(\text{base constante})^{\text{potencia variable}}$$

esto es, expresiones algebraicas donde la *base es una constante* y la *potencia la variable*, ejemplos de tales expresiones son,

$$2^x; 3^x; \left(\frac{1}{2}\right)^x; \left(\frac{3}{5}\right)^x; \text{ etc.}$$

En forma general, las *expresiones algebraicas exponenciales* con base a tienen la forma,

$$a^x$$

donde x es cualquier número real y a un número real positivo diferente de uno, esto es,

$$a > 0, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1$$

note que esta condición establece una base positiva. No tiene caso práctico tener al número "1" como base, ya que uno elevado a cualquier número real es uno; las condiciones anteriores excluyen los valores de a negativos. De acuerdo a esto, a puede tomar los valores en los intervalos abiertos,

$$(0, 1) = 0 < a < 1 \quad \text{y} \quad (1, \infty) = 1 < a$$

algunos ejemplos de estas expresiones con $0 < a < 1$ son,

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x; \left(\frac{1}{7}\right)^x; \left(\frac{1}{5}\right)^x; \left(\frac{1}{2}\right)^x; \text{etc.}$$

y con $a > 1$,

$$2^x; 5^x; 7^x; 10^x; \text{etc.}$$

En este tipo de expresiones la potencia puede ser una expresión algebraica simple o compuesta, por ejemplo,

$$4^{(2x^2+1)}; 10^{(-x+x^3)}; \text{etc.}$$

una forma de referirnos a la potencia de una expresión exponencial es como *argumento*, así que, en los ejemplos anteriores, $2x^2 + 1$ y $-x + x^3$, es el argumento de la expresión exponencial. En forma general,

$$a^{(\text{expresión algebraica})} = a^{(\text{argumento})}$$

9.1.1 Bases Comunes

Como se vio anteriormente, existen infinitos valores para la base a , pero se prefieren dos valores de base muy importante en las ciencias e ingenierías, los valores de a considerados son,

$$a = 10 \quad \text{o} \quad a = e$$

Así las expresiones,

$$10^x; 10^{-x^2}; \text{etc.}$$

se conocen como *expresiones algebraicas exponencial decimal*; y las expresiones de la forma,

$$2e^x; e^{-x^2}; e^x - 3; \text{etc.}$$

se conocen como *expresiones algebraicas exponencial natural*.

El valor de $e \approx 2.71828$, dado en el Capítulo 1, se define como el valor que se aproxima por la expresión algebraica,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n , entero positivo, se vuelve grande. En forma simbólica, esta descripción en el cálculo diferencial se escribe,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Un cálculo aproximado de este valor se muestra en la tabla siguiente,

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000...
5	2.48832...
10	2.59374...
100	2.70481...
1000	2.71692...
10,000	2.71815...
100,000	2.71827...
1,000,000	2.71828...
10,000,000	2.71828...

9.1.2 Leyes de los Exponentes

Las leyes de los exponentes se aplican de forma similar a las expresiones algebraicas exponenciales.

Si x y y son variables reales, a y b son positivos, entonces,

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $a^x = a^y$, sí y solo si $x = y$.

Ejemplo 142 *Leyes de los exponentes aplicadas a expresiones exponenciales.*

1. $2^x 2^y = 2^{x+y}$
2. $b^{3x+1} b^{1-3x} = b^{3x+1+1-3x} = b^2$
3. $3^{x^2-3xy} 3^{2x+5} = 3^{x^2-3xy+2x+5}$
4. $(10e)^{2x} = 10^{2x} e^{2x}$
5. $10^{x+a} 10^{x-a} = 10^{x+a+x-a} = 10^{2x}$
6. $(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b}$
7. $e^{(a+b)^2} = e^{a^2+2ab+b^2}$
8. $\left(\frac{e^{-2x^2}}{10^{x-2}}\right)^{x^2} = \frac{(e^{-2x^2})^{x^2}}{(10^{x-2})^{x^2}} = \frac{e^{-2x^4}}{10^{(x-2)(x^2)}} = \frac{1}{10e^{2x^4}}$
9. $e^{x^2-3} e^{2x^2+5} = e^{x^2-3+2x^2+5} = e^{3x^2+2}$
10. $(\pi^{-2x} e^2 \pi)^{2x} = (\pi^{-2x})^{2x} (e^2)^{2x} (\pi)^{2x} = \pi^{-4x^2} e^{4x} \pi^{2x} = \pi^{-4x^2+2x} e^{4x}$

Ejemplo 143 *Factorización de expresiones con exponenciales.*

1. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = x^3 e^{-3x} (4 - 3x)$
2. $3xe^x + x^2 e^x = xe^x (3 + x)$
3. $e^x + 2e^{-x} e^{-x} (e^{2x} + 2)$
4. $x^2 10^x - x 10^x = x 10^x (x - 1)$

5. $x^2e^x + xe^x - e^x = e^x (x^2 + x - 1)$

6.

$$\begin{aligned}\frac{e^x (x^2 - x - 6)}{(x + 2) e^{2x-3}} &= \frac{e^x (x + 2) (x - 3)}{(x + 2) e^{2x-3}} \\ &= (x - 3) e^x e^{-(2x-3)} \\ &= (x - 3) e^x e^{3-2x} \\ &= (x - 3) e^{3-x}\end{aligned}$$

Ejercicio 61 Simplifique las expresiones algebraicas exponenciales siguientes.

1. $2e^x - 2x$

2. $x^3e^x + 3x^2e^x$

3. $\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}}$

4. $\frac{(e^x + 1) - e^xe^x}{(e^x + 1)^2}$

5. $-4e^{-4x} + 6e^{3x}$

6. $16e^{-4x} + 18e^{3x}$

7. $\frac{1}{2}t^{-1/2}e^{-2t} - 2t^{1/2}e^{-2t}$

8. $-2e^{-2x} - 2(1 - 2x)e^{-2x}$

9. $\frac{10^{-x}(4x^2 - 16)}{4(x + 2)10^{x+2x^2}}$

9.1.3 Cálculos Numéricos con Exponenciales

En la tabla siguiente se presenta algunos valores de la expresión exponencial 2^x para diferentes valores de la variable x ,

x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
2^x	2^{-9}	2^{-8}	2^{-7}	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0
	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^0}$
	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^x	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

con la tabla anterior y las leyes de los exponentes se realizan cálculos de una forma simple, estos ejemplos pretenden ser un preámbulo al conocimiento de los logaritmos. Observe la tabla y note que los números menores de la unidad, por ejemplo, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{256}$, etc., su representación exponencial con base 2 tienen exponentes negativos y los números mayores que la unidad, por ejemplo, 8, 256, etc., exponentes positivos; note también que no se obtiene un valor negativo cuando la expresión algebraica exponencial es evaluada para cualquier número real.

Ejemplo 144 Efectúe los cálculos numéricos siguientes con apoyo solo de la tabla anterior.

1.

$$\frac{(64)(32)}{1024} = \frac{2^6 2^5}{2^{10}} = 2^{6+5-10} = 2$$

2.

$$\left(\frac{1}{512}\right)(128) = 2^{-9}2^7 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1}{2^7}\right)(2^{-2})(-2048) &= (-2^{-7})(2^{-2})(-2^{11}) = 2^{-7-2+11} \\ &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{-11}}2^{20}\left(\frac{2}{8}\right)^{12} &= 2^{11}2^{20}\left(\frac{2}{2^3}\right)^{12} \\ &= 2^{11}2^{20}\frac{2^{12}}{2^{36}} = 2^{11+20+12-36} \\ &= 2^7 = 128\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{-1}{16}\right)\sqrt{256}(16^{-1})}{(\sqrt{1024})(2048)^{-1}} &= \frac{-2^{-4}(2^8)^{1/2}2^{-4}}{(2^{10})^{1/2}2^{-11}} \\ &= \frac{-2^{-4+4-4}}{2^{5-11}} = -2^{-4+6} \\ &= -2^2 = -4\end{aligned}$$

Como se muestra en los ejemplos anteriores, los cálculos numéricos pueden ser simples, siempre y cuando cualquier número positivo involucrado en las operaciones de multiplicación, división y potencia pueda ser expresado en forma exponencial con una base en común, de tal forma que las operaciones se conviertan en sumas, restas y multiplicación de exponentes.

9.2 Expresiones Algebraicas Logarítmicas

En la tabla siguiente se encuentran tabulados algunos valores numéricos para la expresión exponencial 2^x :

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^x	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
2^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

algunas preguntas que se pueden plantear y contestar con ayuda de la tabla anterior son las siguientes.

1. ¿Cuál es el exponente al que se debe elevar la base 2 para obtener el número 32? La respuesta es: 5, porque,

$$2^5 = 32$$

2. ¿Cuál es el exponente al que se debe elevar la base 2 para obtener el número 2? La respuesta es: 1, porque,

$$2^1 = 2$$

3. ¿Cuál es el exponente al que se debe elevar la base 2 para obtener el número 1? La respuesta es: 0, porque,

$$2^0 = 1$$

4. ¿Cuál es el exponente al que se debe elevar la base 2 para obtener el número $\frac{1}{64}$? La respuesta es: -6 , porque,

$$2^{-6} = \frac{1}{64}$$

5. Generalizando, ¿cuál es el exponente al que se debe elevar la base a para obtener un número dado, digamos y ? La respuesta es: x , porque,

$$a^x = y$$

De una manera formal, una pregunta equivalente a la anterior que es la misma respuesta es,

1. ¿Cuál es el **logaritmo** del número 32 con base 2? La respuesta es: 5, porque,

$$2^5 = 32$$

2. ¿Cuál es el **logaritmo** del número 2 con base 2? La respuesta es: 1, porque,

$$2^1 = 2$$

3. ¿Cuál es el **logaritmo** del número 1 con base 2? La respuesta es: 0, porque,

$$2^0 = 1$$

4. ¿Cuál es el **logaritmo** del número $\frac{1}{64}$ con base 2? La respuesta es: -6 , porque,

$$2^{-6} = \frac{1}{64}$$

5. Generalizando ¿cuál es el **logaritmo** del número y con base a ? La respuesta es: x , porque,

$$a^x = y$$

Se entiende entonces que el **logaritmo** de un número positivo y , con base a , denotado por,

$$\log_a y$$

es el exponente x , al que hay que elevar la base a , para obtener el número y , esto es, formalmente,

$$\log_a y = x \quad \text{porque} \quad a^x = y$$

En el lenguaje simbólico la pregunta es simple, tal como:

1. ¿ $\log_2 32$?

$$\log_2 32 = 5 \quad \text{porque} \quad 2^5 = 32$$

2. ¿ $\log_2 2$?

$$\log_2 2 = 1 \quad \text{porque} \quad 2^1 = 2$$

3. ¿ $\log_2 1$?

$$\log_2 1 = 0 \quad \text{porque} \quad 2^0 = 1$$

4. ¿ $\log_2 \frac{1}{64}$?

$$\log_2 \frac{1}{64} = -6 \quad \text{porque} \quad 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

5. ¿ $\log_a y$?

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Reafirmando, se tiene que, $\log_a y$ **es el exponente** (x) **al cual se debe elevar la base** a **para obtener** y .

$$\underbrace{\log_a y = x}_{\text{Forma logarítmica}} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = y}_{\text{Forma exponencial}}$$

El esquema anterior es importante porque permite ver el intercambio de la forma logarítmica a la forma exponencial, hecho importante para resolver ecuaciones que involucren a la incógnita en el logaritmo o en el exponencial.

Por definición, se tiene entonces una propiedad importante de los logaritmos:

$$a^{\log_a y} = y$$

Ejemplo 145 La expresión $a^{\log_a y} = y$, puede aclarar su significado en los ejemplos siguientes.

1. $10^{\log_{10} x} = x$

2. $7^{\log_7 x} = x$

3. $e^{\log_e x} = x$

4. $6^{\log_6 (x^2+1)} = x^2 + 1$

5. $5^{\log_5 \sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{x+1}$

El concepto de logaritmo puede ser aplicado a un número o a una expresión algebraica, por ejemplo,

$$\log_3 (x^2 + 1), \quad \log_7 \left(\frac{x^3}{x+1} \right), \quad \log_{10} (\sqrt{3x^2 + 1})$$

donde las expresiones algebraicas $(x^2 + 1)$, $\left(\frac{x^3}{x+1} \right)$, $(\sqrt{3x^2 + 1})$ se identifican como el *argumento* del logaritmo. El argumento del logaritmo se identifica fácilmente. En forma general,

$$\log_a (\text{expresión algebraica}) = \log_a (\text{argumento})$$

Ejemplo 146 En las siguientes expresiones logarítmicas identifique el argumento.

1. $\log_a x$, el argumento es x .
2. $\log_a (3x^2 + 2x)$, el argumento es $3x^2 + 2x$.
3. $\log_a \frac{x^3 \sqrt{3x^2 + 2}}{(x-1)(x+2)}$, el argumento es $\frac{x^3 \sqrt{3x^2 + 2}}{(x-1)(x+2)}$.
4. $\log_a \left(\frac{x^2 (x-1)^2}{x+2} \right)$, el argumento es $\frac{x^2 (x-1)^2}{x+2}$.
5. $\log_a x^2 + 3x$, el argumento es x^2 .

Ejemplo 147 El argumento de una expresión logarítmica puede ser simplificado, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \log_a \frac{(x^3 - 1)(x^2 - 4)}{(x-1)(x+2)} &= \log_a \frac{(x-1)(x+x^2+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \log_a (x+x^2+1)(x-2) \end{aligned}$$

9.2.1 Logaritmos con Bases Comunes

La base de logaritmo que se utilizan frecuentemente es $a = 10$ y $a = e$, esto da lugar a dos tipos de logaritmos, el *logaritmo común*, *decimal* o *base 10* el cual se denota omitiendo la base,

$$\log x = \log_{10} x$$

y el *logaritmo natural* o *base e* el cual se denota por,

$$\ln x = \log_e x$$

Ejemplo 148 Expresa la ecuación en forma exponencial.

$$1. \log_3 81 = 4$$

$$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$$

$$2. \ln y = 5$$

$$\ln y = 5 \Leftrightarrow e^5 = y$$

$$3. \log_8 512 = 3$$

$$\log_8 512 = 3 \Leftrightarrow 8^3 = 512$$

$$4. \ln(x-1) = 4$$

$$\ln(x-1) = 4 \Leftrightarrow e^4 = x-1$$

$$5. \ln(x+1) = 2$$

$$\ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow e^2 = x+1$$

$$6. \log_{16} 4 = \frac{1}{2}$$

$$\log_{16} 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 16^{1/2} = 4$$

7. $\log x = 2$

$$\log x = 2 \Leftrightarrow 10^2 = x$$

8. $\log(x - 1) = 4$

$$\log(x - 1) = 4 \Leftrightarrow 10^4 = x - 1$$

Ejemplo 149 *Expresa la ecuación en forma logarítmica.*

1. $e^x = 2$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow \ln 2 = x$$

2. $e^{x+1} = \frac{1}{2}$

$$e^{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} = x + 1$$

3. $10^3 = 1000$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$

4. $10^{-4} = 0.0001$

$$10^{-4} = 0.0001 \Leftrightarrow \log 0.0001 = -4$$

5. $81^{1/2} = 9$

$$81^{1/2} = 9 \Leftrightarrow \log_{81} 9 = \frac{1}{2}$$

6. $e^3 = y$

$$e^3 = y \Leftrightarrow \ln y = 3$$

7. $e^{0.5x} = t$

$$e^{0.5x} = t \Leftrightarrow \ln t = 0.5x$$

Ejemplo 150 *Evalúe los logaritmos siguientes.*

1. $\log_4 8$

Sea $\log_4 8 = u$, entonces,

$$\log_4 8 = u \Leftrightarrow 4^u = 8$$

luego, escribiendo la expresión exponencial con la misma base,

$$\begin{aligned} (2^2)^u &= 2^3 \\ 2^{2u} &= 2^3 \end{aligned}$$

aplicando la propiedad de los exponentes,

$$a^x = a^y, \text{ si y solo si } x = y$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} 2u &= 3 \\ u &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\log_4 8 = \frac{3}{2}$$

2. $\log_{\sqrt{8}} 16$

Se tiene que $\log_{\sqrt{8}} 16 = u$, luego,

$$\log_{\sqrt{8}} 16 = u \Leftrightarrow (\sqrt{8})^u = 16$$

está ecuación se puede expresar,

$$\begin{aligned} \left((2^3)^{1/2}\right)^u &= 2^4 \\ 2^{3u/2} &= 2^4 \\ \frac{3u}{2} &= 4 \\ u &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

se obtiene finalmente,

$$\log_{\sqrt{8}} 16 = \frac{8}{3}$$

3. $\log_{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right)$

Se tiene que $\log_{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right) = u$

$$\log_{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right) = u \Leftrightarrow (\sqrt[3]{32})^u = \frac{1}{\sqrt[5]{16}}$$

está ecuación se puede expresar,

$$\begin{aligned} \left((2^5)^{1/3}\right)^u &= (2^4)^{-1/5} \\ 2^{5u/3} &= 2^{-4/5} \\ \frac{5u}{3} &= -\frac{4}{5} \\ u &= -\frac{12}{25} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\log_{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right) = -\frac{12}{25}$$

Ejercicio 62 Use la definición de logaritmo para hallar x .

1. $\log_2 x = 5$

2. $\log_2 16 = x$

3. $\log_5 x = 4$

4. $\log 0.1 = x$

5. $\log_3 243 = x$

6. $\log_3 x = 3$

7. $\log_4 2 = x$

8. $\log_4 x = 2$

9. $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

10. $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

Ejercicio 63 Evalúe las operaciones siguientes.

1. $\log_5 625 - \log_5 125$
2. $\log_2 192 - \log_2 3$
3. $\log_{12} 3 + \log_{12} 48$
4. $\log_2 81^{22}$
5. $\log 5 + \frac{1}{4} \log 8 - \log 4$

Propiedades Fundamentales de los Logaritmos

1. El logaritmo de "1" en cualquier base es "0".
 $\log_a 1 = 0$; $\log 1 = 0$; $\ln 1 = 0$
2. El logaritmo de la base es "1".
 $\log_a a = 1$; $\log 10 = 1$; $\ln e = 1$
3. El logaritmo de la base elevado a cualquier potencia es igual al exponente.
 $\log_a a^x = x$; $\log 10^x = x$; $\ln e^x = x$
4. Por definición, $\log_a x$ es el exponente al que debe ser elevado a para obtener x .
 $a^{\log_a x} = x$; $10^{\log 10^x} = x$; $e^{\ln e^x} = x$

Leyes de los Logaritmos

Sea $a > 0$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Sea $A > 0$, $B > 0$ y r cualquier número real, se tiene,

1. $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$
El logaritmo del producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B$
El logaritmo del cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a (A^r) = r \log_a A$
El logaritmo de la potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Errores típicos

Tenga cuidado con las expresiones siguientes.

1. No confunda la expresión,

$$\log_a (A + B)$$

con la expresión,

$$\log_a A + \log_a B$$

No se aplica la ley distributiva al argumento de una expresión logarítmica, es decir, es **falso** que,

$$\log_a (A + B) = \log_a A + \log_a B$$

2. No confunda la expresión,

$$\log_a (A - B)$$

con la expresión,

$$\log_a A - \log_a B$$

Es **falso** que,

$$\log_a (A - B) = \log_a A - \log_a B$$

3. No confunda la expresión,

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right)$$

con la expresión,

$$\frac{\log_a A}{\log_a B}$$

Es **falso** que,

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{\log_a A}{\log_a B}$$

4. No confunda la expresión

$$\log_a (A^r)$$

con la expresión,

$$(\log_a A)^r$$

es **falso** que,

$$(\log_a A)^r = r \log_a A$$

el significado correcto de esta última expresión, si r es entero, es,

$$(\log_a A)^r = \underbrace{\log_a A \log_a A \cdots \log_a A}_{r \text{ veces}} = \log_a^r A$$

por ejemplo,

$$(\log_a A)^2 = (\log_a A) (\log_a A) = \log_a^2 A$$

y

$$\log_a A^2 = 2 \log_a A$$

Una expresión logarítmica se puede presentar en forma compacta (combinada) o expandida (desarrollada) al aplicar las propiedades de los logaritmos, en los ejemplos siguientes se presentan ambas formas y se muestra como se aplican estas propiedades.

Ejemplo 151 Utilice las leyes de los logaritmos para expandir o desarrollar las expresiones siguientes.

- 1.

$$\begin{aligned} \underbrace{\log x^3 y^6}_{\text{Forma compacta}} &= \log x^3 + \log y^6 \\ &= \underbrace{3 \log x + 6 \log y}_{\text{Forma expandida}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\log \frac{ab}{\sqrt[3]{c}} &= \log ab - \log \underbrace{\sqrt[3]{c}}_{c^{1/3}} \\ &= \log a + \log b - \frac{1}{3} \log c\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)} \right) &= \underbrace{\log 10^x}_{\log 10^x = x} - \log [x(x^2+1)(x^4+2)] \\ &= x - [\log x + \log(x^2+1) + \log(x^4+2)] \\ &= x - \log x - \log(x^2+1) - \log(x^4+2)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\ln \sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}} &= \ln \left[\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x^2+4) - \ln(x^2+1) - 2\ln(x^3-7)] \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x^2+4) - (\ln(x^2+1) + 2\ln(x^3-7))] \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln(x^3-7)\end{aligned}$$

Ejemplo 152 Utilice las leyes de los logaritmos para compactar o combinar las expresiones siguientes.

1.

$$\begin{aligned}\underbrace{4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)}_{\text{Forma expandida}} &= \log x^4 - \log(x^2+1)^{1/3} + \log(x-1)^2 \\ &= \underbrace{\log \left(\frac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right)}_{\text{Forma compacta}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}3\log s + \frac{1}{2}\log t - 4\log(t^2+1) &= \log s^3 + \log t^{1/2} - \log(t^2+1)^4 \\ &= \log \frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\end{aligned}$$

3.

$$\frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}[\ln(x-4) - \ln(x^4-x^2-1)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \frac{(2x+1)^{1/3} (x-4)^{1/2}}{(x^4-x^2-1)^{1/2}} \\
 &= \ln \left(\frac{\sqrt[3]{(2x+1)} \sqrt{x-4}}{\sqrt{x^4-x^2-1}} \right) \\
 &= \ln \left(\sqrt[3]{(2x+1)} \sqrt{\frac{x-4}{x^4-x^2-1}} \right)
 \end{aligned}$$

4. $x - \ln(1 + e^x)$

$$\begin{aligned}
 x - \ln(1 + e^x) &= x \underbrace{\ln e}_{\ln e=1} - \ln(1 + e^x) \\
 &= \ln e^x - \ln(1 + e^x) \\
 &= \ln \frac{e^x}{(1 + e^x)}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 64 Utilice las leyes de los logaritmos para expandir las expresiones siguientes.

7. $\log_4 \left(\frac{x^4}{4} \right)$

1. $\log_2(5/x)$

8. $\ln \left(\frac{x^3}{y^3 \sqrt[3]{z}} \right)$

2. $\ln(e/x)$

3. $\log_{11} \sqrt[3]{10}$

9. $\ln \frac{e^{3x} \sqrt{x^2+1}}{x^3 + y^3}$

4. $\log_3(x/y^7)$

5. $\ln x(x+1)(x+2)$

6. $\log_a \left(\frac{x}{y^3 z^2} \right)$

10. $\log_3 \left(\frac{1^{5x-1}}{x(x-1) \sqrt[3]{x-1}} \right)$

Ejercicio 65 Encuentre la forma compacta de las expresiones siguientes.

1. $\log(x^2 - 4) + \log(x + 2) - \log(x^4 - 8x + 16)$

2. $(x^2 + 1) \ln x$

3. $\frac{3}{2} \ln x - 2 \ln(1 + x^2)$

4. $\log(x^3 - 16x) + \log(x^2 + 10x + 25) - \log(x^5 - 41x^3 + 400x)$

5. $\ln x - x^2$

6. $x - \log x - \log(x^2 + 1) - \log(x^4 + 2)$

7. $\frac{1}{3} \log(2x + 1) + \frac{1}{2} [\log(x - 4) - \log(x^4 - x^2 - 1)]$

8. $\frac{1}{3} \log(x^2 - 4) - \log(x + 2)$

9. $\frac{1}{2} \log(x + 1) - \log(x^2 + 1)$

10. $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2 + 1) + 2 \log(x - 1)$

Ejercicio 66 Aplicando las leyes de logaritmos y dado que $\log_a x = 2$ y $\log_a y = 3$, determine:

1. $\log_a (xy)$
2. $\log_a \left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\log_a (\sqrt[3]{x} \sqrt[5]{y})$
4. $\log_a (x^{\log_a (y^3)})$

Fórmula de Cambio de Base

El cálculo del logaritmo de un número con base 10 y con base e está incluido directamente en todas las calculadoras científicas, cuando se desea calcular el logaritmo de un número con base diferente a las anteriores, esto es, una base no común, se recurre a lo que se conoce como cambio de base.

Sea por ejemplo, a la base común y sea b la base no común, se desea determinar el logaritmo del número N en base b , esto es, $\log_b N$.

Se propone que x sea ese valor del logaritmo, esto es,

$$\log_b N = x$$

luego,

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

a partir de la ecuación en forma exponencial y tomando logaritmo con base a en ambos lados de la ecuación, aplicando las propiedades de los logaritmos, se tiene,

$$\begin{aligned} \log_a b^x &= \log_a N \\ x \log_a b &= \log_a N \Leftrightarrow x = \frac{\log_a N}{\log_a b} \\ \log_b N &= \frac{\log_a N}{\log_a b} = \frac{\log N}{\log b} = \frac{\ln N}{\ln b} \end{aligned}$$

Esto es, el logaritmo de cualquier número N en base no común (b) es igual al logaritmo de N con base común (a) dividido entre el logaritmo de b en términos del logaritmo de base a . El ejemplo siguiente aclara la utilidad de esta fórmula.

Ejemplo 153 Determine el logaritmo de 250 con base 5.

Se tiene $N = 250$, base no común $b = 5$; base común $a = 10$. Aplicando la fórmula de cambio de base,

$$\begin{aligned} \log_5 250 &= \frac{\log 250}{\log 5} \\ &= \frac{2.3979}{0.69897} \\ \log_5 250 &= 3.4306 \end{aligned}$$

el mismo resultado es obtenido si se utiliza otra base de logaritmo, por ejemplo.

$$\begin{aligned} \log_5 250 &= \frac{\ln 250}{\ln 5} \\ &= \frac{5.5215}{1.6094} \\ \log_5 250 &= 3.4308 \end{aligned}$$

Ejercicio 67 Utilice la fórmula de cambio de base para calcular los logaritmos siguientes.

1. $\log_6 3.58$

2. $\log_{91} 9$

3. $\log_2 6$

4. $\log_{\sqrt[5]{3}} 100$

5. $\log_2 3e$

6. $\log_{40} \left(\frac{1}{2\sqrt{10}} \right)$

7. $\log_2 10^5$

8. $\log_{\sqrt{8}} 16$

9. $\log_{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{16}} \right)$

10. $\log_{\sqrt[4]{16}} \left(\frac{3}{9} \right)$

9.3 Ecuaciones Exponencial y Logarítmicas

En una ecuación exponencial o logarítmica la variable o incógnita forma parte del argumento de la expresión logarítmica o exponencial, algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son,

$$\begin{aligned} 2^{2x} &= 16 \\ 10^{2x+1} + 3 &= 0 \\ e^{-2x} (x^2 - 1) &= 0 \\ \log_3 (3x^2 + 1) - 3 &= 9 \\ \log (x - 1) (x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

al resolver este tipo de ecuaciones se debe tener presente la equivalencia,

$$\underbrace{\log_a x = y}_{\text{Forma logarítmica}} \Leftrightarrow \underbrace{a^y = x}_{\text{Forma exponencial}}$$

o para recordar,

$$\log_{\text{base}} \text{argumento} = \text{exponente} \Leftrightarrow \text{base}^{\text{exponente}} = \text{argumento}$$

9.3.1 Ecuaciones Exponenciales

La idea principal al resolver ecuaciones exponenciales es aislar la expresión exponencial que contiene la incógnita de un lado de la ecuación, convertir la ecuación exponencial a su forma logarítmica con la equivalencia anterior, el propósito de este proceso es "bajar" la incógnita del exponente y despejarla. Un método alternativo implica tomar el logaritmo a ambos lados de la ecuación, aplicar las leyes de los logaritmos y finalmente despejar la incógnita; los ejemplos siguientes aclaran este proceso.

Ejemplo 154 Resuelva la ecuación exponencial y pruebe la validez de la solución obtenida.

1. $1 + 6^{5x} = 9,$

$$\begin{array}{ll}
1 + 6^{5x} = 9 & \text{Aislar el exponencial} \\
6^{5x} = 9 - 1 & \text{Simplificar} \\
6^{5x} = 8 & \text{Convertir la ecuación a la forma logarítmica} \\
6^{5x} = 8 \Leftrightarrow \log_6 8 = 5x & \text{Despejar la incógnita} \\
x = \frac{\log_6 8}{5} & \text{Para evaluar, cambio de base} \\
x = \frac{1 \log 8}{5 \log 6} &
\end{array}$$

La comprobación se lleva a cabo en la ecuación original, así se tiene,

$$1 + 6^{5x} = 9$$

evaluando primero el término $5x$, se tiene,

$$5 \left(\frac{\log_6 8}{5} \right) = \log_6 8$$

$$\begin{array}{rcl}
1 + 6^{\log_6 8} & = & 9 \\
1 + 8 & = & 9
\end{array}$$

2. $1 + 6^{5x} = 9$. Un método alternativo para resolver la ecuación exponencial es el siguiente.

$$\begin{array}{ll}
1 + 6^{5x} = 9 & \text{Aislar el exponencial} \\
6^{5x} = 9 - 1 & \text{Simplificar} \\
6^{5x} = 8 & \text{Tomar el log a ambos lados de la ecuación} \\
\log 6^{5x} = \log 8 & \text{Aplicar las leyes de los logaritmos} \\
5x \log 6 = \log 8 & \text{Despejar la incógnita} \\
x = \frac{1 \log 8}{5 \log 6} &
\end{array}$$

El logaritmo que se aplique para bajar la incógnita del exponencial puede ser $\log$ o $\ln$.

$$3. e^{(1-4x)} - 2 = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
e^{(1-4x)} & = & 2 \\
\ln 2 & = & 1 - 4x \\
1 - \ln 2 & = & 4x \\
x & = & \frac{1 - \ln 2}{4}
\end{array}$$

al comprobar en la ecuación original, evaluando primero el argumento de la función exponencial,

$$(1 - 4x) = 1 - 4 \left(\frac{1 - \ln 2}{4} \right) = 1 - 1 + \ln 2 = \ln 2$$

al sustituir este valor se tiene,

$$e^{\ln 2} = 2$$

$$4. -70 = -80 (1 - e^{-0.2t})$$

$$\begin{aligned}\frac{70}{80} &= 1 - e^{-0.2t} \\ -\frac{1}{8} &= -e^{-0.2t} \\ \ln \frac{1}{8} &= \ln e^{-0.2t} \\ \ln \frac{1}{8} &= -0.2t \\ t &= \frac{1}{-0.2} \ln \frac{1}{8} \\ t &= 5 \ln 8\end{aligned}$$

$$5. e^{-3x} = 0$$

$$\begin{aligned}e^{-3x} &= 0 \\ \ln e^{-3x} &= \underbrace{\ln 0}_{\text{no existe}}\end{aligned}$$

la ecuación no tiene solución. Cualquier ecuación exponencial del tipo,

$$a^{\text{argumento}} = 0$$

no tiene solución real o $a^{\text{argumento}}$ no puede ser cero.

$$6. 4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$$

$$\begin{aligned}\underbrace{4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x}}_{\text{factorizar}} &= 0 \\ x^3 e^{-3x} (4 - 3x) &= 0 \\ e^{-3x} \underbrace{x^3 (4 - 3x)}_{\text{factores nulos}} &= 0\end{aligned}$$

e^{-3x} no puede ser cero

$$\begin{aligned}x^3 &= 0 \rightarrow x = 0 \\ (4 - 3x) &= 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Otra forma de resolver es, como $e^{-3x} \neq 0$, se puede dividir toda la ecuación original entre e^{-3x} , se obtiene,

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x^4 &= 0 \\ x^3 (4 - 3x) &= 0\end{aligned}$$

dando la misma solución.

Comprobación:

Para $x = 0$

$$\begin{aligned}4(0)^3 e^{-3(0)} - 3(0)^4 e^{-3(0)} &= 0 \\ 4(0) 1 - 3(0) 1 &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Para $x = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{4}{3} \right)^3 e^{-3(4/3)} - 3 \left(\frac{4}{3} \right)^4 e^{-3(4/3)} &= 0 \\ \frac{256}{27} (e^{-4}) - \frac{256}{27} (e^{-4}) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

lo cual prueba que ambas soluciones satisfacen la ecuación.

7. $x^2 10^x - x 10^x = 2(10^x)$

Ya que $10^x \neq 0$, se divide toda la ecuación entre 10^x ,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 10^x - x 10^x}{10^x} &= \frac{2(10^x)}{10^x} \\ x^2 - x &= 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ (x+1) &= 0 \rightarrow x = -1 \\ (x-2) &= 0 \rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

Para $x = -1$

$$\begin{aligned} (-1)^2 10^{-1} - (-1) 10^{-1} &= 2(10^{-1}) \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10} &= \frac{1}{5} \\ \frac{2}{10} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Para $x = 2$

$$\begin{aligned} (2)^2 10^2 - (2) 10^2 &= 2(10^2) \\ 400 - 200 &= 200 \end{aligned}$$

lo cual prueba que ambas soluciones satisfacen la ecuación.

8. $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

En este tipo de ecuaciones no es posible aislar el exponencial, ya que existe un término constante. En este caso el proceso conveniente se describe a continuación.

Multiplique la ecuación por e^x , para cancelar e^{-x}

$$e^x (e^x - 12e^{-x} - 1 = 0)$$

reescribiendo la ecuación,

$$\begin{aligned} e^{2x} - 12 - e^x &= 0 \\ e^{2x} - e^x - 12 &= 0 \\ (e^x)^2 - e^x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

con el cambio de variable $z = e^x$ se obtiene una ecuación cuadrática en términos de z que puede ser resuelta por factorización,

$$\begin{aligned} z^2 - z - 12 &= 0 \\ (z - 4)(z + 3) &= 0 \\ (z - 4) &= 0 \rightarrow z = 4 \\ (z + 3) &= 0 \rightarrow z = -3 \end{aligned}$$

en términos del exponencial, e^x , se tiene,

$$\begin{aligned} z &= 4 \rightarrow e^x = 4 \rightarrow x = \ln 4 \\ z &= -3 \rightarrow e^x = -3 \rightarrow x = \ln(-3) \end{aligned}$$

cuya única solución es $x = \ln 4$, ya que $\ln(-3)$ no existe.

Comprobación:

Para $x = \ln 4$

$$\begin{aligned} e^x - 12e^{-x} - 1 &= 0 \\ e^{\ln 4} - 12e^{-\ln 4} - 1 &= 0 \\ e^{\ln 4} - 12e^{\ln(1/4)} - 1 &= 0 \\ 4 - 12\left(\frac{1}{4}\right) - 1 &= 0 \\ 4 - 3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

lo cual verifica la solución obtenida.

Ejercicio 68 Resolver las ecuaciones exponenciales y comprobar la solución obtenida.

1. $10^x = 25$

2. $e^{-2x} = 7$

3. $2^{1-x} = 3$

4. $4 + 3^{5x} = 8$

5. $e^{3x} = 12$

6. $3^{2x-1} = 5$

7. $2e^{12x} = 17$

8. $2^{x^2-2x} = 8$

9. $5^{x+1} = 12$

10. $(3^x)^{x-2} = 81$

11. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 7$

12. $7^{2x} = 7$

13. $3xe^x + x^2e^x = 0$

14. $e^x + 2e^{-x} = 3$

15. $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$

16. $e^x - 6e^{-x} = 1$

9.3.2 Ecuaciones Logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo; para resolver este tipo de ecuaciones es necesario aislar los términos de logaritmo en un lado de la ecuación, enseguida obtener la forma compacta de la expresión logarítmica aislada, obtener la forma exponencial de la ecuación y resolver para la variable o incógnita de interés, finalmente verificar la solución obtenida.

Ejemplo 155 Resuelva las ecuaciones logarítmicas siguientes.

1. $\log_2(x - 3) - 3 = 0$

$$\log_2(x - 3) = 3$$

Aislar el término logarítmico

$$\log_2(x - 3) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x - 3$$

Obtener la forma exponencial

$$x = 2^3 + 3 = 11$$

Despejar la incógnita

Comprobación:

Para $x = 11$

$$\log_2(x - 3) - 3 = 0$$

$$\log_2(11 - 3) - 3 = 0$$

$$\log_2 8 - 3 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

2. $\log_2(x - 3) - \log_2(x - 5) - 1 = 0$

$$\log_2(x - 3) - \log_2(x - 5) = 1$$

Aislar los términos con logaritmo

$$\log_2 \frac{x - 3}{x - 5} = 1$$

El término logarítmico en forma compacta

$$\log_2 \frac{x - 3}{x - 5} = 1 \Leftrightarrow 2^1 = \frac{x - 3}{x - 5}$$

Obtener la forma exponencial

$$x - 3 = 2(x - 5)$$

Despejar la incógnita

$$x - 3 = 2x - 10$$

$$x = 7$$

Comprobación:

Para $x = 7$

$$\log_2(x - 3) - \log_2(x - 5) - 1 = 0$$

$$\log_2(7 - 3) - \log_2(7 - 5) - 1 = 0$$

$$\log_2 4 - \log_2 2 - 1 = 0$$

$$2 - 1 - 1 = 0$$

lo cual verifica que $x = 7$ es solución de la ecuación dada.

3. $\log_x(x + 6) = 2$

$$\log_x(x + 6) = 2$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$$

$$(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$$

El valor de $x = -2$ no cumple con la definición de logaritmo, la base no puede ser negativa.

Comprobación:

Para $x = 3$

$$\log_x (x + 6) = 2$$

$$\log_3 (3 + 6) = 2$$

$$\log_3 9 = 2$$

Lo cual verifica que la única solución de la ecuación es $x = 3$.

4. $\log_7 (6x + 1) + \log_7 (x + 2) = 1$

$$\log_7 (6x + 1) + \log_7 (x + 2) = 1$$

$$\log_7 (6x + 1) (x + 2) = 1$$

$$7^1 = (6x + 1) (x + 2)$$

$$6x^2 + 13x - 5 = 0$$

$$(2x + 5) (3x - 1) = 0$$

$$(2x + 5) = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$(3x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Comprobación:

si $x = -\frac{5}{2}$, el argumento del logaritmo es negativo

$x = \frac{1}{3}$, ambas expresiones $\log_7 (6x + 1)$ y $\log_7 (x + 2)$ existen. La única solución de la ecuación

$$\log_7 (6x + 1) + \log_7 (x + 2) = 1$$

es $x = \frac{1}{3}$.

5. $\log_x (x + 4) + 2 \log_x (x - 3) - \log_x (x - 2) = 2$

$$\log_x (x + 4) + 2 \log_x (x - 3) - \log_x (x - 2) = 2$$

$$\log_x (x + 4) + \log_x (x - 3)^2 - \log_x (x - 2) = 2$$

$$\log_x (x + 4) (x - 3)^2 - \log_x (x - 2) = 2$$

$$\log_x \frac{(x + 4) (x - 3)^2}{x - 2} = 2$$

$$\frac{(x + 4) (x - 3)^2}{x - 2} = x^2$$

$$(x + 4) (x - 3)^2 = x^2 (x - 2)$$

$$(x + 4) (x^2 - 6x + 9) = x^3 - 2x^2$$

$$-15x + 36 = 0$$

$$x = \frac{12}{5}$$

Comprobación:

Si $x = \frac{12}{5}$, en la expresión

$$2 \log_x (x - 3)$$

el argumento es negativo, el logaritmo no está definido. La ecuación no tiene solución.

Ejercicio 69 Resolver las ecuaciones logarítmicas y comprobar la solución obtenida.

1. $\log(3x + 5) = 2$

2. $2 - \ln(3 - x) = 0$

3. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

4. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

5. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

6. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

7. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

8. $\log_x(x + 4) + 2 \log_x(x - 3) - \log_x(x - 2) = 2$

9. $2 \log x = 6 \log 2$

Capítulo 10

Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Un sistema de ecuaciones no lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal, por ejemplo,

$$\begin{aligned}Ax^n + By^m + C &= 0 \\ Dx^r + Ey^s + F &= 0\end{aligned}$$

es un sistema *no lineal* de dos ecuaciones con dos incógnitas en las variables x, y ; si al menos uno de los exponentes: n, m, r , o s , es diferente de "1"; donde A, B, C, D, E y F son números reales. La solución de este sistema de ecuaciones es un par ordenado (x, y) que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineal, se puede recurrir al método gráfico o a un método algebraico, como los vistos en el Capítulo 8. Para aplicar el método gráfico utilizaremos *GeoGebra*.

10.1 Gráficas de Ecuaciones con *GeoGebra*

Algunas comandos básicos de *GeoGebra* ya se han revisado en los Capítulos 7 y 8.

Ejemplo 156 *Utilizando GeoGebra determine la solución por el método gráfico del sistema de ecuaciones no lineales siguiente.*

$$\begin{aligned}-x^2 + 4x - y &= -8 \\ x^2 - 2x - y &= 0\end{aligned}$$

Dar clic en el ícono  de GeoGebra. Teclear en el campo .

1. $-x^2 + 4x - y = -8$ dar enter, se desplegara la gráfica en la Vista Gráfica.
2. $x^2 - 2x - y = 0$ dar enter, se desplegara la gráfica en la Vista Gráfica.
3. Dar clic en el ícono  y seleccionar el ícono de intersección .
4. En la Vista Gráfica, seleccionar y dar clic a cada una de las gráficas, en la Vista Algebraica se desplegara la solución o intersecciones de ambas gráficas, etiquetada con los puntos A y B, como se muestra en la Figura 38.

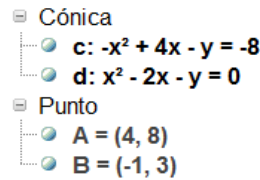


Figura 38. Vista Algebraica, Ejemplo 156.

La gráfica del sistema se muestra en la Figura 39

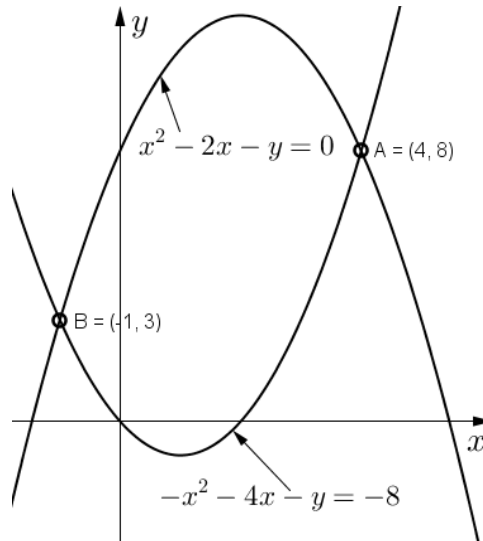


Figura 39. Solución gráfica, Ejemplo156.

5. GeoGebra acepta como entradas de ecuaciones sus formas explícitas, esto es, despejadas para y , o sus formas implícitas como se dan en este ejemplo. La forma explícita de este sistema de ecuaciones no lineales, que es aceptada en la entrada de GeoGebra es,

$$y = -x^2 + 4x + 8$$

$$y = x^2 - 2x$$

Las gráficas y la solución de los sistemas de ecuaciones no lineales que se dan más adelante se generaron mediante *GeoGebra*.

10.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales

10.2.1 Método Gráfico

Cada ecuación de un sistema no lineal de 2×2 , dos ecuaciones con dos incógnitas, representa una curva en el plano xy , cuando ambas ecuaciones se grafican en el mismo plano, puede ocurrir que,

1. Las gráficas de las ecuaciones se intersectan o cortan en uno o más puntos, entonces, el sistema **tiene una o más soluciones**.
2. Las gráficas de las ecuaciones no tiene puntos de coincidencia o de corte, entonces, el sistema **no tiene solución**.

En los siguiente ejemplos se utiliza *GeoGebra* para encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones no lineales.

Ejemplo 157 Encuentre la solución gráfica del sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 5 - y &= 0 \\ -x - 2y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Para aplicar el método gráfico, se reescriben las ecuaciones resueltas para y ,

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 3x + 5 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

ambas ecuaciones se grafican en el mismo plano,

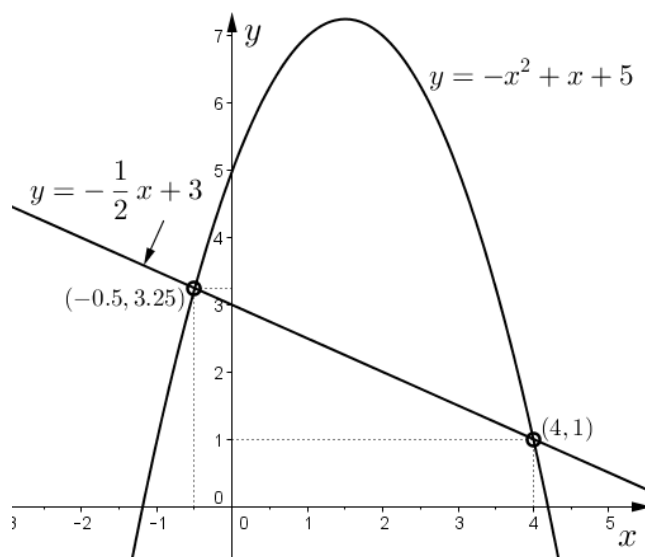


Figura 40. Solución gráfica, Ejemplo 157.

En la gráfica de la Figura 40 se muestran los puntos en las cuales las gráficas de ambas ecuaciones se intersectan, estos puntos son: $(-0.5, 3.25)$ y $(4, 1)$.

Ejemplo 158 Encuentre la solución gráfica del sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+2} \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

reescribiendo la segunda ecuación del sistema, $y = -x + 4$, graficando ambas ecuaciones en el mismo plano, ver Figura 41. La solución obtenida es $(2, 2)$.

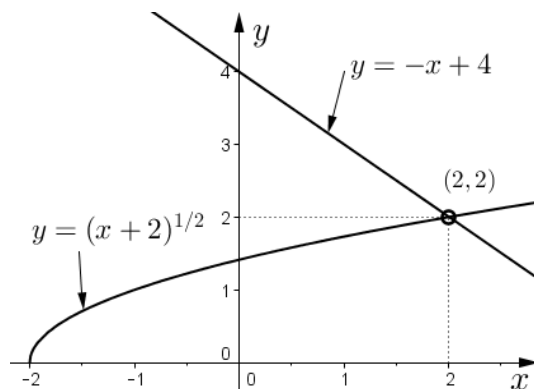


Figura 41. Solución gráfica, Ejemplo 158.

Verificando la solución obtenida en el sistema original,

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{2+2} \\ 2+2 &= 4 \end{aligned}$$

la cual satisface a ambas ecuaciones.

En los sistemas de ecuaciones no lineales de 2×2 , en el que se tiene una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, tales como,

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -3x^2 + 6x \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x + 3 \\ y = -3x^2 + 6x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x^2 + 6x + 1 \end{cases}$$

Su solución gráfica puede ser representada con uno de los tres casos que se muestran en las Figuras 42 a 44.

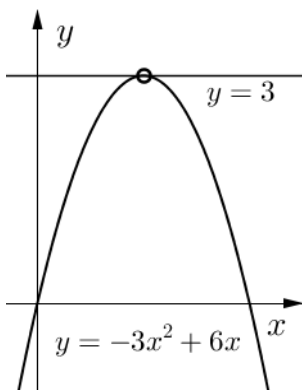


Figura 42. Una Solución.

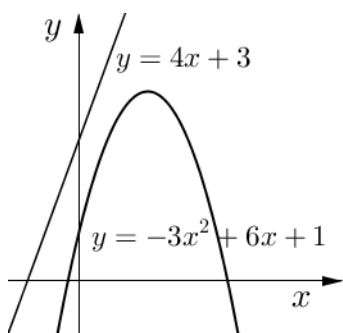


Figura 43. Sin Solución.

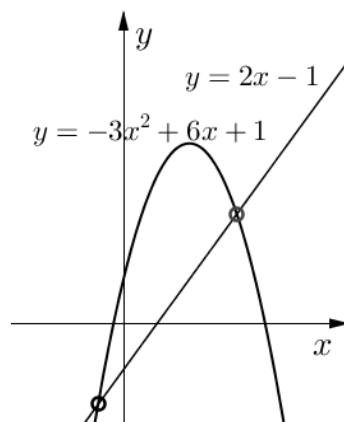


Figura 44. Dos Soluciones.

Para un sistema de ecuaciones no lineal de 2×2 , en el que ambas ecuaciones son cuadráticas, tales como,

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 \\ y = -3x^2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -4x^2 + 6x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = -4x^2 + 6x \end{cases}$$

Su solución gráfica pueden ser representada en uno de los tres casos que se muestran en las Figuras 45 a 47.

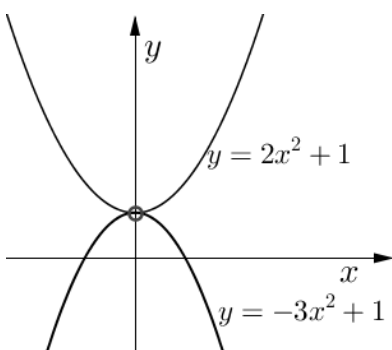


Figura 45. Una Solución.

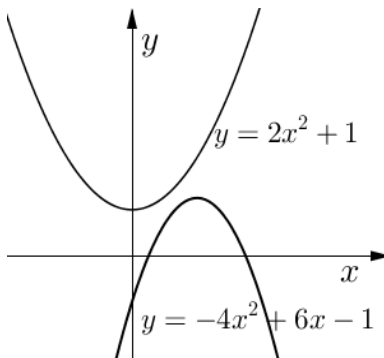


Figura 46. Sin Solución.

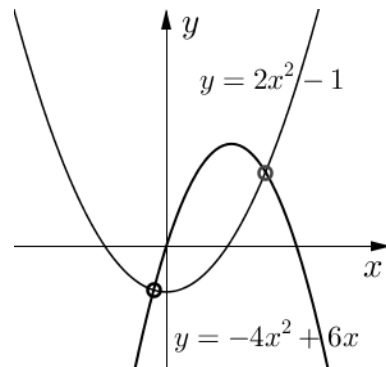


Figura 47. Dos Soluciones.

Ejercicio 70 Determine la solución gráficamente de los sistemas dados a continuación, utilice GeoGebra.

$$1. \quad \begin{aligned} y &= x^2 - 9 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} y^2 &= 5 - x \\ y &= q + 1 \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x &= y^2 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} y &= 4x - x^2 + 8 \\ y &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} y &= x^3 \\ x - y &= 14 \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} y^2 - x + 1 &= 0 \\ 5x - 3y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} x^2 + 4x - y &= -4 \\ y - x^2 - 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 1 \\ y &= x^3 + x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} -y + x^3 - x + 1 &= 0 \\ -y + 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} y - \frac{1}{x} \\ y - x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

10.2.2 Método Algebraico

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de 2×2 , se utilizan procedimientos análogos a los utilizados en los sistemas de ecuaciones lineales. La idea principal es reducir el sistema de dos ecuaciones a una ecuación con una sola incógnita y resolverla, posteriormente, encontrar la incógnita cancelada en cualquiera de las ecuaciones equivalentes obtenidas, se recomienda llevar un control de las ecuaciones al numerarlas como se indica en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 159 Resuelva con el método por sustitución el sistema siguiente.

$$E1 : y = \sqrt{x + 2}$$

$$E2 : x + y = 4$$

1. Despejar una incógnita de una de las dos ecuaciones del sistema; está es la incógnita que deseamos eliminar o cancelar. Despejar y de $E2$, que es la ecuación más simple.

$$E3 : y = 4 - x$$

2. Sustituir la incógnita despejada en la otra ecuación, simplificar y resolver la ecuación para la incógnita no eliminada. Sustituir $E3$ en $E2$, simplificar y resolver para x ,

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x + 2} \\ (4 - x)^2 &= x + 2 \\ x^2 - 8x + 16 &= x + 2 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x - 7)(x - 2) &= 0 \\ x - 2 &= 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ x - 7 &= 0 \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

3. Sustituir el valor o los valores obtenidos en el paso dos en la ecuación del paso uno, simplificar y resolver. Sustituir el valor obtenido para $x = 2$ y $x = 7$ en $E3$, y obtener el

par ordenado.

$$\begin{aligned}y &= 4 - 2 = 2 \rightarrow (2, 2) \\y &= 4 - 7 = -3 \rightarrow (7, -3)\end{aligned}$$

4. Verificar que la solución satisface el sistema de ecuaciones. Sustituir cada par ordenado en el sistema original.

Para $(x, y) = (2, 2)$

$$\begin{aligned}E1 &: y = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2+2} \Leftrightarrow 2 = 2 \\E2 &: x + y = 4 \Leftrightarrow 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4\end{aligned}$$

Para $(x, y) = (7, -3)$

$$\begin{aligned}E1 &: y = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow -3 = \sqrt{7+2} \Leftrightarrow -3 \neq 2 \\E2 &: x + y = 4 \Leftrightarrow 7 - 3 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es sólo $(2, 2)$.

Ejemplo 160 Resolver el sistema de ecuaciones no lineales por el método de igualación.

$$\begin{aligned}E1 &: -1.1x^2 + 1.5x - y + 40 = 0 \\E2 &: 0.1x^2 + 0.5x - y + 15 = 0\end{aligned}$$

1. Despejar la misma incógnita de cada una de las ecuaciones del sistema, está es la incógnita que deseamos eliminar. Despejar de $E1$ y $E2$ la incógnita y .

$$\begin{aligned}E3 &: y = -1.1x^2 + 1.5x + 40 \\E4 &: y = 0.1x^2 + 0.5x + 15\end{aligned}$$

2. Igualar ambas ecuaciones despejadas para la misma incógnita, simplificar y resolver la ecuación para la incógnita no eliminada. Igualar las ecuaciones $E3 = E4$, simplificar y resolver para x ,

$$\begin{aligned}-1.1x^2 + 1.5x + 40 &= 0.1x^2 + 0.5x + 15 \\1.2x^2 - x - 25 &= 0\end{aligned}$$

resolviendo por fórmula general, $a = 1.2$, $b = -1$, $c = -25$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1.2)(-25)}}{2(1.2)} = \frac{1 \pm 11}{2.4} \\x_1 &= \frac{1 + 11}{2.4} = 5 \\x_2 &= \frac{1 - 11}{2.4} = -4.1667\end{aligned}$$

3. Sustituir los valores obtenidos en el paso dos en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas para la incógnita eliminada. Al sustituir en la ecuación $E3$, se tiene,

Para $x = 5$

$$\begin{aligned} y &= -1.1(5)^2 + 1.5(5) + 40 \\ &= 20 \end{aligned}$$

la solución es $(x, y) = (5, 20)$.

Para $x = -4.1667$

$$\begin{aligned} y &= -1.1(-4.1667)^2 + 1.5(-4.1667) + 40 \\ &= 14.652 \end{aligned}$$

la solución es $(x, y) = (-4.1667, 14.652)$.

4. Verifique que la solución satisface el sistema original de ecuaciones.

Para $(5, 20)$

$$\begin{aligned} E1 &: -1.1(5)^2 + 1.5(5) - 20 + 40 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ E2 &: 0.1(5)^2 + 0.5(5) - 20 + 15 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Para $(-4.1667, 14.652)$

$$\begin{aligned} E1 &: -1.1(-4.1667)^2 + 1.5(-4.1667) - 14.652 + 40 = 0 \rightarrow \underbrace{4.2222 \times 10^{-4}}_{\approx 0} = 0 \\ E2 &: 0.1(-4.1667)^2 + 0.5(-4.1667) - 14.652 + 15 = 0 \rightarrow \underbrace{7.8889 \times 10^{-4}}_{\approx 0} = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, ambas soluciones satisfacen al sistema original.

Ejemplo 161 Resolver el sistema de ecuaciones no lineales por el método adición y sustracción.

$$\begin{aligned} E1 &: 3x^2 + 6x + 3y - 7 = 0 \\ E2 &: 2x + 3y - 3 = 0 \end{aligned}$$

1. Multiplicar una ecuación o ambas ecuaciones por constantes adecuadas, para que los coeficientes de la incógnita a cancelar sean los opuestos. Multiplicar $E2$ por (-1) , para eliminar en ambas ecuaciones el término lineal de y ,

$$(-1)E2 : -2x - 3y + 3 = 0$$

2. Sumar $E1 + (-1)E2$, al sumar verticalmente se tiene,

$$\begin{array}{rcllclclclcl} E1 & : & 3x^2 & + & 6x & + & 3y & - & 7 & = & 0 \\ (-1)E2 & : & & & -2x & - & 3y & + & 3 & = & 0 \\ \hline & & 3x^2 & + & 4x & & & & -4 & = & 0 \end{array}$$

al resolver está última ecuación,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ (x+2)(3x-2) &= 0 \\ (x+2) &= 0 \rightarrow x = -2 \\ (3x-2) &= 0 \rightarrow x = 2/3 \end{aligned}$$

3. Sustituir los valores obtenidos para x en cualquiera de las ecuaciones del sistema original. Sustituyendo en $E2$ resolviendo para y , se tiene,

Para $x = -2$

$$\begin{aligned} 2(-2) + 3y - 3 &= 0 \\ y &= \frac{7}{3} \rightarrow (-2, 7/3) \end{aligned}$$

Para $x = 2/3$

$$\begin{aligned} 2(2/3) + 3y - 3 &= 0 \\ y &= \frac{5}{9} \rightarrow (2/3, 5/9) \end{aligned}$$

4. Verificar la solución obtenida en el sistema original.

Para $(-2, 7/3)$

$$\begin{aligned} E1 &: 3(-2)^2 + 6(-2) + 3\left(\frac{7}{3}\right) - 7 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ E2 &: 2(-2) + 3\left(\frac{7}{3}\right) - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Para $(2/3, 5/9)$

$$\begin{aligned} E1 &: 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{5}{9}\right) - 7 = 0 \rightarrow 0 = 0 \\ E2 &: 2\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{5}{9}\right) - 3 = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, ambas soluciones satisfacen al sistema original.

Ejemplo 162 Resolver el sistema de ecuaciones no lineales siguiente.

$$\begin{aligned} E1 &: x^2 + y^2 = 18 \\ E2 &: x^2 + y^2 - 4x - 4y = -6 \end{aligned}$$

En este tipo de sistemas de ecuaciones, los procedimientos revisados no cancelan inmediatamente una incógnita, se recurre a una combinación de procedimientos para resolver el sistema, el ejemplo siguiente aclara este punto.

1. La operación $E1 - E2$ cancelan los términos cuadráticos en ambas ecuaciones, dando lugar a la ecuación $E3$.

$$\begin{array}{rcll} E1 & : & x^2 & + & y^2 & & = & 18 \\ (-1)E2 & : & -x^2 & - & y^2 & + & 4x & + & 4y & = & 6 \\ \hline E3 & : & & & & & 4x & + & 4y & = & 24 \end{array}$$

2. De $E3$ resolvemos para y , obteniendo la ecuación $E4$.

$$E4 : y = \frac{24 - 4x}{4} = 6 - x$$

3. Sustituir la ecuación obtenida, E4, en E1 o E2; sustituyendo en E1, simplificando y resolviendo.

$$\begin{aligned}x^2 + (6 - x)^2 &= 18 \\2x^2 + 36 - 12x &= 18 \\2x^2 + 18 - 12x &= 0 \\2(x - 3)^2 &= 0 \rightarrow x = 3\end{aligned}$$

4. Sustituyendo $x = 3$ en la ecuación E4, se tiene,

$$\begin{aligned}y &= 6 - 3 \\&= 3\end{aligned}$$

La solución del sistema es $(3, 3)$.

5. Verificando la solución en el sistema original.

$$\begin{aligned}3^2 + 3^2 &= 18 \rightarrow 18 = 18 \\3^2 + (3)^2 - 4(3) - 4(3) &= -6 \rightarrow -6 = -6\end{aligned}$$

Lo cual verifica que la solución obtenida satisface al sistema original.

El proceso que el lector debe aplicar para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, depende de la forma en que se presente el sistema de ecuaciones y la facilidad que el lector tenga para simplificar directamente el sistema o simplificarlo mediante una combinación de procedimientos, como en el ejemplo anterior.

Ejercicio 71 Aplicando el método algebraico de su preferencia, determine la solución, si existe, de los sistemas de ecuaciones no lineales siguientes.

$$\begin{aligned}1. \quad y &= 144 - x^2 \\y &= 48 + \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad x &= \frac{y^2}{y-1} + 1 \\x &= \frac{1}{y-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad 3x^2 - 2y + 7 &= 0 \\2y - 2x - 8 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad 4x - 6 &= 0 \\6y^2 - 6y - 12 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5. \quad 3x^2 - 3y &= 0 \\-3x + 3y^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6. \quad 3x^2 - 2y &= 0 \\-2x + 2y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7. \quad y - \frac{4}{x^2} &= 0 \\x - \frac{2}{y^2} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 1 \\xy &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9. \quad \frac{1}{y^2} + y &= 0 \\-\frac{2x}{y^3} + x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10. \quad x^2 + y^2 - 8x - 4y - 44 &= 0 \\x^2 + y^2 - 6x + 10y - 16 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}11. \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y &= 20 \\x^2 + y^2 - 12x + 2y &= -12\end{aligned}$$

Capítulo 11

Funciones Reales

El concepto de función es de gran utilidad al estudiar la dependencia que existe entre dos cantidades, esa relación se establece mediante una regla de correspondencia entre números o variables reales, lo que da lugar a funciones reales, de interés en este capítulo.

11.1 Función

Una función f es una regla de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, tal que a cada elemento del primer conjunto (A), llamado dominio, le asigna un elemento y sólo uno del segundo conjunto (B), llamado contradominio, codominio, imagen o rango; este concepto se puede visualizar mediante el diagrama de conjuntos de la Figura 11.1

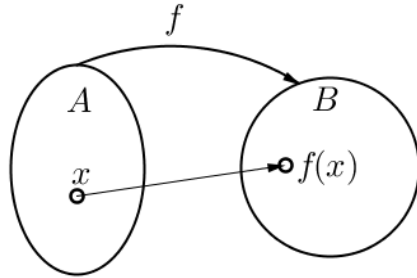


Figura 11.1: Concepto de función mediante un diagrama de conjuntos.

f es una regla que asigna a cada elemento x en el conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en el conjunto B . La función establece una relación entre subconjuntos de $\mathbb{R}$, de tal forma que las funciones siguen las propiedades de los números reales.

Establecer una función f consiste en dar su dominio (el conjunto A), su rango (el conjunto B) y la regla de correspondencia por medio de la cual a cada elemento a del conjunto A se le asocia el elemento $b = f(a)$ del conjunto B .

La notación $b = f(a)$ indica que la regla de correspondencia se aplica al elemento a para convertirlo en elemento b , es decir, b es la imagen de a en B . Por ejemplo, la Tabla (11.1) ilustra la relación que existe entre elementos de los conjuntos A y B ; la regla asigna al elemento 1 de A el elemento 2 de B , el elemento 2 de A le asigna el elemento 4 de B , y así sucesivamente, en forma simbólica se denota por $f : 1 \mapsto 2$, la regla general: al elemento x de A se le asigna el elemento $2x$ de B , estas asociaciones se esquematizan en el tabla.

En notación funcional esta regla se expresa como,

$$f(x) = 2x$$

A	B	f asigna
1	2	$1 \mapsto 2$
2	4	$2 \mapsto 4$
3	6	$3 \mapsto 6$
4	8	$4 \mapsto 8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$2x$	$x \mapsto 2x$

Tabla 11.1: Correspondencia de elementos en conjuntos

o en notación de ecuación,

$$y = 2x$$

Por lo general, cualquier elemento del dominio de la función se le denota como " x ", se le conoce como la **variable independiente**; cualquier elemento del rango o contradominio como " y ", se le conoce como **variable dependiente**.

Otras letras de alfabeto utilizadas para identificar funciones son: g , h , etc., dando lugar a funciones en la variable x , tales como, $g(x)$, $h(x)$, etc. La notación $f(x)$ se lee: " f " de x , enfatiza que la variable independiente es x o que la función esta escrita en términos de x , no significa f multiplicada por x .

Otra forma de visualizar el concepto de función es mediante el diagrama de bloques de la Figura 11.2, en la que se establece una correspondencia de entrada (*input*) y salida (*output*),

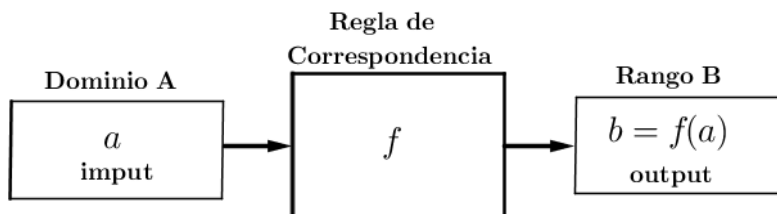


Figura 11.2: Concepto de función mediante un diagrama de bloques (*input-output*).

O mediante el diagrama de máquina de la Figura (11.3), aquí la función toma el papel de una máquina que transforma **entradas posibles** (dominio de f) en **salidas posibles** (rango de f).

este tipo de diagrama de máquina es útil para visualizar de forma clara la operación de composición de funciones.

Algo más Las funciones proporcionan información de índole muy variada, por ejemplo, información financiera, económica, de negocios, etc. Tal información se puede visualizar mediante una ecuación o fórmula, conocida formalmente como modelo matemático; una función puede ser representada mediante una tabla de valores numéricos para la variable independiente y dependiente, como en el ejemplo anterior, esto es, pares ordenados (x, y) ; por último, las funciones tienen una representación gráfica en el plano (par ordenado) o en el espacio (terna ordenada) lo cual da oportunidad de visualizar la gráfica de la función y determinar algunas características importantes.

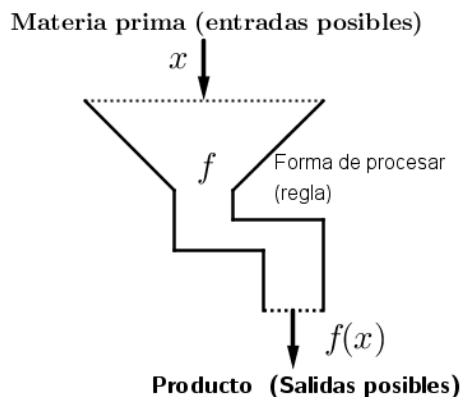


Figura 11.3: Concepto de función mediante un diagrama de máquina.

11.1.1 Dominio y Rango

A menos que el dominio de una función no se exprese en forma explícita se puede determinar mediante algunas reglas simples. Si se conoce las entradas posibles se puede establecer las salidas posibles o rango.

Establecer el dominio de una función consiste en determinar los valores de entrada posibles de la variable independiente, que den valores de salida posibles de la variable dependiente, por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

Reglas para encontrar el dominio de una función real, si la función f tiene alguna de estas formas:

1. $f = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$, sin problemas de procesamiento numérico en el numerador; se establece que el denominador $\neq 0$.
2. $f = \sqrt[\text{par}]{\text{radicando}}$, se establece que el radicando ≥ 0 .
3. $f = \frac{\text{numerador}}{\sqrt[\text{par}]{\text{radicando}}}$, sin problemas de procesamiento numérico en el numerador; se establece que el radicando > 0 .
4. $f = \frac{\sqrt[\text{par}]{\text{radicando}}}{\text{denominador}}$, se establece dos condiciones:
 - (a) radicando ≥ 0
 - (b) denominador $\neq 0$

El dominio de f se encuentra en la intersección de los dos conjuntos que resultan de las condiciones a y b.

5. $f = \sqrt[\text{impar}]{\text{radicando}}$
 radicando es un número real, el radicando puede ser positivo, negativo o cero.
6. $f = \frac{\text{numerador}}{\sqrt[\text{impar}]{\text{radicando}}}$, sin problemas de procesamiento numérico en el numerador; se establece que el radicando $\neq 0$.

7. $f = \frac{\sqrt[\text{impar}]{\text{radicando}}}{\text{denominador}}$, se establece que denominador $\neq 0$.

Ejemplo 163 Determine el dominio y el rango de la función $f(x) = 2x + 5$.

La entrada posible de x puede ser un número positivo, negativo o cero, entonces el dominio de la función es el conjunto de los reales ($\mathbb{R}$). La salida posible que se produce es de igual forma un número positivo, negativo o cero, por lo tanto, el rango es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 164 Determine el dominio y el rango de la función $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

Aplicando la regla 1, el denominador no puede ser cero, esto es,

$$\begin{aligned} x - 2 &\neq 0 \\ x &\neq 2 \end{aligned}$$

El dominio de $g(x)$ puede ser expresado como:

1. En notación de conjuntos, x puede ser cualquier número real excepto 2, se escribe,

$$\text{Dominio: } \mathbb{R} - \{2\}$$

2. En forma de desigualdad,

$$x < 2, 2 < x$$

3. En forma gráfica,

$$\begin{array}{c} \overline{\overbrace{x < 2}} \quad \bigcirc \quad \overline{\overbrace{2 < x}} \\ 2 \end{array}$$

4. En forma de intervalo,

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

La función $g(x)$ produce todos los números reales menos el 0, es imposible obtener el cero, ya que no hay algún valor de x que sea solución de,

$$\frac{1}{x-2} = 0$$

El rango es entonces, $y \neq 0$ o también: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Ejemplo 165 Determine el dominio y el rango de la función $h(x) = \sqrt{x-3}$.

La raíz cuadrada existe siempre y cuando $(x-3)$ sea positivo o cero, aplicando la regla 2,

$$\begin{aligned} x - 3 &\geq 0 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

El dominio es,

$$\overline{\overbrace{x \geq 3}}: \quad x \geq 3 \Leftrightarrow [3, \infty)$$

El rango de $h(x)$ se puede determinar probando la entrada $x = 3$, así que la salida es,

$$h(3) = \sqrt{3-3} = 0$$

el valor de la función $h(x)$ para valores mayores de 3 crece indefinidamente, de tal forma que el rango es, $y \geq 0$ o $[0, \infty)$.

Ejemplo 166 Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$.

El numerador de la función $f(x)$ admite cualquier valor de x en $\mathbb{R}$; el denominador según la regla 1 no puede ser cero, así que el producto,

$$(x-2)(x+3) \neq 0$$

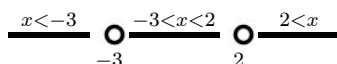
entonces,

$$\begin{aligned} (x-2) &\neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ (x+3) &\neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \end{aligned}$$

El dominio de $f(x)$ se encuentra restringido por los valores de x que puede tomar el denominador, así,

$$\text{Dominio de } f(x) : x \neq 2, x \neq -3$$

en forma gráfica,



en notación de desigualdad,

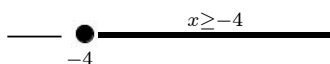
$$-\infty < x < -3; -3 < x < 2; 2 < x < \infty$$

o en notación de intervalo: $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$.

Ejemplo 167 Determine el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{(x-3)}$.

Aplicando la regla 4.

En el numerador: $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$



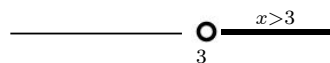
En el denominador: $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$



Las entradas posibles están restringidas por el valor de x en el denominador, el dominio de $f(x)$ se encuentra en la intersección de los dos intervalos, esto es,

$$[-4, \infty) \cap \{(-\infty, 3) \cup (3, \infty)\} = (3, \infty)$$

de forma gráfica la intersección de los intervalos es,



por lo tanto,

$$\text{Dominio de } f(x) : x > 3 \Leftrightarrow (3, \infty)$$

Ejemplo 168 Determine el dominio de la función $h(x) = \frac{(x+4)^2}{\sqrt{x^2-9}}$.

Aplicando la regla 3, la forma factorizada de la función $h(x)$ es,

$$h(x) = \frac{(x+4)^2}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}$$

El numerador de la función $h(x)$ admite cualquier valor de x en $\mathbb{R}$, el dominio está restringido por el valor del denominador, según la regla 3 el radicando debe ser positivo, esto es,

$$(x - 3)(x + 3) > 0$$

La desigualdad anterior establece que los valores de la variable deben ser tal que el producto de los factores sea positivo; de forma simple, el producto de los dos factores es positivo cuando ambos son positivos o cuando ambos son negativos, para resolver este tipo de desigualdades es importante determinar los valores de la variable donde la desigualdad sea cero, este valor se conoce como valor crítico.

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 3) &= 0 \\(x + 3) &= 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{valor crítico} \\(x - 3) &= 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{valor crítico}\end{aligned}$$

Los valores críticos dividen la recta numérica en tres intervalos abiertos, ya que el valor variable debe ser $x \neq \pm 3$, el análisis de los signos se indica para cada intervalo y son determinados al tomar un valor de prueba en cada intervalo, por ejemplo, en el primer intervalo se toma como valor de prueba $x = -4$, así que el signo de primer factor $(x - 3) < 0$, el signo del segundo factor $(x + 3) < 0$, así que el producto $(x - 3)(x + 3) > 0$, como se indica en el diagrama siguiente,

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{x < -3}{(-)(-) = (+)} & -3 & \frac{-3 < x < 3}{(-)(+) = (-)} & 3 & \frac{3 < x}{(+)(+) = (+)} \\ \hline & & & & \end{array}$$

De forma similar se obtiene el signo en los otros dos intervalos.

En conclusión, los intervalos en los cuales el producto de los dos factores es positivo,

$$x < -3 \Leftrightarrow (-\infty, -3)$$

y

$$3 < x \Leftrightarrow (3, \infty)$$

por lo tanto,

$$\text{Dominio de } h(x) : (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 169 Encuentre el dominio de la función dada por,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

f no está definida si el denominador es 0 (regla 1). Por lo que se debe excluir los valores de x tales que,

$$\begin{aligned}x^2 - x &= 0 \\x(x - 1) &= 0 \\x &= 0 \\x &= 1\end{aligned}$$

En notación de conjuntos el dominio de f es,

$$\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$$

Ejemplo 170 Encuentre el dominio de,

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x}$$

g está indefinida si el denominador 0 (regla 4),

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= 0 \\x(x-3) &= 0 \\x &= 0 \\x &= 3\end{aligned}$$

así que se debe excluir $x = 0$ y $x = 3$. Además, g no define un número real si $x - 2$ es negativo, por lo que se debe tener en el numerador,

$$\begin{aligned}x - 2 &\geq 0 \\x &\geq 2\end{aligned}$$

el dominio de g es,

$$\{x \mid x \geq 2, x \neq 3\}$$

Ejercicio 72 Determine el dominio de las funciones siguientes, en cada caso de su respuesta en forma: gráfica (recta numérica), de desigualdad y de intervalo.

1. $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

3. $g(x) = \frac{x+2}{3x-6}$

4. $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2+6x+4}$

5. $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

6. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

7. $f(x) = \sqrt{x-7}$

8. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

9. $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x-3}$

10. $h(x) = \sqrt{2x^2-5x-3}$

11. $g(x) = (x+1)^{-1}\sqrt{x+5}$

12. $h(x) = \sqrt[3]{x-8}$

13. $f(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

14. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-6x}}$

15. $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)}{x^2-x-6}}$

16. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^3-2x^2-3x}$

Ejemplo 171 Para la gráfica de la función $f(x)$ dada en la Figura 11.4, determine el dominio y el rango.

El dominio y el rango de una función se identifica de forma fácil y clara por su gráfica, ver la Figura 11.4, la gráfica de $f(x)$ muestra que los valores de x admitidos se encuentran en el intervalo $[1, 4]$, los cuales producen valores de salida en el intervalo $[2, 6]$, entonces,

$$\text{Dominio: } [1, 4]; \text{ Rango: } [2, 6].$$

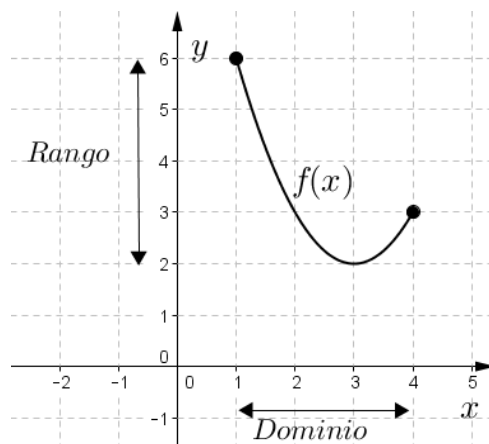


Figura 11.4: Gráfica de $f(x)$.

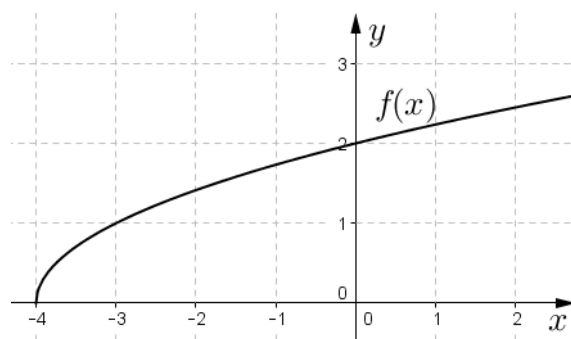


Figura 11.5: Dominio y rango de $f(x)$.

Ejemplo 172 Determine el dominio y el rango de la función $f(x)$ dada en la gráfica de de la Figura 11.5. El dominio y el rango es,

$$\text{Dominio} : [-4, \infty)$$

$$\text{Rango} : [0, \infty)$$

Ejemplo 173 Utilizando GeoGebra grafique la función $f(x)$ y determine su dominio.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{(x-3)(x+1)}$$

Dar clic en el ícono  de GeoGebra. Teclear en el campo f(x) = \text{sqrt}(x+2)/((x-3)(x+1)) dar enter, se desplegara la gráfica en la Vista Gráfica $f(x)$ (Figura 11.6). El dominio de la función es: $-2 \leq x, x \neq -1, x \neq 3$ o en forma de intervalo

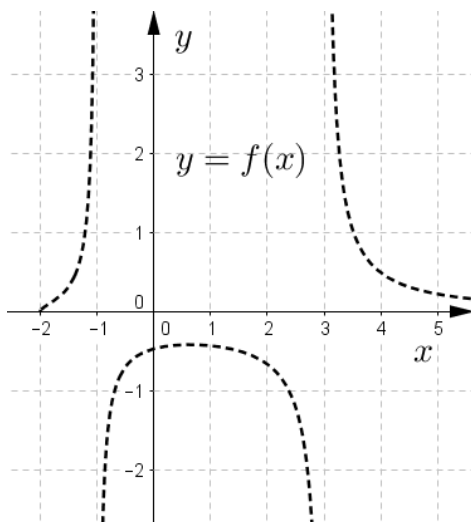


Figura 11.6: Dominio: $-2 \leq x, x \neq -1, x \neq 3$. o también $[2, 1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$

$[2, 1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$.

Ejercicio 73 Determine el dominio y el rango de las funciones siguientes, use la aplicación de GeoGebra, en cada caso de su respuesta en forma: gráfica (recta numérica), de desigualdad y de intervalo.

1. $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

3. $g(x) = \frac{x+2}{3x-6}$

4. $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x^2+6x+4}$

5. $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

6. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

7. $f(x) = \sqrt{x-7}$

8. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

9. $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}}{x-3}$

10. $h(x) = \sqrt{2x^2-5x-3}$

11. $g(x) = (x+1)^{-1}\sqrt{x+5}$

12. $h(x) = \sqrt[3]{x-8}$

$$13. f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$$

$$15. f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)}{x^2 - x - 6}}$$

$$14. h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 6x}}$$

$$16. f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

11.1.2 Función Definidas por Partes

Una función definida por partes es una función compuesta por dos o más reglas de correspondencia cada una asignada en una parte del dominio de la función. La gráfica de una función por partes es una curva a trozos, la forma general en que se presentan este tipo de funciones es,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \text{dominio 1} \\ f_2(x) & \text{si } x \in \text{dominio 2} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si } x \in \text{dominio } n \end{cases}$$

El nombre de la función es f , la variable independiente es x , la función definida por partes tiene n reglas de correspondencia, la regla f_1 se aplica si el valor de x se encuentra en el dominio 1, la regla f_2 se aplica si el valor de x se encuentra en el dominio 2, ..., la regla f_n se aplica si el valor de x se encuentra en el dominio n .

Ejemplo 174 Sea $f(x)$ la función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(x)$ en $f(3)$, $f(0)$, $f(-1)$ y $f(1)$.

La función por partes esta compuesta por tres funciones, cada una valida en el dominio indicado, como se indica.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq -1 \\ f_2(x) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ f_3(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En un diagrama de recta numérica, se presentan las funciones (f_1 , f_2 , f_3) y su dominio.

$$\begin{array}{c} \underbrace{\quad\quad\quad}_{x \leq -1} \quad \bullet \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{-1 < x \leq 1} \quad \bullet \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{x > 1} \\ f_1(x)=2x^2+x+1 \quad f_2(x)=x^3+2 \quad f_3(x)=2x \end{array}$$

Para $f(3)$, $x = 3$, este valor está en el dominio de f_3 , por lo tanto,

$$f(3) = 2(3) = 6$$

Para $f(0)$, $x = 0$, este valor está en el dominio de f_2 , por lo tanto,

$$f(0) = (0)^3 + 2 = 2$$

Para $f(-1)$, $x = -1$, este valor está en el dominio de f_1 , por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_1(-1) &= 2(-1)^2 + (-1) + 12 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Para $f(1)$, $x = 1$, este valor está en el dominio de f_2 , por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_2(1) &= 1^3 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio 74 Evalúe las funciones siguientes en los valores indicados.

$$f(x) = x - 2; \quad h(x) = x^2 + 4; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

1. $f(-2)$
2. $g(0)$
3. $h(-2) + g(-2)$
4. $g(-1)$
5. $g(1) + f(1)$
6. $f(1) + h(0)$
7. $\frac{g(4)}{h(4)}$
8. $f(a) - 2h(a)$
9. $g(-4) + g(0)$
10. $g(3)h(-5)$

Ejemplo 175 Trace la gráfica de la función f , definidas por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Utilizando GeoGebra la función por partes puede graficarse con la instrucción siguiente.

1. Dar clic en el ícono  de GeoGebra. Teclear en el campo .

$$f(x) = \text{If}(\underbrace{x \leq 1}_{\text{dominio 1}}, \underbrace{1}_{f_1(x)}, \underbrace{1 < x}_{\text{dominio 2}}, \underbrace{x+1}_{f_2(x)})$$

En la Ventana Gráfica, Figura 11.7, se muestra la gráfica de cada parte de la función f .

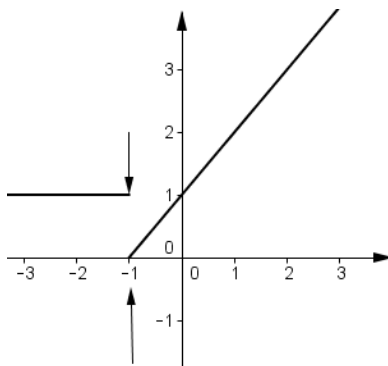


Figura 11.7: Ventana Gráfica de GeoGebra.

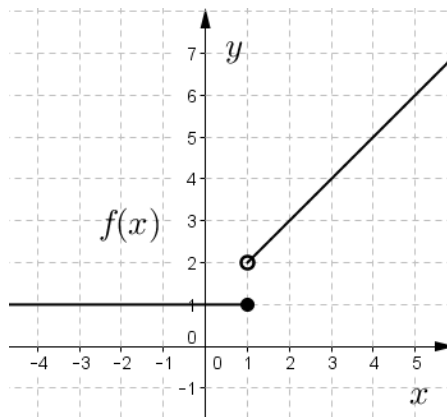


Figura 11.8: Ventana Gráfica de GeoGebra.

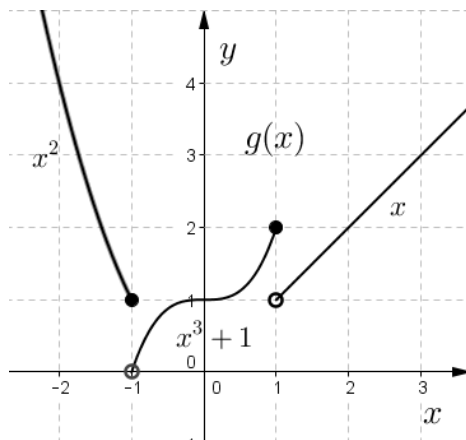


Figura 11.9: Gráfica de una función por partes.

2. Para asignar a cada parte de la gráfica el valor de x que esta incluido o no, teclear en el campo : $A=\text{point}(f)$ y $B=\text{point}(f)$, lo cual crea puntos etiquetados como A y B que pueden ser desplazados a lo largo de la gráfica, para modificar el estilo del círculo, relleno o hueco, según corresponda con el dominio de cada parte de la función, redefinir las propiedades, el estilo y el tamaño del círculo. La gráfica que resulta de este proceso se muestra enseguida, Figura 11.8.

Ejemplo 176 Trace la gráfica de la función g , definidas por partes.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

La gráfica, Figura 11.9, que se da a continuación se genero con GeoGebra siguiendo las instrucciones del ejemplo anterior.

Ejercicio 75 Trace las gráficas de las funciones definidas por parte siguientes con el uso de GeoGebra.

1. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$$2. g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$3. h(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$5. g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{x^3} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

11.2 Álgebra de Funciones

Las funciones pueden combinarse mediante operaciones algebraicas para dar lugar a nuevas funciones. Por ejemplo, dos funciones se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir para formar una nueva función de forma análoga como se suman, restan, multiplican o dividen números reales. La evaluación de una función en otra función es otra forma de obtener nuevas funciones, a este tipo de combinación se le conoce como composición de funciones.

11.2.1 Combinación de Funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B , respectivamente. Se tienen nuevas funciones en x y sus dominios, ver Tabla 11.2, por:

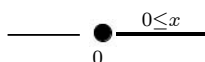
Combinación	Dominio
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$A \cap B$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$A \cap B$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$	$A \cap B$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

Tabla 11.2: Combinación de funciones

Estas combinaciones tienen sentido si x es un número en el dominio de ambas funciones, esto es, x es un número que está en el dominio de la $A \cap B$. La combinación $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene sentido si x está en el dominio de ambas funciones y si $g(x) \neq 0$.

Ejemplo 177 Combine las funciones f y g , determine su dominio. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$, es $x \geq 0$, en la recta numérica:



La función $g(x) = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{(2-x)(2+x)}$, tiene sentido si

$$(2-x)(2+x) \geq 0$$

los valores críticos $x = 2$ y $x = -2$ dividen la recta numérica en tres intervalos abiertos, el análisis de los signos se indica para cada intervalo.

$$\frac{x < -2}{(+)(-)=(-)} \quad | \quad \frac{-2 < x < 2}{(+) (+)= (+)} \quad | \quad \frac{2 < x}{(-)(+)=(-)}$$

El intervalo en el cual el producto de los dos factores es positivo,

$$-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow [-2, 2]$$

en la recta numérica:

$$\text{---} \bullet \xrightarrow{-2 \leq x \leq 2} \bullet \text{---}$$

$-2 \qquad \qquad \qquad 2$

La combinación de funciones y su dominio son:

Combinación	Dominio
$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{(2-x)(2+x)}$	$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$
$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{(2-x)(2+x)}$	$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$
$(fg)(x) = \sqrt{x} \sqrt{(2-x)(2+x)}$	$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(2-x)(2+x)}}$	$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2)$

En la combinación $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $g(x) \neq 0$, lo cual se cumple si $x \neq 2$.

Ejercicio 76 Dadas las funciones $f(x) = x - 2$ y $h(x) = x^2 + 4$; encuentre las combinaciones siguientes:

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f(x)h(x)$ 2. $h(-x)$ 3. $\frac{f(x)}{h(x)}$ 4. $2f(-x) + 1$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $h(x+1) - 2$ 6. $\frac{h(x)}{f(x)}$ 7. $f(a) - 2h(a)$ 8. $h(x^{1/2})$ 9. $(f(x))^2$ 10. $f(x^2)$ |
|--|--|

11.2.2 Composición de Funciones

La composición de funciones permite obtener una nueva función a partir de evaluar una función en otra función, esta operación se puede visualizar en el diagrama de conjuntos de la Figura 11.10; f asigna al elemento x de A el elemento $y = f(x)$ de B , g asigna al elemento y de B el elemento $g(y) = g(f(x))$ de C , de forma simbólica esta función composición se denota por,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$$

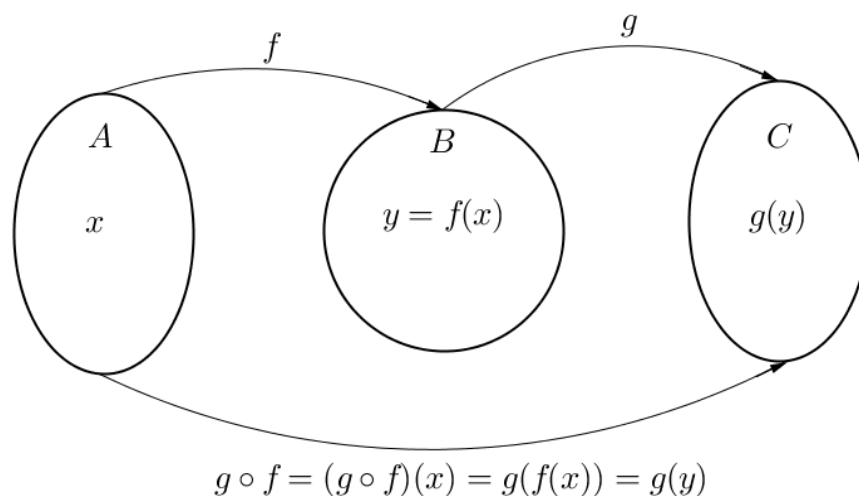


Figura 11.10: Composición de Funciones.

La composición de funciones, g composición f se denota por $g \circ f$, f composición g por $f \circ g$, lo cual significa:

$$\begin{aligned} g \circ f &= (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ f \circ g &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

En la composición $g \circ f$ primero se aplica la función f luego la función g , en este caso la función interior (f) es la que se evalúa primero, después la función exterior (g). En la composición $f \circ g$ la función interior ahora es g y la función exterior es f . La composición de funciones por lo general no es conmutativa.

En la triple composición,

$$(f \circ g \circ h)(x) = f((g(h(x))))$$

primero se evalúa la función interior h , la salida de h es una entrada para g ; la salida de g es una entrada para la función f .

Ejemplo 178 Si $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^2 + 2$, calcule la composición $(h \circ g \circ f)(x)$ en $x = 1$.

Para evaluar $(h \circ g \circ f)(1)$ primero se evalúa $f(1)$, la salida es la entrada para evaluar g , y la salida de esta función es la entrada a la función h ; este proceso es claro cuando se esquematiza con el diagrama de máquinas de la Figura 11.11. En forma simbólica es,

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)(1) &= h(g(f(1))) \\ &= h(g((1 + 1))) \\ &= h(g(2)) \\ &= h(2^2) \\ &= h(4) \\ &= 4^2 + 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

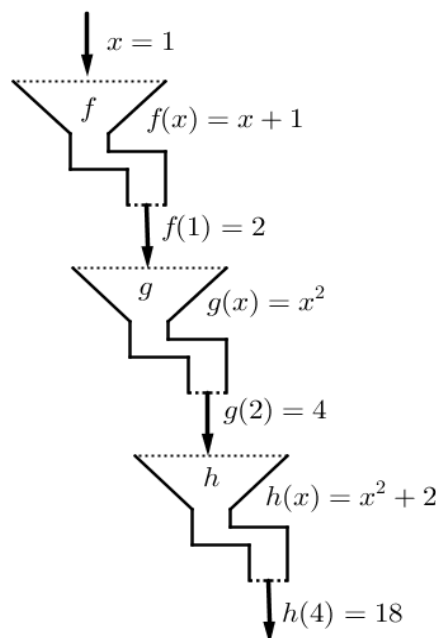


Figura 11.11: Triple composición.

Ejemplo 179 Determine la composición $(f \circ g)(x)$, si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2x + 3$.

Para obtener la composición $(f \circ g)(x)$, alimentar primero x a la función g , la salida es $2x + 3$, está es la entrada a la función f para obtener la salida $4x^2 + 12x + 8$. En notación de función es,

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(2x + 3) \\
 &= (2x + 3)^2 - 1 \\
 &= 4x^2 + 12x + 9 - 1 \\
 &= 4x^2 + 12x + 8
 \end{aligned}$$

Ejemplo 180 Dadas las funciones siguientes, determine la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

1. Sea $f(x) = \sqrt[3]{3x - 1}$, $g(x) = 5x$

$$(a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x) = \sqrt[3]{3(5x) - 1} = \sqrt[3]{15x - 1}$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(\sqrt[3]{3x - 1}) = 5\sqrt[3]{3x - 1}$$

2. Sea $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = x^3$

$$(a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 1}$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3 = \frac{(x+2)^3}{(x-1)^3}$$

3. Sea $f(x) = 2x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

$$(a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^3 - 1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3 - 1) + 1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = x$$

Ejemplo 181 Dadas las funciones siguientes, evalúe la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ en los valores indicados.

1. Sea $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$, $g(x) = 5x$

$$(a) (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(10) = \sqrt[3]{3(10)-1} = \sqrt[3]{29}$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(f(2)) = g\left(\sqrt[3]{3(2)-1}\right) = g\left(\sqrt[3]{5}\right) = 5\left(\sqrt[3]{5}\right) = 5\sqrt[3]{5}$$

2. Sea $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = x^3$

$$(a) (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = \frac{-1+2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(f(-1)) = g\left(\frac{-1+2}{-1-1}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

3. Sea $f(x) = 2x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

$$(a) (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{1+1}{2}}\right) = f(1) = 2(1)^3 - 1 = 1$$

$$(b) (g \circ f)(x) = g(f(1)) = g(2(1)^3 - 1) = g(1) = \sqrt[3]{\frac{(2(1)^3 - 1) + 1}{2}} = 1$$

Ejercicio 77 Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 3x + 2$; $h(x) = x^2 + 3x$; $j(x) = x - 2$; $k(x) = x^2 + 4$; y $t(x) = \sqrt{x-3}$. Obtenga:

1. $k + t$

2. $(f + g)h$

3. $jh + gh$

4. $(f + g) \circ t$

5. $f \circ h + g \circ h$

6. $j(k(t(x)))$

Ejercicio 78 Dadas las funciones siguientes, determine la composición $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

1. $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $g(x) = \frac{x+3}{x}$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

3. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^4 - 1$.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = (x+1)^2$.

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

11.3 Comportamiento General de Funciones

En esta sección se presentan los conceptos importantes que se presentan en el estudio de las funciones.

11.3.1 Función Creciente y Decreciente

En Figura 11.12 se presenta la gráfica de la función $f(x)$, el comportamiento es parecido al de una "Montaña Rusa", con subidas y bajadas a medida que se avanza de izquierda a derecha por el eje x , se dice en el lenguaje matemático que la función f es creciente (asciende) cuando la curva sube y decreciente (desciende) cuando la curva baja.

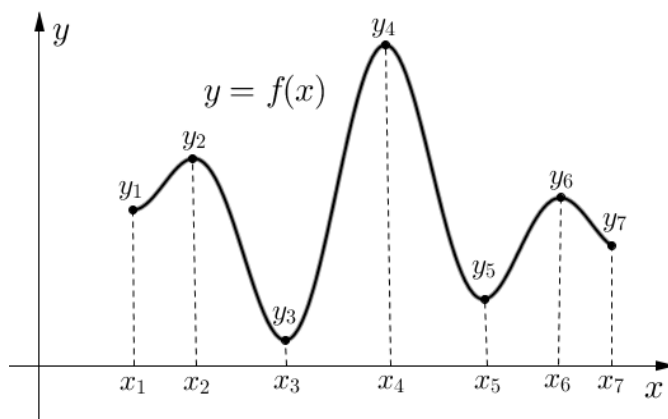


Figura 11.12: Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función $f(x)$.

El comportamiento gráfico de la función $f(x)$ muestra que la función f :

1. Es creciente en los intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, $[x_5, x_6]$; y
2. Es decreciente en los intervalos $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$, y $[x_6, x_7]$.

Como en la "Montaña Rusa", después de subir se tiene que bajar, alcanzado un máximo de altura; de igual forma, después bajar se tiene que subir alcanzando una altura mínima. Este comportamiento es similar al que se presenta en la función f de la Figura 11.12, la función tiene valores máximos y mínimos de f , localizados en los intervalos donde f cambia de comportamiento.

El comportamiento gráfico de la función $f(x)$ muestra que la función f :

1. Tiene un máximo en un valor de $x = c$, cuando la función pasa de creciente a decreciente;
2. Tiene un mínimo en un valor de $x = c$, cuando la función pasa de decreciente a creciente.

Como se muestra en la gráfica de la Figura 11.12, las coordenadas de los mínimos son:

$$(x_3, y_3) \text{ y } (x_5, y_5)$$

y de los máximos:

$$(x_2, y_2), (x_4, y_4) \text{ y } (x_6, y_6)$$

En notación simbólica se dice que la función f en un intervalo I que contenga a x_1 y x_2 , es,

creciente, si $f(x_1) < f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$;

y es,

decreciente, si $f(x_1) > f(x_2)$, siempre que $x_1 < x_2$.

11.3.2 Interceptos con los Ejes

Existe la posibilidad de que el trazo de la gráfica de una función corte o cruce los ejes coordenados, estos se les conoce como interceptos en sus respectivos ejes, el conocimiento de estos valores son de gran apoyo para la graficación de funciones y algunos conceptos de aplicación.

El *intercepto x (abscisa al origen)*, es el valor donde la curva de $f(x)$ cruza al eje x , para encontrar el intercepto x , resuelva la ecuación,

$$f(x) = 0$$

El *intercepto y (ordenada al origen)*, es el valor donde la curva de $f(x)$ cruza al eje y , para encontrar el intercepto y , evalúe,

$$y = f(0)$$

Ejemplo 182 Encuentre los interceptos con el eje x y con el eje y de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$.

Interceptos con el eje y ,

$$f(0) = 0^3 - 9(0)$$

$$f(0) = 0$$

esto es, la curva de $f(x)$ cruza al eje y en la coordenada $(0, 0)$.

Intercepto con el eje x ,

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

así que los valores donde la gráfica corta al eje x son: $0, -3, 3$; sus coordenadas respectivas son; $(0, 0), (-3, 0), (3, 0)$. En la Figura 11.13 se presenta la gráfica de la función.

Ejercicio 79 Describa el comportamiento general de las funciones: intervalos de crecimiento, extremos relativos. Utilice la aplicación de GeoGebra.

$$1. f(x) = -|x + 2| + 3$$

$$2. h(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

$$3. f(x) = x^3 - x^2$$

$$4. h(x) = 3x^4 - 4x^2$$

$$5. f(x) = \sqrt{\frac{(x - 4)}{(x - 2)(x - 3)}}$$

$$6. f(x) = (x + 2)^2 - 2$$

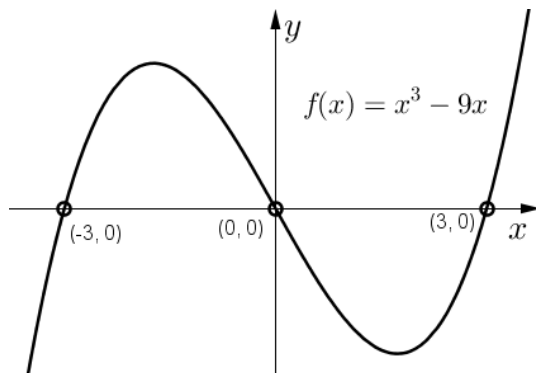


Figura 11.13: Interceptos con los ejes.

7. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

9. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x}$

8. $f(x) = \sqrt{x+2}$

10. $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

11.3.3 Razón de Cambio Promedio

La razón o tasa de cambio promedio (*rcp* o *tcp*) es la pendiente de la recta secante (m_{sec}) que corta a la curva de f entre dos puntos. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 11.14, la curva de $f(x)$ es cortada por las rectas secantes L_1 y L_2 .

La pendiente de la recta secante L_1 , es,

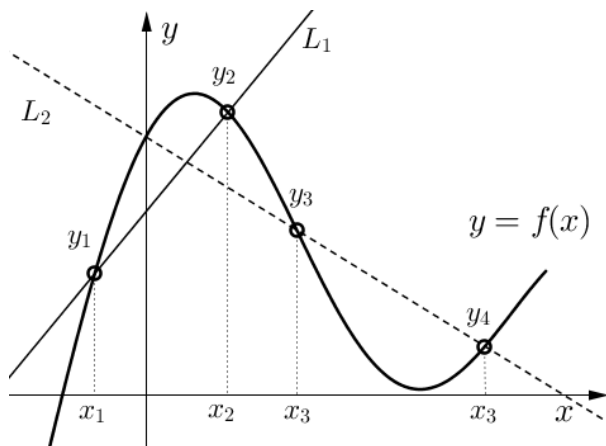


Figura 11.14: Razón de Cambio Promedio.

$$\begin{aligned}
 m_{L_1} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
 rcp &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
 \end{aligned}$$

La pendiente de la recta secante L_2 , es,

$$\begin{aligned} m_{L_2} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} \\ rcp &= \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} \end{aligned}$$

Ejercicio 80 Se da la gráfica de un función $g(x)$, en la Figura 11.15.

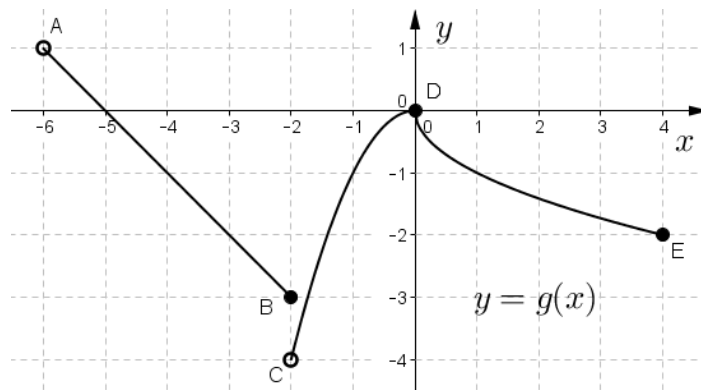


Figura 11.15: Función por partes.

Determine:

1. Evaluar $g(-6)$, $g(-3)$, $g(1)$, $g(x) = -2$, $g(x) = 1$
2. El dominio y el rango de la función, utilice notación de intervalos.
3. Los intervalos en los que g es creciente y en los que g es decreciente.
4. Determine la tasa de cambio promedio de la función g entre los valores dados por los puntos:
 - (a) Entre A y B
 - (b) Entre D y E

11.3.4 Función Inversa

Una función $f(x)$ es *uno a uno* si la gráfica de f pasa la prueba de la recta horizontal, esto es, una recta horizontal desplazada en dirección del eje y corta a la gráfica de la función en un solo punto a lo largo de su desplazamiento.

Si la función $f(x)$ es una función *uno a uno* entonces $f(x)$ tiene función inversa $f^{-1}(x)$. Si f tiene dominio A y contradominio B , entonces su función inversa $f^{-1}(x)$ tendrá dominio B y contradominio o rango A .

En términos simples, se dice que la función inversa, $f^{-1}(x)$, hace lo "contrario" de $f(x)$, por ejemplo, si $f(x)$ convierte a en b , entonces la función inversa, $f^{-1}(x)$, convierte b en a .

Una propiedad que satisface la función inversa es la propiedad de cancelación:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f^{-1}(f(x)) = x \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = x\end{aligned}$$

La gráfica de una función *uno a uno*, $f(x)$, tiene coordenadas (x, y) , la gráfica de su función inversa, $f^{-1}(x)$, tiene coordenadas (y, x) , que resultan de la reflexión de la coordenada (x, y) sobre la recta $y = x$.

La forma simple de obtener la función inversa es:

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Resuelva la ecuación para x en términos de y , si es posible.
3. Intercambiar x y y .

La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo 183 Determine la función inversa, $f^{-1}(x)$, de $f(x) = 2x + 6$.

Siguiendo el procedimiento anterior.

1. Escriba $y = f(x)$, $y = 2x + 6$
2. Resolver para x : $x = \frac{y - 6}{2}$
3. Intercambiar: $y = \frac{x - 6}{2}$, entonces, $f^{-1}(x) = \frac{x - 6}{2}$

Una forma de comprobar es:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f(f^{-1}(x))) = \left(f\left(\frac{x - 6}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{x - 6}{2}\right) + 6 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f^{-1}(f(x))) = (f^{-1}(2x + 6)) = \frac{(2x + 6) - 6}{2} = x$$

Ejemplo 184 Encontrar la inversa de $f(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$

Siguiendo el procedimiento.

1. Escriba $y = f(x)$, $y = \frac{x^5 - 3}{2}$
2. Resolver para x : $x = \sqrt[5]{2y + 3}$
3. Intercambiar: $y = \sqrt[5]{2x + 3}$, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2x + 3}$

Comprobación:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f(\sqrt[5]{2x + 3})) = \frac{(\sqrt[5]{2x + 3})^5 - 3}{2} = \frac{2x + 3 - 3}{2} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \left(f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right)\right) = \sqrt[5]{2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3} = \sqrt[5]{x^5 - 3 + 3} = x$$

11.4 Función Lineal

Una función lineal tiene la forma,

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales, con $m \neq 0$. La función lineal tiene la misma forma que la ecuación de la recta escrita en su forma pendiente-ordenada,

$$y = mx + b$$

Donde b es la ordenada al origen; m es la pendiente de la función lineal se interpreta como una *razón de cambio* definida por la razón del desplazamiento vertical al desplazamiento horizontal, en otras palabras, lo que se eleva a lo que se avanza o recorre horizontalmente en el plano xy , esto es,

$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} \\ m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

La pendiente m en la función lineal es constante a lo largo de la línea recta.

11.4.1 Función Constante

Si en la función lineal el valor de la pendiente es cero, se obtiene la función constante.

$$f(x) = b$$

La función constante tiene la misma forma que la ecuación de la recta horizontal,

$$y = b$$

11.5 Función Cuadrática

Una función cuadrática tiene la forma,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b , y c son números reales, con $a \neq 0$. La función $f(x)$ se conoce como la forma general de la función cuadrática, los términos (t) se identifican de la siguiente manera,

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{t. cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{t. lineal}} + \underbrace{c}_{\text{t. constante}}$$

Note que si $a = 0$, se obtiene una función lineal; si $a = b = 0$ se obtiene la función constante. La forma estándar de la función cuadrática es,

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

donde,

$$\begin{aligned} h &= \frac{b}{-2a} \\ k &= f(h) \end{aligned}$$

definen las coordenadas del vértice de la parábola que describe la función cuadrática. Recuerde que si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba (ramas hacia arriba), si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo (ramas hacia abajo). Con el conocimiento del vértice se puede determinar los intervalos de crecimientos, el valor mínimo o máximo de la función cuadrática, estos se conocen como extremos relativos.

Ejercicio 81 Para la funciones cuadráticas dadas a continuación, determine: las coordenadas del vértice $V(h, k)$; la ordenada al origen o intersección con el eje y , $(0, y)$; la abscisa al origen o intersección con el eje x , $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$; los extremos relativos; la forma estándar o la forma general de la función cuadrática según corresponda; y bosqueje su gráfica.

1. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

2. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $h(x) = 2x^2 - 4x - 1$

4. $g(x) = 3x^2 + 6x - 1$

5. $h(x) = (x - 3)^2 - 9$

6. $f(x) = (x + 4)^2 - 16$

7. $t(x) = x^2 + 8x$

8. $f(x) = -(x - 5)^2 + 25$

9. $g(x) = x^2 - 2x + 2$

10. $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$

11. $f(x) = -3(x - 1)^2 + 1$

12. $h(x) = 2x^2 + x - 6$

13. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

14. $g(x) = x^2 - 8x + 8$

15. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

16. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

17. $g(x) = 2(x + 2)^2 + 3$

18. $h(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4$

19. $f(x) = -(x - 5)^2 + 25$

Ejercicio 82 Para la función:

$$g(x) = 3 - 4x - 4x^2$$

responda si las siguientes afirmaciones son falsas (**F**) o verdaderas (**V**). **Justificar su respuesta**

1. ☐. La función crece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

2. ☐. La función decrece en el intervalo $(0, 2)$.

3. ☐. La gráfica abre hacia arriba.

4. ☐. El valor máximo de la función es $f(x) = 4$.

5. ☐. La parábola corta al eje x en $-\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

6. ☐. La gráfica pasa por el punto $(1, -6)$.

7. ☐. La forma estándar de la función es:

$$h(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4$$

Ejercicio 83 Determine la tasa de cambio promedio de $f(x) = x^2 + 4x$, en el intervalo $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$.

Ejercicio 84 Determine los intervalos de crecimiento (C) y decrecimiento (DC) de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

11.6 Función Racional

El cociente de dos polinomios, tal como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

da lugar a una función racional, el subíndice n es el orden del polinomio del numerador y el subíndice m es el orden del polinomio del denominador. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

donde $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ es un polinomio de orden $n = 3$; $Q(x) = x^2 - 4$ es un polinomio de orden $m = 2$, este cociente de dos polinomios forma una función racional. El dominio de la función racional se encuentra aplicando la regla 1, por lo tanto, el dominio de esta función consiste de todos los números reales tales que $Q(x) \neq 0$, esto es, $x \neq -2$ y $x \neq 2$.

Para entender el comportamiento gráfico de las funciones racionales se presenta en la Tabla 11.3 siguiente la notación de flechas.

Símbolo	Significado
$x \longrightarrow a^+$	x se aproxima a a por la derecha
$x \longrightarrow a^-$	x se aproxima a a por la izquierda
$x \longrightarrow \infty$	x va a más infinito; esto es, x aumenta indefinidamente
$x \longrightarrow -\infty$	x va menos infinito; esto es, x disminuye indefinidamente

Tabla 11.3: Notación de flechas

" x se aproxima" significa que " x " toma valores sucesivos cercanos a " a ", sin ser " a ". La " $\longrightarrow$ " da la idea de esa aproximación, y se puede decir que el valor de " x " tiende a " a ".

11.6.1 Asíntota Vertical

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la función racional $f(x)$ si $f(x) \longrightarrow \infty$ conforme $x \longrightarrow a^+$ o $x \longrightarrow a^-$. La Figura 11.16 muestra este comportamiento.

Las asíntotas verticales en las funciones racionales son las raíces reales del polinomio denominador que no sean raíces del numerador.

11.6.2 Asíntota Horizontal

La recta $y = b$ es una *asíntota horizontal* de la función racional $f(x)$ si $f(x) \longrightarrow b$ conforme $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$. La Figura 11.17 presenta este comportamiento.

Sea la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Considere que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, luego:

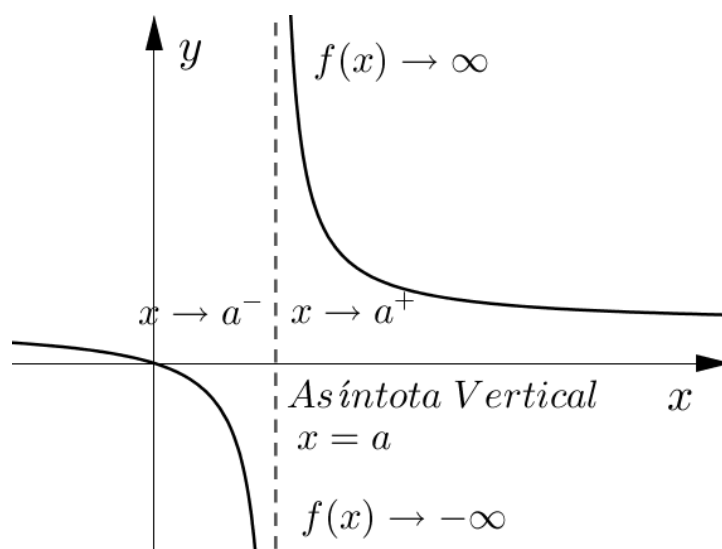


Figura 11.16: $f(x) = \pm\infty$ cuando $x \rightarrow a$ por la izquierda o por la derecha.

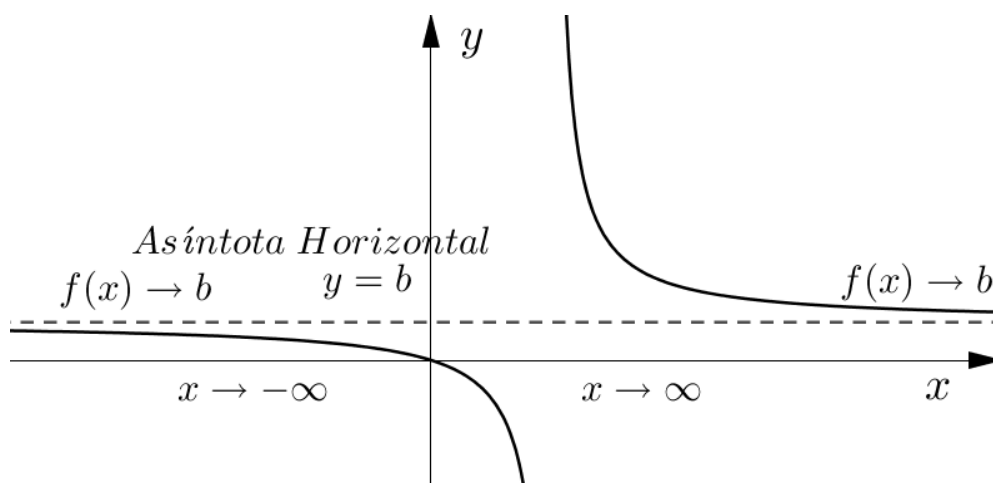


Figura 11.17: $f(x) = b$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. La Asíntota horizontal es $y = b$.

1. Si $Q(r) = 0$ y $P(r) \neq 0$, $x = r$ es una asíntota vertical.
Esto es, r es la raíz del polinomio del denominador, pero no es raíz del polinomio del numerador.
2. Si $n < m$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = 0$ (eje x).
3. Si $n = m$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$.
 a_n y b_m son los coeficientes de los términos de mayor potencia de la variable.
4. Si $n > m$, no hay asíntota horizontal, esta puede ser, oblicua o curva.

Ejemplo 185 Determine las asíntotas verticales y horizontales de la función racional $f(x) = \frac{2x^3}{x^3 - 4x}$.
Al factorizar la función,

$$f(x) = \frac{2x^3}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

se presenta una discontinuidad o hueco en $x = 0$, ya que se cancela el factor común del numerador y denominador, la coordenada del hueco es:

$$y = f(0) = \frac{2(0)^2}{(0-2)(0+2)} = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Las raíces del polinomio del denominador son $x = \pm 2$, las cuales son las asíntotas verticales de $f(x)$.

Aplicando la consideración 3, $n = m$, el orden polinomio del numerador y denominador es 2, ya que

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

con $a = 2$, $b = 1$, por lo tanto la asíntota horizontal es $y = \frac{a}{b} = 2$. En la Figura 11.18 se presenta las características determinadas de esta función racional.

11.7 Transformación de Funciones

La combinación y la composición de funciones son operaciones algebraicas entre funciones para obtener nuevas funciones, de la misma forma las gráficas de la funciones resultantes son transformadas. Una transformación sucede cuando la gráfica de una función original se desplazada vertical o de forma horizontal, se refleja de forma horizontal o vertical, etc.; para obtener una nueva gráfica de una función que guarda las características de la función original.

11.7.1 Desplazamientos Verticales

Sea $f(x)$ y sea c un número positivo ($c > 0$). Con la transformación,

$$g(x) = f(x) \pm c$$

se obtiene una nueva función $g(x)$, cuya gráfica resulta en un desplazamiento vertical de la gráfica de $f(x)$ en c unidades hacia arriba para,

$$g(x) = f(x) + c$$

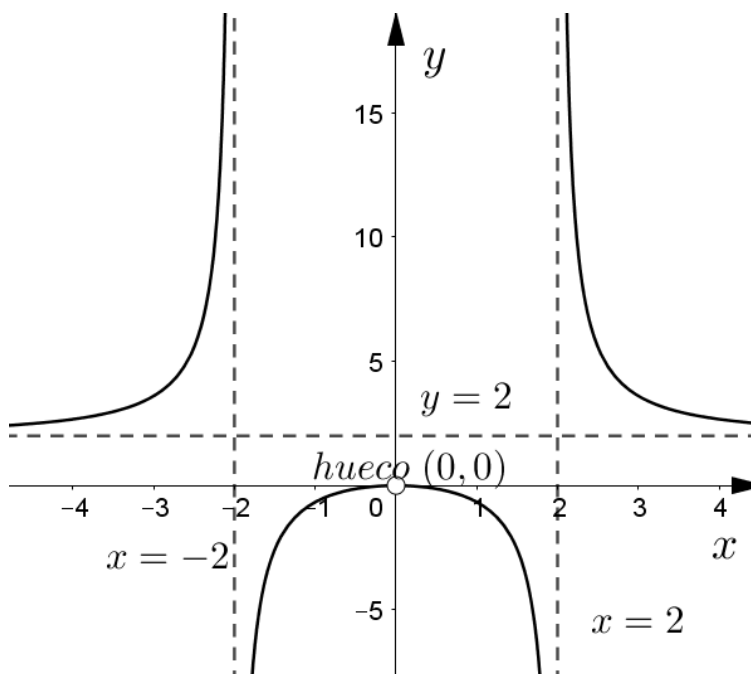


Figura 11.18: Características de una función racional.

o en c unidades hacia abajo para,

$$h(x) = f(x) - c$$

En un desplazamiento vertical sólo la ordenada cambia, esto es, $(x, y + c)$ o $(x, y - c)$, aumentando o disminuyendo su valor.

11.7.2 Desplazamientos Horizontales

Sea $f(x)$ y sea h un número positivo ($h > 0$). Con la transformación,

$$g(x) = f(x - h)$$

se obtiene una nueva función $g(x)$, cuya gráfica presenta un desplazamiento horizontal de la gráfica de $f(x)$ en h unidades hacia la derecha. Con la transformación

$$g(x) = f(x + h)$$

la gráfica de la función se desplaza horizontalmente h unidades hacia la izquierda. En un desplazamiento horizontal sólo la abscisa cambia, esto es, desplazamiento horizontal a la derecha: $(x + h, y)$ o desplazamiento horizontal hacia la izquierda $(x - h, y)$.

11.7.3 Reflexión Horizontal

Con la transformación,

$$g(x) = -f(x)$$

se obtiene una nueva función $g(x)$, cuya gráfica resulta de una reflexión de cada coordenada de la gráfica de $f(x)$ en el eje horizontal. En una reflexión horizontal sólo la ordenada cambia, esto es, $(x, -y)$.

11.7.4 Reflexión Vertical

Con la transformación,

$$g(x) = f(-x)$$

se obtiene una nueva función $g(x)$, cuya gráfica resulta de una reflexión de cada coordenada de la gráfica de $f(x)$ en el eje vertical. En una reflexión vertical sólo la abscisa cambia, esto es, $(-x, y)$.

11.7.5 Alargamientos y Acortamiento Vertical

Con la transformación,

$$g(x) = cf(x)$$

se obtiene una nueva función $g(x)$ cuya gráfica de $g(x)$ resulta de:

1. Si $c > 1$ la gráfica de $f(x)$ se alarga verticalmente por un factor de c , esto es, la ordenada de cada punto sobre la curva $f(x)$ cambia ahora a cy .
2. Si $0 < c < 1$, la gráfica de $f(x)$ se acorta verticalmente por un factor de c , esto es, la ordenada de cada punto sobre la curva $f(x)$ cambia ahora a cy .

Esto es, en un alargamiento o acortamiento vertical sólo la ordenada cambia su valor, aumentando o disminuyendo por un factor de c , esto es, (x, cy) .

11.7.6 Alargamiento y Acortamiento Horizontal

Con la transformación,

$$g(x) = f(cx)$$

se obtiene una nueva función $g(x)$ cuya gráfica de $g(x)$ resulta de:

1. Si $c > 1$ la gráfica de $f(x)$ se acorta horizontalmente por un factor de c , esto es, la abscisa de cada punto sobre la curva $f(x)$ cambia ahora a x/c , esto es, $\left(\frac{x}{c}, y\right)$.
2. Si $0 < c < 1$, la gráfica de $f(x)$ se alarga horizontalmente por un factor de $1/c$, esto es, la abscisa de cada punto sobre la curva $f(x)$ cambia ahora a x/c , esto es, $\left(\frac{x}{c}, y\right)$.

Ejercicio 85 Bosqueje la gráfica de la función, no mediante la graficación de puntos, sino con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones. Utilice GeoGebra para corroborar sus resultados.

1. $f(x) = x^3 - 4$

2. $h(x) = \frac{1}{x} + 2$

3. $g(x) = \frac{1}{x^2} - 3$

4. $f(x) = 2(x - 2)^2$

5. $h(x) = -(x + 3)^2$

6. $f(x) = -0.5(x - 4)^2$

7. $h(x) = (2x + 1)^3 + 2$

8. $f(x) = \frac{1}{-2x + 1}$

9. $g(x) = -\frac{1}{x^2} - 3$

10. $h(x) = \frac{-1}{(x + 4)^2} - 3$

11. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

12. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

13. $g(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

$$14. h(x) = 3 - 2(x - 1)$$

$$15. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$$

11.8 Funciones Exponenciales y Funciones Logarítmicas

11.8.1 Funciones Exponenciales

Las funciones que se han estudiado a este momento son funciones del tipo,

$$f(\text{variable}) = (\text{base variable})^{\text{potencia constante}}$$

por ejemplo,

$$f(x) = x^2, \quad h(z) = 3z^4 + 2z^2 + z^{1/2}, \quad g(t) = (t^2 + 1)^2, \dots, \text{etc.}$$

donde el exponente puede ser un número entero o fraccionario y la base una variable real.

En esta sección se consideran funciones que tienen la forma,

$$f(\text{variable}) = (\text{base constante})^{\text{potencia variable}}$$

por ejemplo,

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = 4^{-x}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \dots, \text{etc.}$$

las cuales se conocen como funciones exponenciales. En general, la *función exponencial con base a* se define como,

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.

Para enfatizar: la base es positiva, no tiene caso tener al número "1" como base, ya que uno elevado a cualquier número real es uno, se excluye al cero y valores negativos.

Por lo tanto, a toma valores en los intervalos,

$$(0, 1) = 0 < a < 1 \quad \text{y} \quad (1, \infty) = 1 < a$$

En estos intervalos la gráfica de la función exponencial tiene una de las formas dadas en las Figuras 11.19 y 11.20. Para la función exponencial con $a > 1$, el comportamiento se identifica como *crecimiento exponencial*; con a en el intervalo $0 < a < 1$, el comportamiento se identifica como *decrecimiento exponencial*.

La función exponencial es una función uno a uno, con dominio $\mathbb{R}$ y contradominio o rango de $(0, \infty)$, ver las gráficas de la Figuras 11.19 y 11.20.

En las funciones exponenciales la potencia puede ser una expresión algebraica simple o compuesta, de tal forma que tenemos funciones como:

$$f(x) = 4^{(2x^2+1)}; \quad g(x) = 10^{(-x+x^3)}; \text{etc.}$$

una forma de referirnos al exponente de una función exponencial es como *argumento* (arg), así que, en los ejemplos anteriores, $2x^2 + 1$ y $-x + x^3$, es el argumento de función exponencial.

La forma general de una función exponencial es,

$$f(x) = a^{(\text{expresión algebraica})} = a^{(\text{arg})} = a^{g(x)}$$

el argumento es una función de la variable independiente, por lo tanto, el argumento se identifica como $\arg = g(x)$.

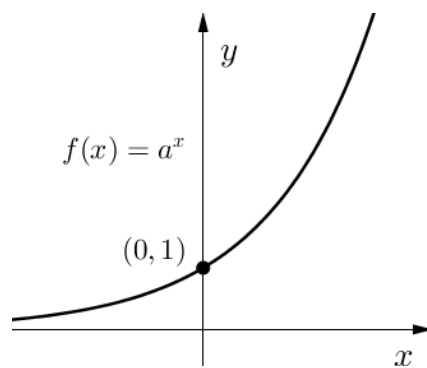


Figura 11.19: Crecimiento Exponencial. $f(x) = a^x$, con $1 < a$.

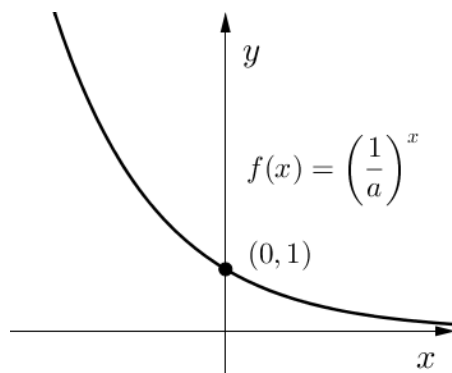


Figura 11.20: Decrecimiento Exponencial. $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$.

Para que la función exponencial este definida el arg de la función debe definir un número real. Cualquier número positivo puede ser usado como la base de la función exponencial, se usan frecuentemente las bases 2 y 10, pero la base mas importante utilizada en las ciencias e ingeniería, es el número e que se conoce como número de Euler, se define como el valor que se aproxima por la expresión algebraica,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n , entero positivo, tiende a un valor positivo muy grande. En forma simbólica, está descripción en el cálculo diferencial se escribe,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Un cálculo aproximado de este valor se muestra en la Tabla 11.4.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000...
5	2.488 32...
10	2.59374...
100	2.70481...
1000	2.71692...
10,000	2.71815...
100,000	2.71827...
1,000,000	2.71828...
10,000,000	2.71828...

Tabla 11.4: Valor de e

Así se tiene funciones del tipo,

$$f(x) = e^x; g(x) = e^{-x^2}; \text{ etc.}$$

la cual se conocen como *función exponencial natural*.

Ejemplo 186 Graficar la función exponencial $f(x) = 2^x$.

Su gráfica se puede obtener tabulando $f(x) = 2^x$ en el intervalo $[-3, 3]$, como se muestra en la Tabla 11.5 y su gráfica correspondiente en la Figura 11.21. El dominio y el rango se muestra el pie de la figura.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Tabla 11.5: Función exponencial base 2.

11.8.2 Familia de Funciones Exponenciales

En las Figuras ?? y ?? se presentan las gráficas de funciones exponenciales típicas con bases diferentes, note que curvas de $f(x)$ pasan por la coordenada $(0, 1)$, ya que $a^0 = 1$. El grupo de

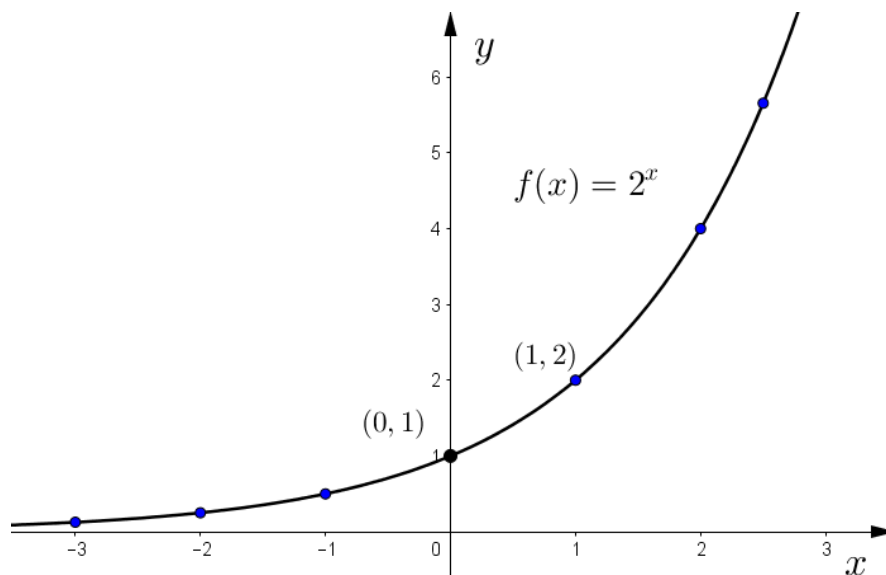


Figura 11.21: $f(x) = 2^x$, dominio: $(-\infty, \infty)$, rango: $(0, \infty)$.

funciones exponenciales con base $a > 1$ presentan un crecimiento exponencial mas pronunciado con un valor mayor de a . La familia de funciones exponenciales con base a en el intervalo $(0, 1)$, presentan un decrecimiento exponencial más pronunciado con un valor mayor de la base a . El eje x o $y = 0$, para ambos casos es una asíntota horizontal.

Transformación de Funciones Exponenciales

La gráfica de una función exponencial puede ser obtenida mediante la transformación de funciones, como se presenta en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 187 Trace la gráfica de la función $f(x) = e^{x-1} + 2$, mediante la transformación de funciones.

1. Función estándar, $f_1(x) = e^x$, con la transformación,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x-1) \\ &= e^{x-1} \end{aligned}$$

la gráfica de f_1 se desplaza horizontalmente a la derecha en una unidad.

2. Con la transformación,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_2(x) + 2 \\ &= e^{x-1} + 2 \end{aligned}$$

la gráfica f_2 se recorre verticalmente hacia arriba en dos unidades, la gráfica de las transformaciones correspondientes se da en la Figura 11.24.

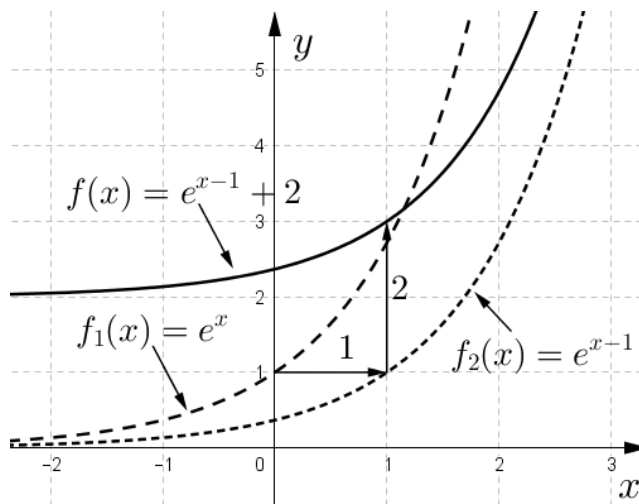


Figura 11.24: Gráfica de $f(x) = e^{x-1} + 4$, se indican las transformaciones utilizadas.

Note que:

$$\begin{aligned} \text{Dominio:} & \quad \mathbb{R} \\ \text{Rango:} & \quad [2, \infty) \\ \text{Asíntota horizontal:} & \quad y = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 86 Aplicando transformación de funciones grafique las funciones siguientes, determine el dominio, el rango y la asíntota en cada de que exista. Utilice GeoGebra para corroborar sus resultados.

1. $f(x) = -2^x$
2. $f(x) = -2^{-x} + 1$
3. $f(x) = 10^x$
4. $h(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
5. $y = e^{x-3} + 4$
6. $g(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+3}$

7. $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$
8. $g(x) = -2 + e^{-x-1}$
9. $y = -1 - 2^x$
10. $h(x) = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$
11. $h(x) = -1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
12. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$
13. $y = -2^{x-3} + 4$

11.8.3 Dominio de Funciones Exponenciales

Para una función exponencial con base a ,

$$f(x) = a^{\arg}$$

este definida el

$$\arg = g(x)$$

debe definir un **número real**. Para encontrar en dominio de la función real $g(x)$, se aplican las reglas vistas en la sección 1.

Ejemplo 188 Determine el dominio de la función $f(x) = 2e^{x-1}$.

El arg = $x - 1$, el arg debe ser un número real, por lo tanto, x puede ser un número positivo, negativo o cero, se dice entonces que el dominio de la función es el conjunto de los reales ($\mathbb{R}$).

Ejemplo 189 Determine el dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$.

El arg = $\frac{x+1}{x}$, para $x = 0$ el arg no define un número real, por lo tanto el dominio es $x \neq 0$. La Figura 11.25 muestra la función exponencial.

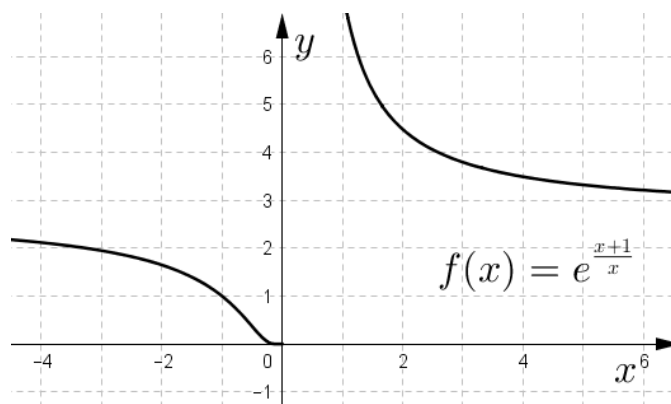


Figura 11.25: Gráfica de $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$.

Ejemplo 190 Determine el dominio de la función $f(x) = e^{\sqrt{x+2}}$.

El arg = $\sqrt{x+2}$, para que el argumento defina un número real:

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

por lo tanto, el dominio se encuentra en el intervalo $[-2, \infty)$. La Figura 11.26 muestra la gráfica de la función

Ejercicio 87 Determine el dominio de las funciones siguientes, en cada caso de su respuesta en forma: gráfica (recta numérica), de desigualdad y de intervalo. Utilice GeoGebra para corroborar sus resultados.

1. $f(x) = e^{(x-2)^2}$

2. $f(x) = e^{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$

3. $h(x) = \frac{1}{x} + e^x$

4. $g(x) = e^{\sqrt{x}} + 1$

5. $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

6. $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)(x+2)}$

7. $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

8. $g(x) = e^{\sqrt{x^2-2}}$

9. $h(x) = (x-1)e^{\sqrt{x^2-2}}$

10. $f(x) = \frac{(x-1)}{e^{x-1}}$

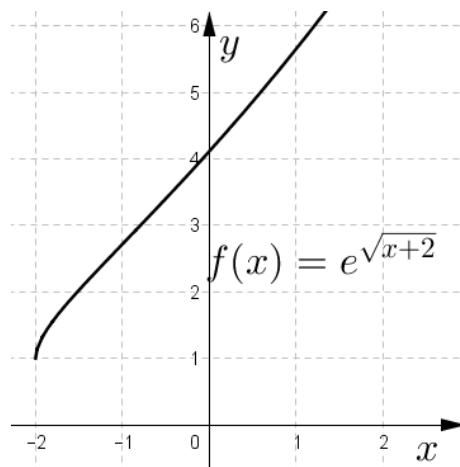


Figura 11.26: Gráfica de $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$, utilizada.

11.9 Función Logarítmica

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial

$$y = f(x) = a^x$$

tiene una función inversa,

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$$

recuerde, el $\log_a y$ es el **exponente** (x) al cual se debe elevar la base a para obtener y , intercambiando las variables, se tiene que la *Función Logarítmica con base a* , está dada por:

$$\log_a x = y$$

o en notación funcional,

$$f(x) = \log_a x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real positivo, esto significa que no existen logaritmos de números negativos ni del cero, por lo tanto, el dominio de f es $(0, \infty)$ y su rango es $\mathbb{R}$.

Note que la función logarítmica tiene como dominio al rango de la función exponencial y como rango al dominio de esa misma función.

La base a toma valores en los intervalos,

$$(0, 1) = 0 < a < 1 \quad \text{y} \quad (1, \infty) = 1 < a$$

La base de logaritmo que se utiliza frecuentemente es $a = 10$ y $a = e$, esto da lugar a dos tipos de funciones logarítmicas, la función *logarítmica común*, *decimal* o *base 10*, el cual se denota omitiendo la base,

$$f(x) = \log x$$

y la función *logarítmica natural* o *base e* el cual se denota por,

$$f(x) = \ln x$$

La forma general de identificar una función logarítmica es,

$$f(x) = \log_a(\arg)$$

el $\arg = g(x)$ es una función de la variable independiente.

Ejemplo 191 En las funciones logarítmicas siguientes se identifica el $\arg$ o $g(x)$ y la base (a).

1. $f(x) = \log x^2 + 1$, $\arg = g(x) = x^2$; $a = 10$.
2. $h(x) = \log_2 \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)$, $\arg = g(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$; $a = 2$.
3. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{(x-1)(x+2)}$, $\arg = g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{(x-1)(x+2)}$; $a = e$.
4. $h(x) = \log_5 \frac{x^2(x-1)^2}{x+2}$, $\arg = g(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{x+2}$; $a = 5$.
5. $h(x) = \ln \frac{(x-1)}{x+2} + 1$, $\arg = g(x) = \frac{(x-1)}{x+2}$; $a = e$.
6. $f(x) = \log_{1/2} x^3 + 3x$, $\arg = g(x) = x^3$; $a = 1/2$.

Ejemplo 192 El argumento de una función logarítmica puede ser simplificado, por ejemplo,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{(x^3 - 1)(x^2 - 4)}{(x-1)(x+2)} = \ln \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \\ f(x) &= \ln (x^2 + x + 1)(x-2) \end{aligned}$$

Ejemplo 193 Graficar la función exponencial $y = f(x) = \log_2 x$.

La forma exponencial de la función logarítmica es

$$y = \log_2 x \Leftrightarrow 2^y = x$$

Su gráfica se puede obtener tabulando $x = 2^y$ en el intervalo de y de $[-3, 2]$, esto es, se da y y se calcula x , como se muestra en la Tabla 11.6, anexa a la Figura 11.27. El dominio y el rango se muestra el pie de la figura.

y	-3	-2	-1	0	1	2
$x = 2^y$	1/8	1/4	1/2	1	2	4

Tabla 11.6: Función exponencial base 2.

11.9.1 Familia de Funciones Logarítmicas

En las Figuras 26 y 27 se presentan gráficas de funciones logarítmicas con diferente base, en ambos casos las curvas de $f(x)$, pasan por la coordenada $(1, 0)$, ya que $\log_a 1 = 0$.

Para la familia de funciones logarítmicas con base $a > 1$, un valor mayor de la base a presenta un crecimiento menos pronunciado, ver Figura 11.28; para la familia de funciones logarítmicas con base a en el intervalo $(0, 1)$, un valor mayor de la base a presenta un decrecimiento menos pronunciado, ver Figura 11.29. El eje de y o $x = 0$, para ambos casos es una asíntota vertical.

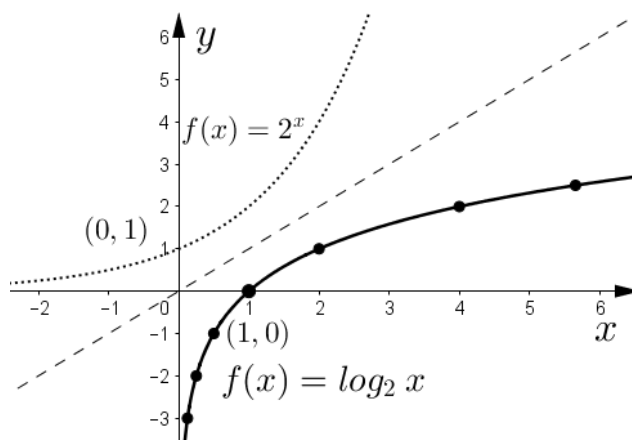


Figura 11.27: $f(x) = \log_2 x$, dominio: $(0, \infty)$, rango: $(-\infty, \infty)$.

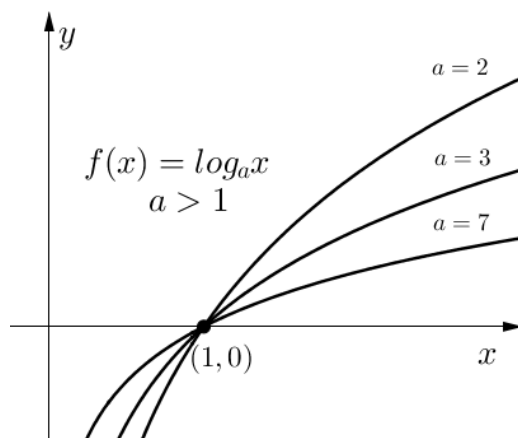


Figura 11.28: $f(x) = \log_a x$, dominio: $(0, \infty)$, rango: $(-\infty, \infty)$.

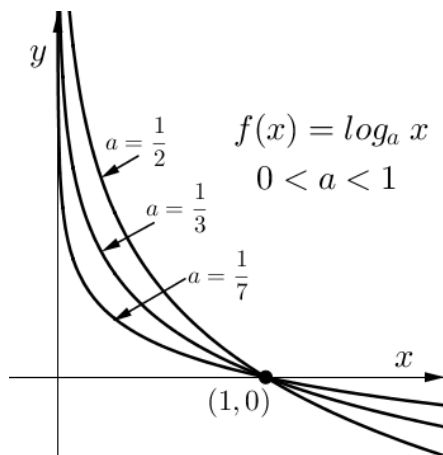


Figura 11.29: $f(x) = \log_a x$, dominio: $(0, \infty)$, rango: $(-\infty, \infty)$.

11.10 Dominio de funciones logarítmicas

Sea la función logarítmica con base a ,

$$f = \log_a(\arg)$$

Para que la función este definida se debe cumplir que,

$$\arg = g(x) > 0$$

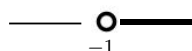
esto es, el $\arg$ debe definir un **número real positivo**, ya que no está definido el logaritmo de cero ni de números negativos.

Los ejemplos siguientes muestran como se aplican los criterios de la sección 1, se utiliza *GeoGebra* para mostrar la gráfica correspondiente y que el lector identifique el rango y el dominio.

Ejemplo 194 Determine el dominio de la función $f(x) = \log(x+1)$.

Se requiere que $x+1 > 0$. El dominio es entonces,

$$x > -1 \Leftrightarrow (-1, \infty)$$



Ejemplo 195 Determine el dominio de $f(x) = \ln(x-1)(x+2)$.

El argumento de la función logaritmo debe ser:

$$(x-1)(x+2) > 0$$

Los valores críticos son $x = 1$, $x = -2$, los cuales dividen a la recta numérica en tres intervalos abiertos, el análisis de los signos se indica para cada intervalo.

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{(-\infty, -2)}{(-)(-)=+} & \frac{(-2, 1)}{(-)(+)= -} & \frac{(1, \infty)}{(+)(+)=+} \\ \hline & -2 & 1 \end{array}$$

por lo tanto, el dominio de la función es:

$$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

En la Figura 11.30 se muestra la gráfica de la función con las asíntotas verticales.

Ejemplo 196 Determine el dominio de $f(x) = \ln \frac{x-1}{x^2+2x-8}$.

El argumento de la función debe cumplir:

$$\frac{x-1}{x^2+2x-8} > 0$$

Factorizando la expresión

$$\frac{x-1}{(x+4)(x-2)} > 0$$

Los valores críticos $x = 1$, $x = -4$, y $x = 2$; dividen la recta numérica en cuatro intervalos abiertos, el análisis de los signos se indica para cada intervalo.

$$\begin{array}{c|c|c|c} \frac{x < -4}{\frac{(-)}{(-)(-)} = -} & \frac{-4 < x < 1}{\frac{(-)}{(+)(-)} = +} & \frac{1 < x < 2}{\frac{(+)}{(+)(-)} = -} & \frac{2 < x}{\frac{(+)}{(+)(+)} = +} \\ \hline & -4 & 1 & 2 \end{array}$$

por lo tanto, el dominio de la función es, $-4 < x < 1$, $2 < x$; en notación de intervalos $(-4, 1) \cup (2, \infty)$. La Figura ?? presenta la gráfica de la función con las asíntotas verticales.

Capítulo 12

Límite de una función

La comprensión del concepto de límite es fundamental para el estudio del cálculo, tanto diferencial como integral. Problemas de variación y tasas o razones cambió instantánea, en velocidad, costos, ingresos, etc., se determinan mediante el concepto de límite. Estudio de límites de funciones permite generalizar la determinación de tasas de cambio para cualquier tipo de función que represente una magnitud física, económica, biológica, etc.

12.1 Comprensión Numérica, Gráfica y Algebraica del Concepto de Límite

12.1.1 Determinación de Límites Numéricamente

Considere la función siguiente,

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Utilizando los procedimientos del primer Capítulo, se tiene que, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1\}$, o de otra forma $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, o en forma gráfica

o simplemente, la función $f(x)$ no puede procesar el valor de $x = 1$.

Pregunta: ¿Como se comporta numéricamente la función $f(x)$ en la proximidad del valor de $x = 1$?

Para investigar este comportamiento se requiere evaluar $f(x)$ en valores cercanos a "1", sin que $x = 1$, se puede aproximar a "1" por la izquierda, denotado por: $x \rightarrow 1^-$, o por la derecha denotado por: $x \rightarrow 1^+$; la " $\rightarrow$ " indica la aproximación a un valor. En la Tabla 12.1 se presenta los valores numéricos de $f(x)$ al ser evaluada en la cercanía de 1. El símbolo ∞ indica que la función esta indefinida en "1".

	$x \rightarrow 1^-$				$1^+ \leftarrow x$		
x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	∞	3.001	3.01	3.1
	$f(x) \rightarrow 3$				$3 \leftarrow f(x)$		

Tabla 12.1: Comportamiento numérico de f(x)

Se observa que el valor de la función se aproxima a 3, indicado por $f(x) \rightarrow 3$ conforme $x \rightarrow 1^-$ o $x \rightarrow 1^+$, esto es, el valor de la función se aproxima a 3 conforme x se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha.

Es **importante hacer notar** que " x se aproxima" significa que " x " toma valores sucesivos cercanos a "1", sin ser "1". La " $\rightarrow$ " indica esa aproximación o tendencia hacia a 1; se puede decir que el valor de " x " tiende a "1" y el valor de $f(x)$ tiende a 3. Este comportamiento intuitivo de aproximación da la idea de **límite** (lim).

En el lenguaje matemático del cálculo, la pregunta puede formularse así, determine,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

La respuesta es, conforme $x \rightarrow 1^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

y cuando $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Ya que los límites laterales, por la izquierda y por derecha son iguales y existen, entonces, el límite de la función existe, y es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Enfatizar: Cuando encontramos un límite, no se está interesado en el valor que $f(x)$ cuando x es igual a , sino sólo en el valor al que se va aproximando, no importando si el valor de la función no está definido en $x = a$. Además un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a . Esto es, el límite debe ser el mismo si x se acerca a a por la izquierda o por la derecha.

En este capítulo estimaremos el límite de funciones, numéricamente, como en el ejemplo anterior, utilizando la aplicación de la hoja de cálculo de Google; gráficamente, utilizando *GeoGebra* o algún otro software; y algebraicamente mediante evaluación directa y simplificación de expresiones algebraicas, entre otros.

Ejemplo 198 Determine el límite $f(x) = x^2 + 1$ cuando x se aproxima a 2. El la jerga matemática,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$$

La Tabla 12.2 muestra el comportamiento numérico de la función en la proximidad de $x = 2$. Note que el límite de $f(x)$ coincide con $f(2)$, en este caso se dice que la función es continua en $x = 2$. Se tiene que, entonces

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.61	4.9601	4.996001	5	5.004001	5.0401	5.41
	$f(x) \rightarrow 5$				$5 \leftarrow f(x)$		

Tabla 12.2: Límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$$

por lo tanto, el límite existe y es,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$$

así que f es continua en $x = 2$.

Ejemplo 199 Determine numericamente,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

En la Tabla 12.3, se muestra el cálculo numérico.

	$x \longrightarrow 2^-$				$2^+ \longleftarrow x$		
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	-10.0	-100.0	-1000.0	$-\infty$	∞	1000.0	100.0
	$f(x) \longrightarrow -\infty$				$\infty \longleftarrow f(x)$		

Tabla 12.3: Determinación del lim numericamente

Ya que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$

esto es

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$$

el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$ no existe.

Ejemplo 200 Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

En la Tabla 12.4 se muestra el cálculo numérico,

	$x \longrightarrow 0^-$				$0^+ \longleftarrow x$		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-1.0	-1.0	-1.0	∞	1.0	1.0	1.0
	$f(x) \longrightarrow -1$				$1 \longleftarrow f(x)$		

Tabla 12.4: Determinación numérica del Lim de f(x)

Ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

esto es

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$$

el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

Ejemplo 201 Determine el límite de $g(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando x se aproxima a "0". Es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

En la Tabla 12.5 se muestra el cálculo numérico,

	$x \longrightarrow 0^-$				$0^+ \longleftarrow x$		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	100	10 000	1 000 000	∞	1 000 000	10 000	100
	$f(x) \longrightarrow \infty$				$\infty \longleftarrow f(x)$		

Tabla 12.5: Determinación numérica de Lim de g(x)

Ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

esto es, cuando x se aproxima por la derecha o por la izquierda a "0", $g(x)$ crece sin límite y por lo tanto no se aproxima a algún número, el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ no existe, se escribe,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Recordemos la pregunta hecha al inicio: **¿Como se comporta numéricamente la función $f(x)$ en la proximidad del valor de $x = a$?** La pregunta equivalente es, determine,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

esto es, determinar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a un valor a , o un valor finito, es decir, cuantificable, medible y conocido. Este tipo de límite se conocen como **límites finitos**; a diferencia de los que se explican en la sección siguiente.

Ejercicio 89 Determine el límite, si existe, mediante el cálculo numérico indicado por la tabla, puede utilizar la aplicación de la hoja de cálculo de Google.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

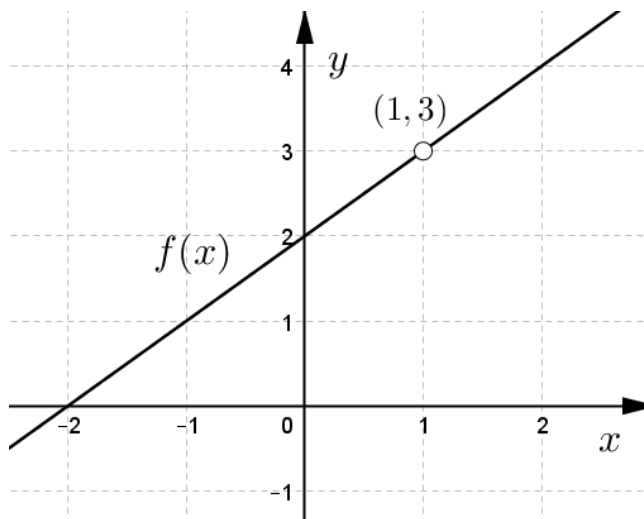
x	-0.9	-0.99	-0.999	-1	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$							

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$							

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 21}{x - 1}$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$							

Figura 12.1: Límite de $f(x)$ y discontinuidad o hueco en $(1, 3)$.

12.1.2 Determinación de Límites Gráficamente

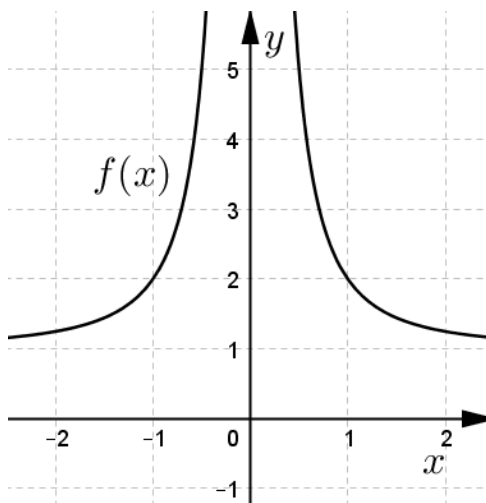
Ejemplo 202 Dada la función $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.1, determine el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

De la gráfica se observa que $f(x) \rightarrow 3$ conforme $x \rightarrow 1^-$ o $x \rightarrow 1^+$, el valor de la función se aproxima a 3 conforme x se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

En el punto $(1, 3)$ existe un hueco o discontinuidad, $f(1)$ no está definida.

Ejemplo 203 Dada la función $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.2, determine el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Figura 12.2: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

De la gráfica $f(x) \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow 0^-$ o $x \rightarrow 0^+$, el valor de $f(x)$ crece infinitamente conforme x se aproxima a "0" por la izquierda o por la derecha. Entonces, el límite no existe,

se denota como,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

Ejemplo 204 Dada la función $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.3, determine el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

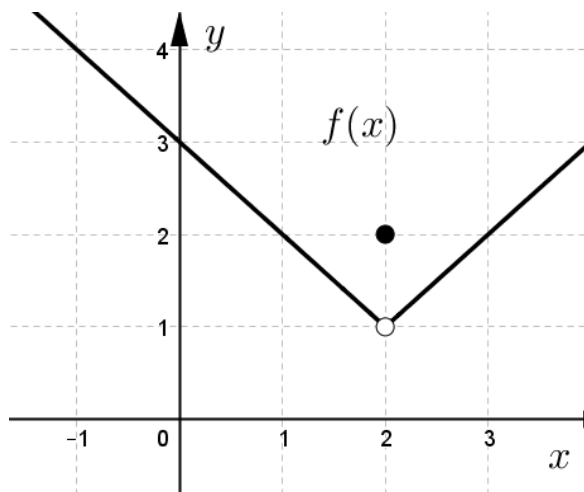


Figura 12.3: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

La gráfica de $f(x)$ corresponde a una función por partes. $f(x) \rightarrow 1$ conforme $x \rightarrow 2^-$ o $x \rightarrow 2^+$, por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

note en la gráfica que $f(2) = 2$,

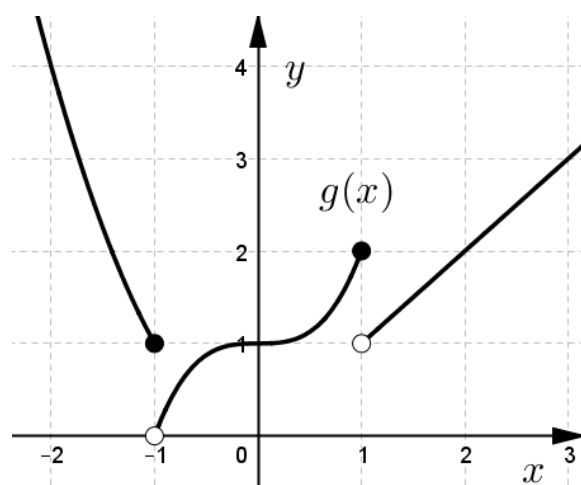
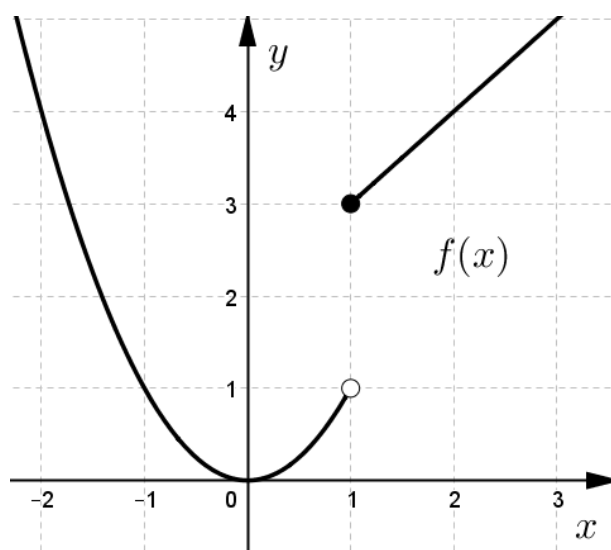
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$$

por lo tanto f no es continua en $x = 2$.

Ejercicio 90 Dada la función $g(x)$ en forma gráfica, Figura 12.4, determine lo siguiente:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$
5. $g(-1)$
6. $g(1)$
7. $g(x) = 4$

Ejercicio 91 Dada la función por partes $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.5, Determine:

Figura 12.4: Función por partes $g(x)$.Figura 12.5: Función por partes $f(x)$.

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Ejercicio 92 Dada la función por partes $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.6,

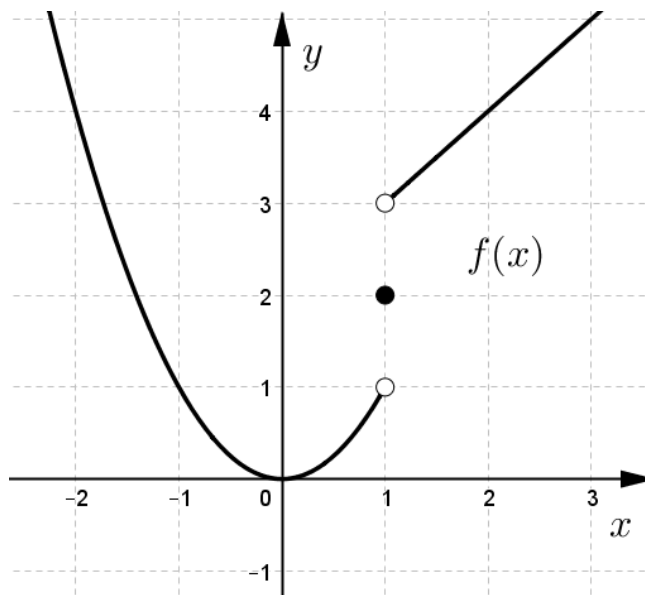


Figura 12.6: Función por partes $f(x)$.

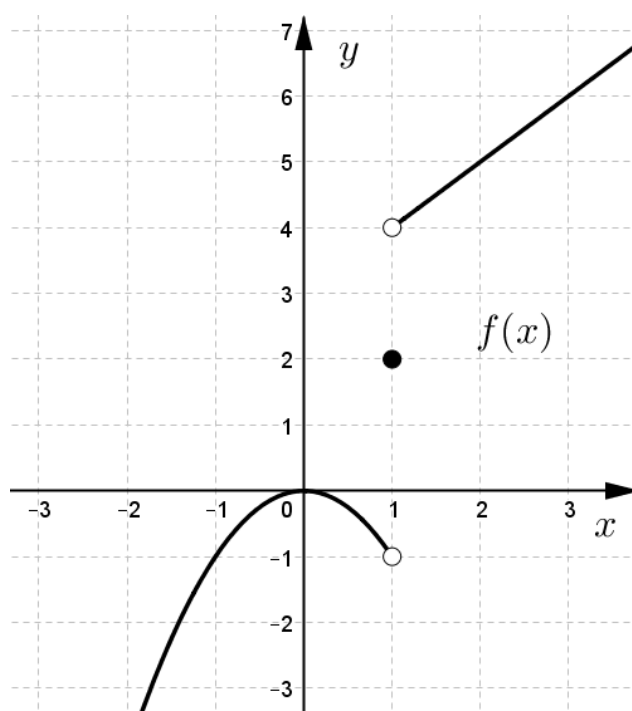
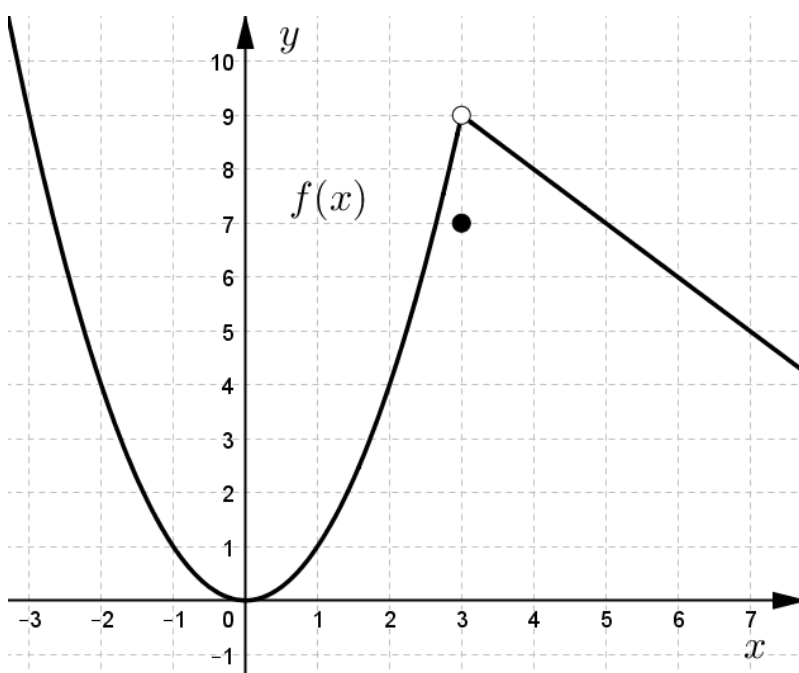
Determine:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
4. $f(1)$

Ejercicio 93 Dada la función por partes $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.7,

Determine:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
4. $f(1)$

Figura 12.7: Función por partes $f(x)$.Figura 12.8: Función por partes $f(x)$.

Ejercicio 94 Dada la función por partes $f(x)$ en forma gráfica, Figura 12.8, Determine:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
4. $f(1)$

12.1.3 Propiedades de Límites

Las siguientes propiedades, reglas o leyes de límites, pueden usarse para calcular límites en forma algebraica.

Supongamos que c es una constante y los límites de las funciones f y g cuando x se aproxima a a son,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

Entonces lo siguiente se cumple.

1. El límite de una suma de funciones es la suma de los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= L + M \end{aligned}$$

2. El límite de una diferencia de funciones es la diferencia de los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= L - M \end{aligned}$$

3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} cf(x) &= c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= cL \end{aligned}$$

4. El límite de un producto de funciones es el producto de los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= M \cdot L \end{aligned}$$

5. El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \\ &= \frac{M}{L} \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de las propiedades anteriores y la definición de límite.

6. El límite de una potencia de una función es la potencia del límite de la función:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n &= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo} \\ &= L^n\end{aligned}$$

7. El límite de una función constante es la constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

8. El límite de x cuando x se acerca a a es a :

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

9. El límite de x^n cuando x se acerca a a es a^n :

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo}$$

10. El límite de la n -ésima raíz de x cuando x se acerca a a es la n -ésima raíz de a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo}$$

(Si n es par, asuma que $a > 0$).

11. El límite de la n -ésima raíz de $f(x)$ en la n -ésima raíz del límite de $f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \\ &= L^{1/n}\end{aligned}$$

(Si n es par, suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$).

12. Si $f(x)$ es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) \\ &= L\end{aligned}$$

12.1.4 Determinación Algebraica de Límites

Se puede evaluar límites de las funciones aplicando la propiedad **12**, siempre y cuando el valor al que se aproxime x se encuentre en el dominio de la función, es decir, se puede evaluar el límite de la función, evaluando la función directamente en el valor $x = a$. Los ejemplos siguientes muestra la determinación de límites mediante el método algebraico.

Ejemplo 205 Evaluación algebraica de límites de funciones.

Las propiedades que se aplican repetidamente son la 1, 2, 3. En todos los casos, el valor al que se aproxima la variable está dentro del dominio de la función, por lo tanto, pueden ser evaluados directamente.

$$1. \lim_{t \rightarrow -5} (t^2 - 5) = ((-5)^2 - 5) = 20$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -5} (3x^2 - 4x + 2x - 3) = \left(3(-5)^2 - 4(-5) + 2(-5) - 3 \right) = 82$$

$$3. \lim_{r \rightarrow 2} \frac{4r - 3}{11} = \frac{4(2) - 3}{11} = \frac{5}{11}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 2}{x + 5} = \frac{-3 - 2}{-3 + 5} = -\frac{5}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{(-6)^2 + 6}{(-6) - 6} = -\frac{7}{2}$$

$$6. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{0^2 - 7(0) + 1} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} 2x^3 \sqrt{x^2 + 7} = 2(3)^3 \sqrt{3^2 + 7} = 54\sqrt{16} = 216$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 6}{x - 6} = \frac{(-6)^2 + 6}{-6 - 6} = -\frac{7}{2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + x + 5} = \sqrt{4^2 + 4 + 5} = 5$$

Ejemplo 206 Determine $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$

El valor de $x = 2$ no está en el dominio de la función, por lo tanto, la evaluación directa conduce a una forma indeterminada, como se muestra,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(2^2 - 4)}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Es posible encontrar el límite al eliminar la indeterminación y encontrar una función equivalente, como se muestra a continuación.

Sea

$$f(x) = \underbrace{\frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}}_{\substack{\text{función} \\ \text{original} \\ \text{para } x \neq 2.}} = \underbrace{\frac{4(x - 2)(x + 2)}{x - 2}}_{\text{Proceso algebraico}} = \underbrace{4(x + 2)}_{\substack{\text{función} \\ \text{equivalente}, \\ g(x), \text{ para } x \neq 2.}}$$

Luego:

$$f(x) \equiv g(x)$$

de tal forma que

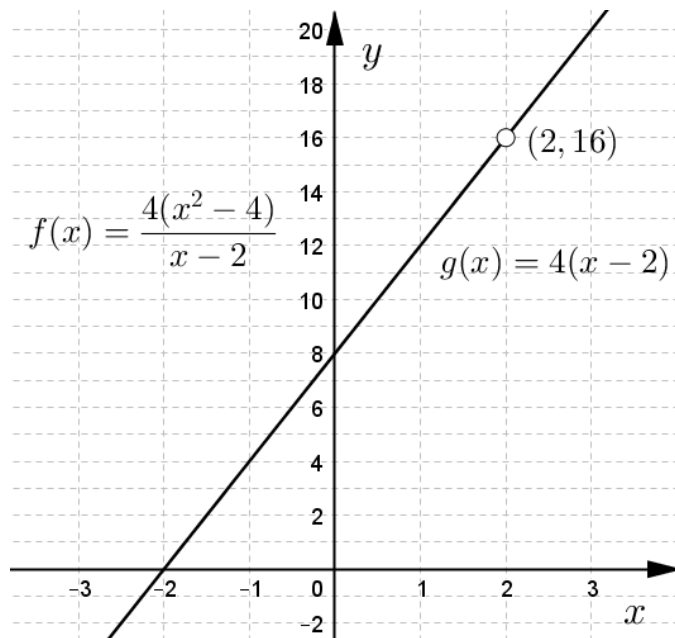
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} 4(x + 2) \end{aligned}$$

Finalmente por evaluación directa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 4(x + 2) &= 4(2 + 2) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Recordemos que este valor, no es el valor de la función en $x = 2$, es el valor al que se aproxima la función cuando x se aproxima a 2 por la izquierda o derecha de x .

En $f(x)$ el factor que se cancela $x - 2 = 0$ causa una indeterminación en $x = 2$ y $g(2) = 4(2 + 2) = 16$. Como se muestra en la gráfica de la Figura 206, existe un hueco en $(2, 16)$.



Ejemplo 207 Evaluación algebraica de límites de funciones cancelando la indeterminación.

$$1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{3x^2 + 8x + 15}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 9)(x - 3)(x + 3)}{(x + 5)(x + 3)} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 9)(x - 3)}{x + 5} \\ &= \frac{((-3)^2 + 9)(-3 - 3)}{-3 + 5} = -54 \end{aligned}$$

$$\text{Clave: } x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = (x^2 + 9)(x - 3)(x + 3)$$

$$\text{Hueco en la abscisa } x + 3 = 0, x = -3; \text{ ordenada } y = \frac{((-3)^2 + 9)(-3 - 3)}{-3 + 5} = -54, \text{ en } (-3, -54)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{2x^2 + 5x - 14}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 5)(x - 2)}{(x + 7)(x - 2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x + 5)}{(x + 7)} \\ &= \frac{(3(2) + 5)}{(2 + 7)} = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Hueco en la abscisa } x - 2 = 0, x = 2, y = \frac{11}{9}, \text{ en } \left(2, \frac{11}{9}\right).$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 7(x+h) - 3x^2 - 7x}{h} \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(h^2 + 2hx + x^2) + 7h + 7x - 3x^2 - 7x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 6hx + 3h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 6x + 7) = 6x + 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \lim_{h \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} \\
 \lim_{h \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x-2} + 2}{\sqrt{x-2} + 2}}_{\text{conjugado del numerador}} &= \lim_{h \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-2} - 2)(\sqrt{x-2} + 2)}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 6} \frac{((\sqrt{x-2})^2 - 2^2)}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 6} \frac{(x-2-4)}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 6} \frac{(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x-2} + 2)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 6} \frac{1}{(\sqrt{x-2} + 2)} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{6-2} + 2)} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Hueco en la abscisa $x-6=0$, $x=6$, $y=\frac{1}{4}$, en $\left(6, \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 95 Compruebe los límites siguientes.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x+2} = -2$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} = 3$$

$$3. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 4t^2} = -\frac{3}{4}$$

$$4. \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t-2} = 4$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4} = -\frac{1}{5}$$

Ejercicio 96 Determine el límite, si existe, por evaluación directa, cuando sea necesario y posible elimine la indeterminación algebraicamente.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -5} (3x^2 - 4x + 2x - 3)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{x+5}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 6}{x-6}$$

$$4. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h^2 - 7h + 1}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x-1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x+2}$$

7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^3 - 4x^2}$

8. $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^3 - 8}{z - 2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

9. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$

13. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x + 4}$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

14. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

12.2 Definición Informal de Límite de una Función

12.2.1 Límite de una Función por la Izquierda o por la Derecha

Sea

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

lo que significa, “el límite del lado izquierdo de $f(x)$, cuando x se acerca a a desde de la izquierda, es igual a L ” si los valores de $f(x)$ se puede hacer muy próximos a L , al tomar a x lo suficientemente próximo a a y menor que a , pero no igual, de a .

Por otro lado, sea

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

lo que significa, “el límite del lado derecho de $f(x)$, cuando x se acerca a a desde la derecha, es igual a L ” si los valores de $f(x)$ se puede hacer muy próximos a L , al tomar a x lo suficientemente próximo a a y mayor que a , pero no igual, de a .

Si ambos límites existen y son iguales a L , entonces la conclusión es, el límite de $f(x)$, a medida que x se acerca a a , es igual a L si y solo si, tanto el límite del lado izquierdo como el límite del lado derecho de $f(x)$ es igual a L . Lo cual se representa por,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Enfatizar: cuando encontramos un límite, no estamos interesados en ,o que le pasa a $f(x)$ cuando x es igual a a , sino solo en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x se acerca a a .

Además el límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a . Esto es, el límite debe ser el mismo si x se acerca a a por la izquierda o por la derecha.

12.2.2 Límites Infinitos y Asíntota Vertical

1. Sea f una función definida por ambos lados de a , excepto a . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

significa que el valor de $f(x)$ puede crecer positivamente sin límite a medida que x sea lo suficientemente cercano a a , pero no igual a a .

2. Sea f una función definida por ambos lados de a , excepto a . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

significa que el valor de $f(x)$ puede crecer negativamente sin límite a medida que x sea lo suficientemente cercano a a , pero no igual a a .

En ambos casos se dice que el límite no existe.

Ejemplo 208 Dada la función por partes siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine: a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y la continuidad de la función.

Se tiene:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3 - x) = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$$

f no es continua en $x = 2$.

Ejercicio 97 Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine: a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿ f es continua en $x = 2$?

Ejercicio 98 Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine: a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ y c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿ f es continua en $x = 2$?

12.2.3 Asíntota vertical

La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si al menos una de las afirmaciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

12.2.4 Continuidad de funciones

Una función f es continua en a , si y sólo si, se cumplen las siguientes tres condiciones.

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si f no es continua en a , entonces se dice que f es discontinua en a . Lo que puede dar lugar a una asíntota vertical o a un hueco.

Las funciones polinomiales son continuas en su dominio respectivo, las funciones racionales son discontinuas en los puntos donde el denominador es cero y continuas en cualquier otra parte.

12.3 Límites al Infinito y Asíntota Horizontal

12.3.1 Límites al infinito

Preguntas: **¿Cómo se comporta numéricamente la función $f(x)$ cuando el valor de x crece sin límite?** o también **¿Cómo se comporta numéricamente la función $f(x)$ cuando el valor de x decrece negativamente sin límite?** En el lenguaje simbólico del cálculo la pregunta toma la forma,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

este tipo límites se conocen como **límites al infinito**.

Ejemplo 209 Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ si $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

El comportamiento numérico de $f(x)$ se presenta en las tablas siguientes.

Para $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x^2}$ en el intervalo $(0, \infty)$, se toman valores de x cada vez mas grandes, se tiene,

	$x \longrightarrow \infty^-$					
x	1	2	5	10	100	1000
$f(x)$	1	1.6	1.92308	1.980200	1.999800	1.999998
	$f(x) \longrightarrow 2$					

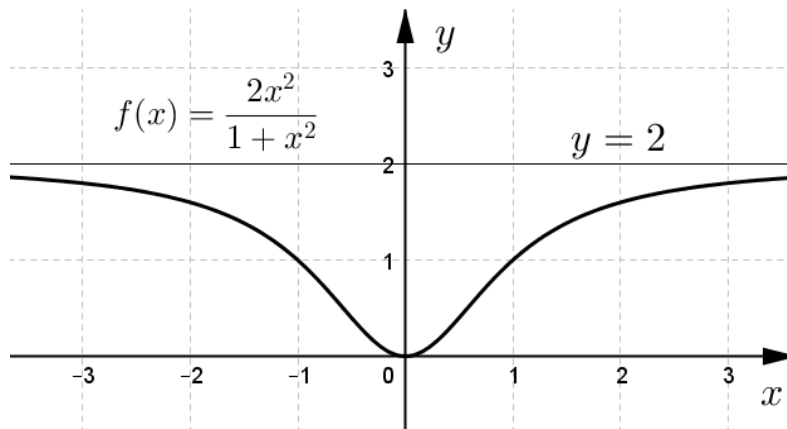
Para $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{1+x^2}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$, se tiene.

	$x \longrightarrow -\infty$					
x	-1	-2	-5	-10	-100	-1000
$f(x)$	1	1.6	1.92308	1.980200	1.999800	1.999998
	$f(x) \longrightarrow 2$					

Se observa que $f(x) \longrightarrow 2$ conforme $x \longrightarrow \pm\infty$, se intuye que el valor de la función se acerca a 2, sin que necesariamente el valor de x sea muy grande, por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

En la Figura 209 se presenta la gráfica de esta función, donde se ve claramente el comportamiento determinado.



Generalizando este hecho, para f una función definida en algún intervalo (a, ∞) ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse a M , tomando x lo suficientemente grande. De igual forma se tiene, para f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse a L tomando x negativo suficientemente grande, para que el límite exista no es necesario que ambos límites sean iguales.

12.3.2 Asíntota horizontal

La recta $y = M$ es llamada *asíntota horizontal* de la curva $y = f(x)$, si cualquiera de lo siguiente ocurre,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = M \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$$

Como se ve en la Figura (anterior) la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$$

Ejercicio 99 Complete la tabla al calcular $f(x)$ en los valores dados de x . Utilice los resultados para determinar los límites indicados, y sus asíntotas horizontales, si existen.

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

x	-1	-10	-100	-1000
$f(x)$				

1. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

x	-5	-10	-100	-1000
$f(x)$				

2. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 10$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

x	-5	-10	-100	-1000
$f(x)$				

Ejemplo 210 Determine numéricamente $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r}$ con $r > 0$ y racional.

Para $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

x	1	10	100	1000
$\frac{1}{x}$	1.0	0.1	0.01	0.001

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Para $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$

x	1	10	100	1000
$\frac{1}{x^2}$	1.0	0.01	0.0001	1.0×10^{-6}

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Para $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}$

x	1	10	100	1000
$\frac{1}{x^3}$	1.0	0.001	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-9}

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Por lo tanto, se intuye que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0, \quad r > 0 \text{ y racional}$$

El resultado anterior establece un hecho importante, útil para evaluar límites de forma algebraica de funciones racionales.

El resultado anterior se extiende para los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r}$$

con $r > 0$ y racional.

Ejemplo 211 Determine numéricamente $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Los límites anteriores equivalen a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/2}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/3}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/4}} \text{ con } r > 0$$

entonces se tiene,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/4}} = 0$$

Ejemplo 212 Determine el límite de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1}$ y su asíntota horizontal.

La evaluación directa produce una forma indeterminada,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1} = \frac{3(\infty)^2 + (\infty) + 2}{2(\infty)^3 + (\infty)^2 - 3(\infty) + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

para evitar esto, divida el numerador y el denominador de la expresión racional por la potencia más alta de la variable en el denominador, así

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 2}{\underbrace{2x^3}_{\text{esta}} + x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + x + 2) \frac{1}{x^3}}{(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \frac{1}{x^3}}$$

Simplifique

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Aplicar al $\lim$ a cada término

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}$$

Aplicando $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{2 + 0 - 0 + 0} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

asíntota horizontal $y = 0$ (eje x).

Ejemplo 213 Determine el límite de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^3 + x + 2) \frac{1}{x^3}}{(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{3 + 0 + 0}{2 + 0 - 0 + 0} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

asíntota horizontal $y = 3/2$

Ejemplo 214 Determine algebraicamente los límites indicados, si existen.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x + 2}}{2x - 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 + x + 2}\right) \left(\frac{1}{x}\right)}{(2x - 5) \left(\frac{1}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{(3x^2 + x + 2) \left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)}{(2x - 5) \left(\frac{1}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{2 - \frac{5}{x}} \\
 &= \frac{\sqrt{3 + 0 + 0}}{2 - 0} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 215 Determine algebraicamente el límite indicado, si existe.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x + 0 + 0}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 0 - 0 + 0} \\
 &= \frac{3(\infty)}{2} = \infty
 \end{aligned}$$

12.4 Límites al infinito de funciones racionales

Recordar que el cociente de dos polinomios, tal como:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

da lugar a una función racional, el subíndice n es el orden del polinomio del numerador y el subíndice m es el orden del polinomio del denominador. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional, donde $n = 3$; $m = 2$.

12.4.1 Hecho importante

Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos de más alta potencia de x en el numerador y en el denominador, respectivamente, entonces, el límite al infinito de una función racional se puede aproximar por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

esto, el cociente de los términos dominantes.

Ejemplo 216 Determine el límite indicado, si es que existe.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^4 + 2x - 1}{5x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3}$$

Se tiene que $a_n x^n = 3x^6$ y $b_m x^m = 5x^4$, entonces, el límite se puede aproximar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + x^4 + 2x - 1}{5x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6}{5x^4}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6}{5x^4} &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6}{x^4} \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \\ &= \frac{3}{5} (\infty)^2 = \infty \end{aligned}$$

Ejemplo 217 Determine el límite indicado, si es que existe.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^5}{(x^3 + x)^2}$$

Para resolver, no es necesario desarrollar los binomios, esto es, equivalente a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^5}{(x^3 + x)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2)^5}{(x^3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32x^{10}}{x^6} = 32 \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \\ &= 32(\infty) = \infty \end{aligned}$$

Ejemplo 218 Determine el límite indicado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{2x^3 + x^2 + x}$$

Aplicando la regla anterior, se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{2x^3} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(-\infty)}_{(+)(-)} = -\infty \end{aligned}$$

Ejercicio 100 Determine el límite indicado.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-(x+1)^2 - 3 \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4\sqrt{-x} + 4)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} 7x$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^3$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right)$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 1}{2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{9 - 2x - 8x^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-(3x-1)^2}$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - x^4}{-9x^4 - 6x^3 + 2}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 4}$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x-5}$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x^3 + 1}$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x + 2}{2x^3 + x^2 - 3x + 1}$

16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x + 2}$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$

Capítulo 13

Derivada de una Función

El cálculo infinitesimal fue inventado de forma independiente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz alrededor de 1680, el cálculo infinitesimal es la matemática de las tasas o razones de cambio instantáneas, es decir, con qué rapidez cambia una cantidad determinada, $f(x)$, en ese momento o instante con respecto a otra, x . El cálculo infinitesimal está formado por dos ramas principales; el cálculo diferencial que proporciona métodos para determinar las tasas de cambio; y el cálculo integral que se encarga de determinar las magnitudes globales a partir del conocimiento de las tasas de cambio instantáneas de una cantidad. La operación principal del cálculo diferencial es la diferenciación de la cual se obtiene la derivada, la del cálculo integral es la integración. El concepto central de cálculo diferencial es la derivada.

Antes de enunciar los métodos de diferenciación, es importante comprender el concepto de derivada.

Pendiente de una Recta Tangente

Por ejemplo, sea la función,

$$f(x) = x^2 - 5x + 7$$

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 13.1,

la recta que corta a la curva de $f(x)$ entre los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 7)$ se le conoce como recta secante, la pendiente de esta recta es,

$$\begin{aligned} m_{secante} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{7 - 1}{5 - 3} \\ m_s &= 3 \end{aligned}$$

la pendiente de esta recta secante (m_s) proporciona la razón de cambio promedio de $f(x)$ en el intervalo $[3, 5]$. Con la definición de la pendiente de la recta secante se puede calcular la pendiente de cualquier recta secante que se encuentre entre A y cualquier punto B cercano a A .

Pregunta, ¿Cuál es la pendiente de la recta que solo toca al punto A ? Esto es, cuando la coordenada A y B coinciden, como se muestra en la Figura 13.2. La recta que pasa en A se conoce como recta tangente a la curva, su pendiente no es posible calcular con el método conocido, ya que $x_1 = x_2$, y m_s no está definida.

La respuesta a esta pregunta la resolvió el cálculo diferencial, el método se explica a continuación.

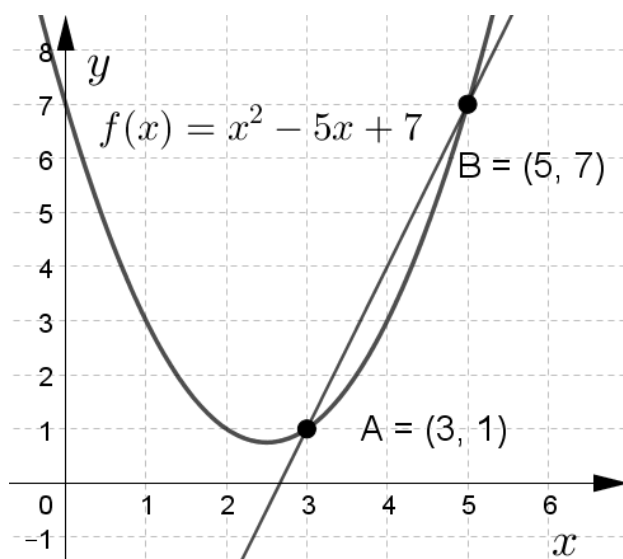


Figura 13.1: Recta Secante en $f(x)$.

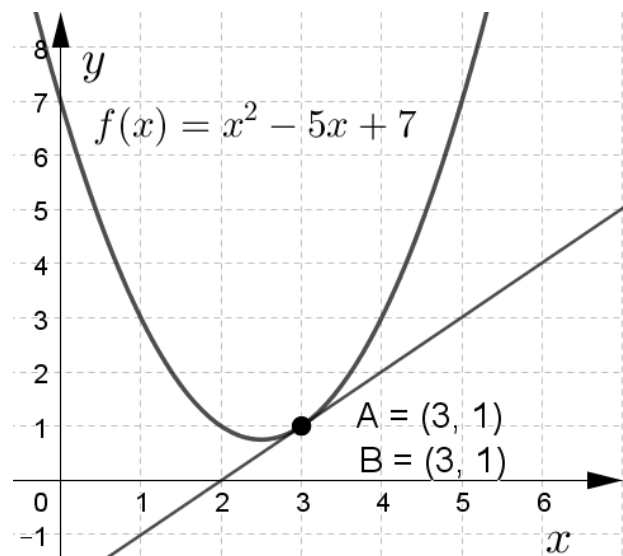


Figura 13.2: Recta tangente a la curva de $f(x)$ en $x = 3$.

Considere que se trazan rectas secantes sucesivas entre el punto A y B , con B desplazándose a lo largo de la curva, esto es, la abscisa de la coordenada del punto B se aproxima a 3 por la derecha, esto es, en el lenguaje utilizado del Capítulo 2, $x^+ \rightarrow 3$, de tal forma que B se aproxima a A del mismo modo que la recta secante se aproxima a la recta tangente, como lo muestra la Figura 13.3, de esta misma forma la pendiente de la recta secante, m_s , se aproxima a la pendiente de la recta tangente, m_{tan} .

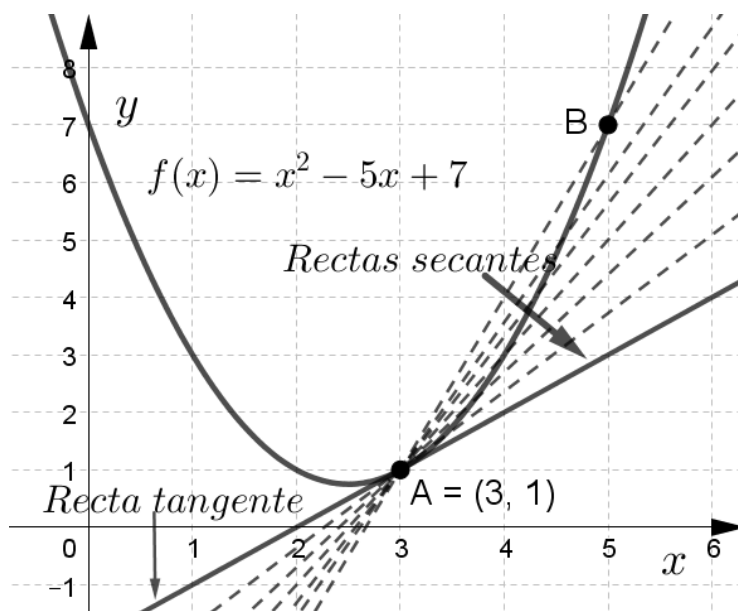


Figura 13.3: Las rectas secantes consecutivas se aproximan a la recta tangente en A .

Veamos el caso general, calcularemos primero la pendiente de la recta secante que pasa por el punto A y B , como se muestra en la gráfica de la Figura 13.4; h es el valor del incremento de x , así por ejemplo, si se quiere determinar la pendiente entre $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$, $h = 5 - 3 = 3$, ver Figura 13.1. Aclarado esto, se tiene, que la pendiente m_s es,

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{donde } h \neq 0$$

Si hacemos h tan pequeño como se desee, esto significa que punto B se aproxima a A , esto es, límite cuando h tiende a 0, la recta secante se transforman en recta tangente y su pendiente en la pendiente de la recta tangente (m_{tan}). En corto, significa que

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} m_s$$

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo 219 Determine la pendiente de la recta tangente m_{tan} , que pasa en el punto $(3, 1)$ sobre la curva de la función

$$f(x) = x^2 - 5x + 7$$

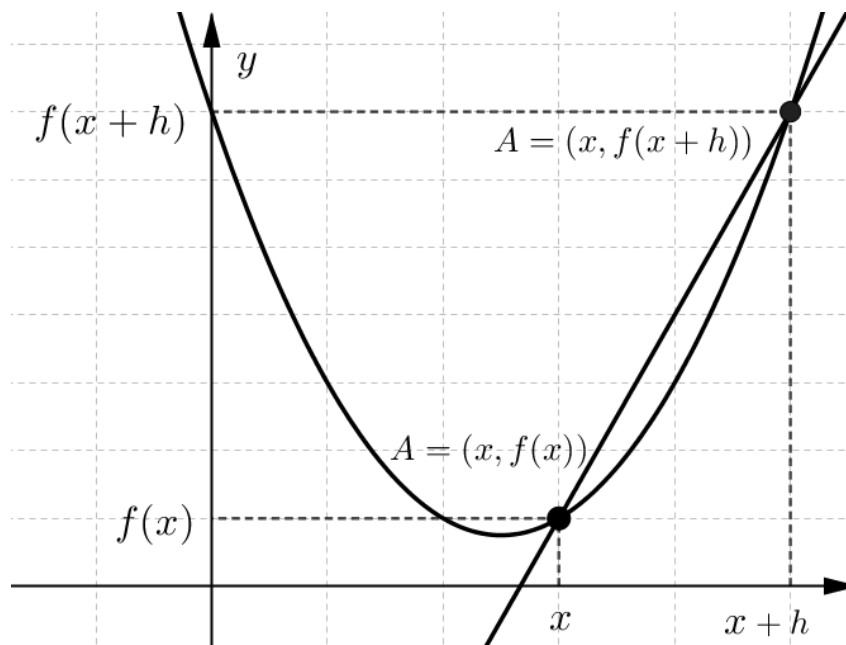


Figura 13.4: Pendiente de una recta secante.

La pendiente se puede calcular aplicando

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Llevando la determinación paso a paso, se tiene.

1. La función evaluada en $x+h$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 5(x+h) + 7 = x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 7$$

2. La diferencia:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 7 - (x^2 - 5x + 7) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 7 - x^2 + 5x - 7 \\ &= 2xh + h^2 - 5h \end{aligned}$$

3. El cociente de diferencia

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2 - 5h}{h} = 2x + h - 5$$

4. El límite del cociente

$$\begin{aligned} m_{\text{tan}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 5) \end{aligned}$$

Así se tiene

$$m_{\text{tan}} = 2x - 5$$

una fórmula para calcular m_{tan} ; una función que permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x)$ para cualquier valor de x , no solo de la recta tangente que pasa por el punto $(3, 5)$, si no de cualquier recta tangente (Figura 13.5) a lo largo de la curva de $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

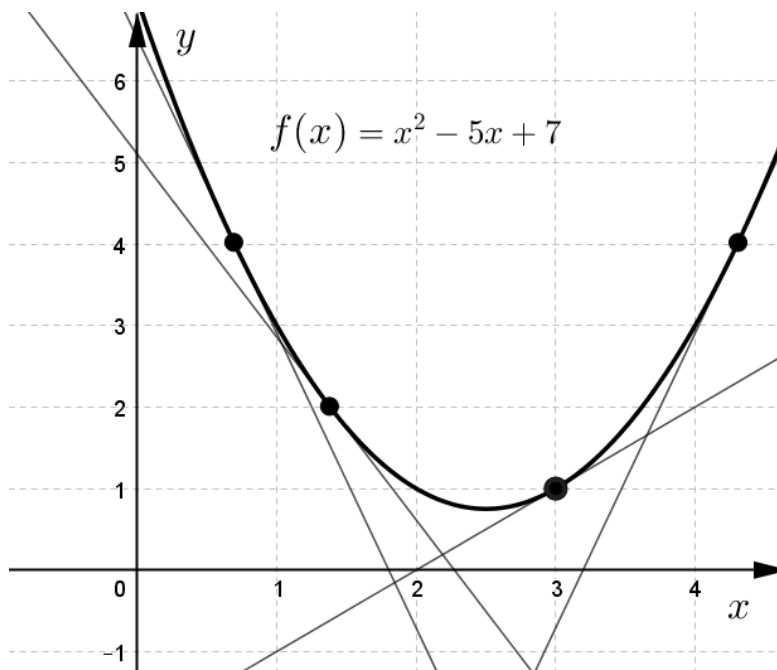


Figura 13.5: Rectas tangentes a la curva de la función $f(x)$

5. En el caso particular, la pendiente de la recta tangente que pasa por $(3, 1)$ es

$$\begin{aligned} m_{\text{tan}}(3) &= 2(3) - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

como se muestra en la Figura 13.6.

13.0.2 Derivada de una Función

A la pendiente m_{tan} de la recta tangente que toca a la curva en $(3, 1)$ (Figura 13.2) se le conoce como **derivada de la función** $f(x)$ en $(3, 1)$; la función

$$m_{\text{tan}} = 2x - 5$$

se le llama **derivada de $f(x)$** , luego entonces, la **derivada** de una función es otra función, que determina la pendiente de rectas tangente en cualquier punto de la curva de $f(x)$; la derivada de $f(x)$ también se le identifica como una *razón de cambio instantánea* o simplemente razón de cambio, este es el concepto central del cálculo diferencial, la derivada; y se refiere a cómo cambia una cantidad en relación con otra cantidad, se puede decir que es una razón de cambio.

Notación

Al proceso de obtener las derivadas de funciones se le llama derivar o derivación, el operador es

$$\frac{d}{dx}$$

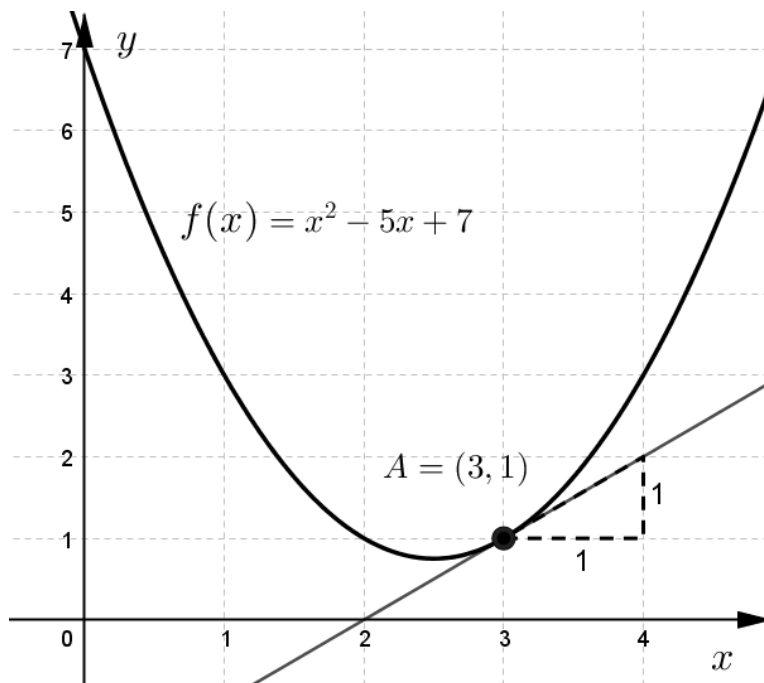


Figura 13.6: Recta tangente en $(3, 1)$, sobre la curva de $f(x) = x^2 - 5x + 7$.

que se lee " d en dx ", cuando se escribe así

$$\frac{df}{dx}$$

se lee " df en dx ", lo que indica la derivada de la función f con respecto a la variable x , esta notación se conoce como *notación de Leibniz*, a la cual se recurrirá cuando se resuelvan ecuaciones diferenciales. Sea

$$\frac{df}{dt}$$

que indica la derivada de la función f con respecto a la variable t o simplemente t , esta notación indica la primera derivada de la función. Como se verá más adelante, una función puede ser derivada una, dos, n veces.

En el numerador se indica la función a derivar y el denominador con respecto a que variable se deriva. Otras formas equivalentes en la notación de Leibniz son:

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

Una notación muy utilizada es la *notación de Lagrange*, donde la primera derivada de f se expresa como f' y la derivada de $y = f(x)$ se expresa como y' ; se pronuncia " f prima" o " y prima".

Una notación utilizada en el área de la Física y la ingeniería es la *notación de Newton*, donde la primera derivada de f se expresa como $\dot{f}$ y la derivada de $y = f(x)$ se expresa como $\dot{y}$; se pronuncia " f punto" o " y punto".

Una notación menos común es $D_x f(x)$, lo que indica la derivada (D) de la función $f(x)$ con respecto a x .

13.0.3 Concepto de Derivada

La derivada de una función $f(x)$, es

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

si este límite existe.

Así cuando el problema es determinar la derivada de una función, se requiere que se determine la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva de la función.

Ejemplo 220 Determine la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$, aplicando el concepto de derivada; y la pendiente de la recta tangente en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

El proceso que se aplica se conoce como de "los cuatro pasos".

1. La función evaluada en $x + h$, esto es, $f(x + h)$:

$$f(x + h) = (x + h)^2 + (x + h) = x^2 + 2xh + h^2 + x + h$$

2. La diferencia $f(x + h) - f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x + h) - f(x) &= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - (x^2 + x) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x \\ &= 2xh + h^2 + h\end{aligned}$$

3. El cociente de diferencia $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\ &= 2x + h + 1\end{aligned}$$

4. Obtener el límite $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) \\ \frac{dy}{dx} &= 2x + 1\end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente en $x = -2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(-2) + 1 = -3$$

La pendiente de la recta tangente en $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2(0) + 1 = 1$$

La pendiente de la recta tangente en $x = 3$

$$\frac{dy}{dx} = 2(3) + 1 = 7$$

Ejemplo 221 Determine la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$, aplicando el concepto de derivada

1. $f(x+h)$:

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h+1}$$

2. $f(x+h) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x+1 - (x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} \\ &= \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)} \end{aligned}$$

3. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} \\ &= \frac{-h}{(x+1)(x+h+1)} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-1}{(x+1)(x+h+1)} \end{aligned}$$

4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+1)(x+h+1)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{(x+1)(x+1)} = \frac{-1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 222 Determine la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, aplicando el concepto de derivada.

1. $f(x+h)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{(x+h)^2+1}{x+h} \\ &= \frac{h^2+2hx+x^2+1}{x+h} \end{aligned}$$

2. $f(x+h) - f(x)$:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= \frac{h^2 + 2hx + x^2 + 1}{x+h} - \frac{x^2 + 1}{x} \\
 &= \frac{x(h^2 + 2hx + x^2 + 1) - (x+h)(x^2 + 1)}{(x+h)(x)} \\
 &= \frac{h^2x + 2hx^2 + x^3 + x - x^3 - hx^2 - x - h}{(x+h)(x)} \\
 &= \frac{h(x^2 + hx - 1)}{(x+h)(x)}
 \end{aligned}$$

3. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{h(x^2 + hx - 1)}{(x+h)(x)}}{h} \\
 &= \frac{h(x^2 + hx - 1)}{(x+h)(x)} \times \frac{1}{h} \\
 &= \frac{(x^2 + hx - 1)}{(x+h)(x)}
 \end{aligned}$$

4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + hx - 1)}{(x+h)(x)} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 - 1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 223 Determine la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, aplicando el concepto de derivada.

1. $f(x+h)$:

$$f(x+h) = \sqrt{x+h+1}$$

2. $f(x+h) - f(x)$:

$$f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}$$

3. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x+h+1})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{h + x + 1 - (x + 1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

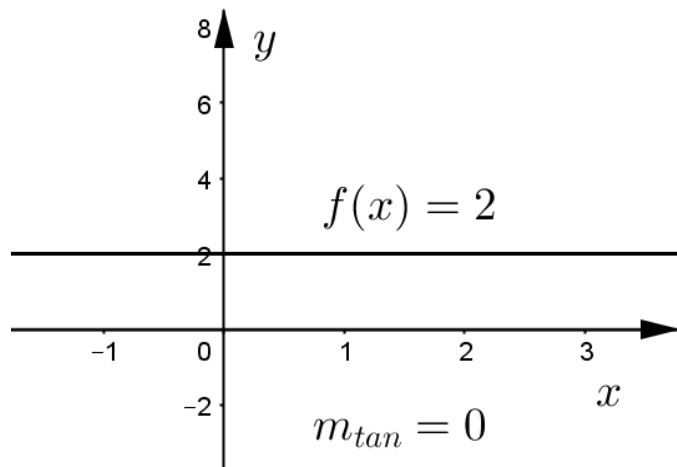


Figura 13.7: Derivada de una función constante, $f(x) = 2$.

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Como se ha observado en los 4 ejemplos anteriores, la determinación de la derivada de una función se vuelve tediosa a medida que la función se complica, sobre todo por los procedimientos algebraicos que son necesarios implementar. Para facilitar el cálculo de la derivada de funciones existen fórmulas que conoceremos en la sección siguiente.

Fórmulas y Reglas Básicas Para Derivar

Derivada de una Función Constante

Sea f una función constante, tal como,

$$f(x) = c$$

entonces,

$$\frac{df}{dx} = 0$$

o en corto

$$f'(x) = 0$$

por ejemplo, sea $f(x) = 2$, Figura 13.7 se muestra que rectas tangentes trazadas a lo largo de la función tienen pendiente igual a la pendiente de recta, esto es, $m_{\text{tan}} = 0$, la gráfica de la función derivada es una recta $y = 0$.

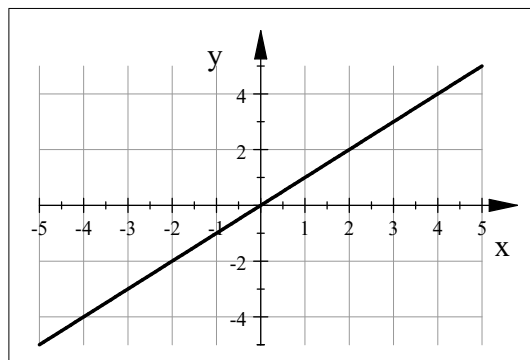
Derivada de la función $f(x) = x$

Sea $f(x) = x$, una función lineal, entonces,

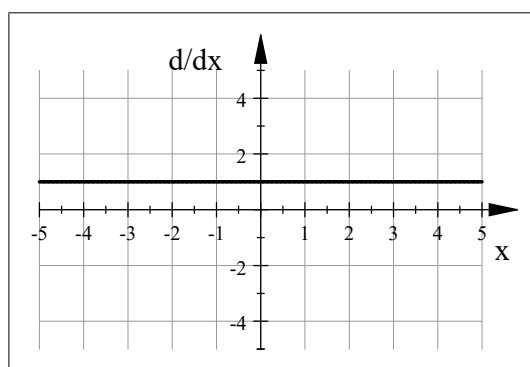
$$\frac{df}{dx} = 1$$

o en corto

$$f'(x) = 1$$



$$f(x) = x$$



$$\frac{df}{dx} = 1$$

observe que la pendiente de la recta tangente a lo largo de recta tiene la misma pendiente, esto es, $m_{\text{tan}} = 1$.

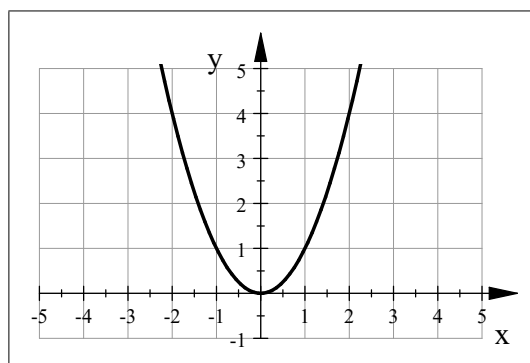
Derivada de la función $f(x) = x^2$

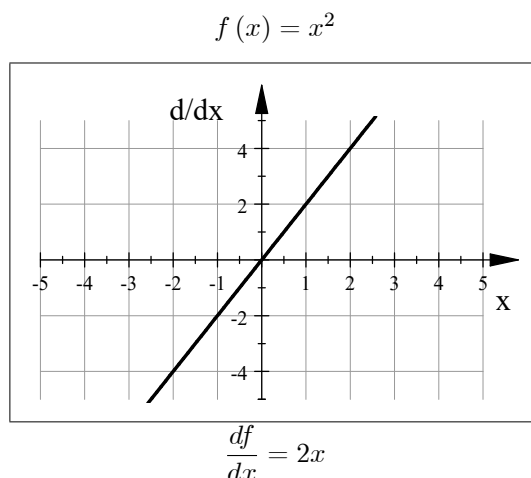
Sea $f(x) = x^2$, una función cuadrática, como se determino en el ejemplo :::, entonces,

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

o en corto

$$f'(x) = 2x$$





Observe que la pendiente de la recta tangente varia de acuerdo a la función $y' = 2x$

Derivada de una función potencia

Si es f es una función potencia, tal como,

$$f(x) = x^n$$

donde n es un número real, entonces,

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

en corto,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Álgebra de las derivadas de funciones

Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones y que sus derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, c una constante diferente de cero. Entonces las reglas para el algebra de derivadas se aplican.

1. Si $F(x) = cf(x)$, entonces $F'(x)$ o $\frac{dF}{dx}$ existe y

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}(f(x))$$

2. mejor solo F

$$F'(x) = cf'(x)$$

3. Si $G(x) = f(x) + g(x)$, entonces $G'(x)$ existe y

$$G'(x) = f'(x) + g'(x)$$

4. Si $H(x) = f(x) - g(x)$, entonces $H'(x)$ existe y

$$H'(x) = f'(x) - g'(x)$$

En corto:

1. $(cf)' = cf'$
2. $(f + g)' = f' + g'$
3. $(f - g)' = f' - g'$

Regla del producto de funciones

Si $F(x) = f(x)g(x)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ ambas existen, entonces,

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En corto,

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Regla del cociente de funciones

Si $F(x) = f(x)/g(x)$ y ambas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces $F'(x)$ existe y

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

En corto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} \\ &= \frac{(\text{dedominador})(\text{derivada del numerador}) - (\text{numerador})(\text{derivada del dedominador})}{(\text{dedominador})^2} \end{aligned}$$

Resumen de Reglas de Diferenciación:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g' \qquad (fg)' = fg' + gf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} \qquad \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Regla de la Cadena Aplicada a una Función Potencia

Si n es cualquier número real y $u = g(x)$, entonces,

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x)]^n &= n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx}[\text{argumento}]^{\text{potencia}} &= \text{potencia}[\text{argumento}]^{\text{potencia}-1} \cdot \text{derivada del argumento} \end{aligned}$$

El argumento es la base de la función potencia.

$$\frac{d}{dx}[\text{base}]^{\text{potencia}} = \text{potencia}[\text{base}]^{\text{potencia}-1} \cdot \text{derivada de la base}$$

En corto, si $u(x)$, entonces,

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Ejemplos

1. $f(x) = (2x - 1)^4$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4(2x - 1)^3 \frac{d}{dx}(2x - 1) \text{ aplicar la regla de la cadena} \\ &= 4(2x - 1)^3 (2) \text{ simplificar} \\ &= 8(2x - 1)^3\end{aligned}$$

2. $f(t) = 2(t^3 - 1)^5$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (2)(5)(t^3 - 1)^4 (3t^2) \text{ aplicar la regla de la cadena} \\ &= 30t^2 (t^3 - 1)^4\end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 3} = (2x^2 - 2x + 3)^{1/2}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(2x^2 - 2x + 3)^{-1/2} (4x - 2) \text{ aplicar la regla de la cadena} \\ &= \frac{1}{2}(4x - 2)(2x^2 - 2x + 3)^{-1/2}\end{aligned}$$

4. $f(x) = 2x^2(3 - 4x)^4$ Producto de dos funciones

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x^2 \frac{d}{dx}(3 - 4x)^4 + (3 - 4x)^4 \frac{d}{dx}(2x^2) \text{ regla del producto} \\ &= 2x^2 (4)(3 - 4x)^3 (-4) + (3 - 4x)^4 (4x) \text{ aplicar la regla de la cadena} \\ &= -32x^2 (3 - 4x)^3 + 4x (3 - 4x)^4 \text{ factorizar} \\ &= 4x (3 - 4x)^3 (-8x + 3 - 4x) \text{ simplificar} \\ &= 4x (3 - 4x)^3 (3 - 12x) \\ &= 4x (3 - 4x)^3 (3)(1 - 4x) \\ &= 12x (3 - 4x)^3 (1 - 4x)\end{aligned}$$

5. $f(x) = (x - 1)^2(2x + 1)^4$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - 1)^2 \frac{d}{dx}(2x + 1)^4 + (2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(x - 1)^2 \text{ regla del producto} \\ &= (x - 1)^2 (4)(2x + 1)^3 (2) + (2x + 1)^4 (2)(x - 1)(1) \text{ regla de la cadena} \\ &= 8(x - 1)^2 (2x + 1)^3 + 2(2x + 1)^4 (x - 1) \text{ reordenar} \\ &= 2(x - 1)(2x + 1)^3 [4(x - 1) + 2x + 1] \text{ factorizar} \\ &= 2(x - 1)(2x + 1)^3 \underbrace{(6x - 3)}_{\text{factorizar}} \text{ simplificar} \\ &= 2(x - 1)(2x + 1)^3 3(2x - 1) \text{ simplificar} \\ &= 6(x - 1)(2x + 1)^3 (2x - 1)\end{aligned}$$

$$6. f(x) = \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^3 = \frac{(x+3)^3}{(x-2)^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-2)^3 \frac{d}{dx}(x+3)^3 - (x+3)^3 \frac{d}{dx}(x-2)^3}{\left((x-2)^3\right)^2} \text{ regla del cociente} \\ &= \frac{(x-2)^3 3(x+3)^2 - (x+3)^3 3(x-2)^2}{(x-2)^6} \text{ regla de la cadena} \\ &= \frac{3(x-2)^2(x+3)^2[(x-2) - (x+3)]}{(x-2)^6} \text{ factorizar} \\ &= \frac{3(x-2)^2(x+3)^2(-5)}{(x-2)^6} \text{ simplificar} \\ &= \frac{-15(x-2)^2(x+3)^2}{(x-2)^6} \text{ simplificar factores comunes} \\ &= \frac{-15(x+3)^2}{(x-2)^4} \end{aligned}$$

Ejercicios Extras

$$7. f(x) = \frac{1}{(2x+3)^3}$$

$$8. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$9. f(x) = (x^2+1)^3 - (x^3+1)^2$$

$$10. f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5$$

$$11. s(t) = \left(\frac{t}{2t+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$12. g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$$

$$13. h(x) = \frac{(3x^2+1)^3}{(x^2-1)^4}$$

$$14. g(t) = \frac{(2t-1)^2}{(3t+2)^4}$$

$$15. f(x) = (3x+1)^4(x^2-x+1)^3$$

$$16. g(t) = (2t+3)^2(3t^2-1)^{-3}$$

17. En los ejercicios siguientes, determine la derivada de cada función.

$$18. f(x) = 3x^2(x-1)$$

19. $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 2)$
20. $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$
21. $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$
22. $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$
23. $f(w) = (w^3 - w^2 + w - 1)(w^2 + 2)$
24. $f(x) = (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1)$
25. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(2 + \frac{1}{x^2})$
26. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$
27. $f(x) = \frac{x - 1}{2x + 1}$
28. $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$
29. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$
30. $f(x) = \frac{x + \sqrt{3x}}{3x - 1}$

En los ejercicios siguientes, determine la derivada de cada una de la funciones dadas y evalúe $f'(x)$ en el valor dado de x .

1. $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$; $x = 1$
2. $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$; $x = 2$
3. $f(x) = \frac{x}{x^4 - 2x^2 - 1}$; $x = -1$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)(x^{3/2} - x)$; $x = 4$

En los ejercicios siguientes, determine la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva de la función f en el punto específico.

1. $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 - 2)$; $(2, 18)$
2. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$; en $x = 2$
3. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$; en $x = 1$
4. $f(x) = \frac{1 + 2x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{2}}}$; $(4, \frac{5}{9})$
5. $f(x) = (x^3 + 1)(3x^2 - 4x + 2)$ en el punto $(1, 2)$.

6. Determine una ecuación de la recta tangente hacia la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2}$ en el punto $(2, 3)$.
7. Sea $f(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.
8. Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal.

Determine el (los) punto(s) sobre la gráfica de la función $f(x) = (x^2 + 6)(x - 5)$ donde la pendiente de la recta es igual a -2 .

13.1 Regla de la Cadena

En los ejercicios siguientes determine la derivada de cada función.

1. $f(x) = (2x - 1)^4$
2. $f(x) = (x^2 + 2)^5$
3. $f(t) = 2(t^3 - 1)^5$
4. $f(x) = (2x - x^2)^3$
5. $f(x) = 3(x^3 - x)^4$
6. $f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$
8. $f(x) = \frac{1}{(2x + 3)^3}$
9. $f(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)^4}$
10. $f(t) = \frac{4}{\sqrt[3]{2t^2 + t}}$
11. $f(x) = 2x^2(3 - 4x)^4$
12. $h(t) = t^2(3t + 4)^3$
13. $f(x) = \left(\frac{x + 3}{x - 2}\right)^3$
14. $f(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^5$
15. $g(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{2x - 1}}$

16. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^4}$

17. $h(x) = \frac{(3x^2 + 1)^3}{(x^2 - 1)^4}$

18. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 - 1}$

19. $g(t) = \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

20. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}$

21. En los ejercicios 1-30, determine la derivada de cada función

1. $f(x) = 2x(x^2 + 1)$

2. $f(x) = 3x^2(x - 1)$

3. $f(t) = (t - 1)(2t + 1)$

4. $f(x) = (2x + 3)(3x - 4)$

5. $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 2)$

6. $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$

7. $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$

8. $f(x) = (x^3 - 12x)(3x^2 + 2x)$

9. $f(w) = (w^3 - w^2 + w - 1)(w^2 + 2)$

10. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + (x^2 + 1)(x^2 - x - 1) + 28$

11. $f(x) = (5x^2 + 1)(2\sqrt{x} - 1)$

12. $f(t) = (1 + \sqrt{t})(2t^2 - 3)$

13. $f(x) = (x^2 - 5x + 2)(x - \frac{2}{x})$

14. $f(x) = (x^3 + 2x + 1)(2 + \frac{1}{x^2})$

15. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

16. $g(x) = \frac{3}{2x+4}$

17. $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

18. $f(t) = \frac{1-2t}{1+3t}$

19. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

20. $f(u) = \frac{u}{u^2+1}$

21. $f(s) = \frac{s^2-4}{s+1}$

22. $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$

23. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

24. $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$

25. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+x+1}$

26. $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+2x+3}$

27. $f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x-2}$

28. $f(x) = (3x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{x})$

29. $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{x-1}{x^2+4}$

30. $f(x) = \frac{x+\sqrt{3x}}{3x-1}$

13.2 Derivadas de Funciones Logarítmicas naturales

Sea

$$f = \ln(\arg)$$

la forma general de una función logarítmica naturales, donde

$$\arg > 0$$

$$\arg \neq 0$$

o también

$$y = f(x) = \ln |\arg|$$

La derivada de una función logaritmo natural es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln(\arg) \\ &= \frac{1}{\arg} d(\arg) \end{aligned}$$

13.2.1 o también

Derivada de una función logarítmica con base e , si $f = \ln(\text{argumento})$, su derivada es,

$$f'(x) = \frac{1}{\text{argumento}} d(\text{argumento})$$

en corto,

$$f'(x) = \frac{1}{u} du$$

donde $u(x)$.

CONSEJO

Para simplificar las derivadas de funciones logarítmicas, antes de derivar aplique las propiedades de los logaritmos a la función que desea derivar.

Leyes de los Logaritmos

1. $\ln(FG) = \ln F + \ln G$
2. $\ln\left(\frac{F}{G}\right) = \ln F - \ln G$
3. $\ln(F^n) = n \ln F$

Ejemplo 224 Determinar la derivada de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \ln x$, argumento = x , la derivada es,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$, argumento = $\sqrt{x} + 1 = x^{1/2} + 1$, la derivada es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{1/2} + 1} d(x^{1/2} + 1) \\ &= \frac{1}{x^{1/2} + 1} \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) \\ &= \frac{1}{2x^{1/2} (x^{1/2} + 1)} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, argumento $= x^2 + 1$, la derivada es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

4. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, cociente de funciones,

$$\begin{array}{ll} F = \ln x & F' = \frac{1}{x} \\ G = x^2 & G' = 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right) - 2x \ln x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{(1 - 2 \ln x)}{x^3} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \ln(2x + 5)^3$, para simplificar la derivada, aplicamos las propiedades de los logaritmos,

$$f(x) = 3 \ln(2x + 5)$$

la derivada es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{1}{2x + 5} \right) d(2x + 5) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2x + 5} \right) 2 \\ &= \frac{6}{2x + 5} \end{aligned}$$

6. La derivada de $f(x) = \ln(2x + 5)^3$ se puede obtener directamente aplicando la regla para derivar una función logarítmica, como se muestra,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(2x + 5)^3} \underbrace{d(2x + 5)^3}_{\text{regla de la cadena}} \\ &= \frac{1}{(2x + 5)^3} 3(2x + 5)^2 (2) \\ &\quad \text{simplificando} \\ f'(x) &= \frac{6}{2x + 5} \end{aligned}$$

7. $f(x) = \ln(x^2 + 1)^2 (x^3 - 1)^3$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} \underbrace{d\left[(x^2+1)^2(x^3-1)^3\right]}_{\text{Derivada de un producto de funciones}} \\
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} \left[(x^2+1)^2 \cdot 3(x^3-1)^2(3x^2) + (x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+1)(2x) \right] \\
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} \left[\underbrace{9x^2(x^2+1)^2 \cdot (x^3-1)^2 + 4x(x^3-1)^3 \cdot (x^2+1)}_{\text{Factorizando por factor común}} \right] \\
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} \underbrace{x(x^2+1)(x^3-1)^2}_{\text{factor común}} [9x(x^2+1) + 4(x^3-1)] \\
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} x(x^2+1)(x^3-1)^2 [9x^3 + 9x + 4x^3 - 4] \\
f'(x) &= \frac{1}{(x^2+1)^2(x^3-1)^3} x(x^2+1)(x^3-1)^2 [13x^3 + 9x - 4] \\
f'(x) &= \frac{x(9x + 13x^3 - 4)}{(x^2+1)(x^3-1)}
\end{aligned}$$

8. Para derivar $f(x) = \ln(x^2+1)^2(x^3-1)^3$ de una forma más sencilla, aplicar las propiedades de los logaritmos a la función original. Esto es,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x^2+1)^2(x^3-1)^3 \\
f(x) &= 2\ln(x^2+1) + 3\ln(x^3-1)
\end{aligned}$$

luego derivar:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\ln(x^2+1) + 3\ln(x^3-1) \\
f'(x) &= 2\left(\frac{1}{(x^2+1)}d(x^2+1)\right) + 3\left(\frac{1}{(x^3-1)}d(x^3-1)\right) \\
f'(x) &= 2\left(\frac{1}{(x^2+1)}2x\right) + 3\left(\frac{1}{(x^3-1)}3x^2\right) \\
f'(x) &= \left(\frac{4x}{(x^2+1)}\right) + \left(\frac{9x^2}{(x^3-1)}\right)
\end{aligned}$$

La derivada $f'(x) = \left(\frac{4x}{(x^2+1)}\right) + \left(\frac{9x^2}{(x^3-1)}\right)$ es equivalente a la forma obtenida en el ejemplo anterior, esto se muestra como sigue:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4x}{(x^2+1)} + \frac{9x^2}{(x^3-1)} \\
&= \frac{4x(x^3-1) + 9x^2(x^2+1)}{\underbrace{(x^2+1)(x^3-1)}_{\text{MCD}}} \\
&= \frac{4x^4 - 4x + 9x^4 + 9x^2}{(x^2+1)(x^3-1)} \\
&= \frac{13x^4 + 9x^2 - 4x}{(x^2+1)(x^3-1)} \\
f'(x) &= \frac{x(9x + 13x^3 - 4)}{(x^2+1)(x^3-1)}
\end{aligned}$$

9. $y = x^2 \ln(4x + 2)$, producto de funciones,

$$\begin{aligned} F &= x^2 & F' &= 2x \\ G &= \ln(4x + 2) & G' &= \frac{4}{4x + 2} \end{aligned}$$

aplicando la regla del producto de funciones, se tiene,

$$\begin{aligned} y' &= x \left(\frac{4}{4x + 2} \right) + 2x \ln(4x + 2) \\ &= \frac{4x}{4x + 2} + 2x \ln(4x + 2) \\ &= \frac{4x}{2(2x + 1)} + 2x \ln(4x + 2) \\ &= \frac{2x}{2x + 1} + 2x \ln(4x + 2) \end{aligned}$$

10. $y = \ln(p + 1)^2 (p + 2)^3 (p + 3)^4$, aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$y = 2 \ln(p + 1) + 3 \ln(p + 2) + 4 \ln(p + 3)$$

derivado:

$$y' = \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}$$

11. $f(w) = \ln \sqrt{\frac{1 + w^2}{w^2 - 1}} = \ln \left(\frac{1 + w^2}{w^2 - 1} \right)^{1/2}$, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + w^2}{w^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1 + w^2) - \ln(w^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + w^2) - \frac{1}{2} \ln(w^2 - 1) \end{aligned}$$

Derivando:

$$f'(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + w^2} 2w - \frac{1}{2} \frac{1}{w^2 - 1} 2w$$

Reacomodando o reescribiendo:

$$f'(w) = \frac{w}{1 + w^2} - \frac{w}{w^2 - 1}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} f'(w) &= \frac{w(w^2 - 1) - w(1 + w^2)}{(1 + w^2)(w^2 - 1)} \\ &= \frac{w^3 - w - w^3 - w}{(1 + w^2)(w^2 - 1)} \\ &= \frac{-2w}{(1 + w^2)(w^2 - 1)} \\ &= y = \ln x \end{aligned}$$

aquí $\arg = x$, luego:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} d(x) = \frac{1}{x} (1) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 225 1.

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

aquí $\arg = x^2 + 1$, luego:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} (2x) \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

2.

$$y = \ln(\ln x)$$

aquí $\arg = \ln x$, luego:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\ln x} d(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x \ln x} \end{aligned}$$

3.

$$y = \ln(2x + 5)^3$$

aquí el $\arg = (2x + 5)^3$, luego:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(2x + 5)^3} d((2x + 5)^3) \\ &= \frac{1}{(2x + 5)^3} (3(2x + 5)^2 \cdot 2) \\ &= \frac{6(2x + 5)^2}{(2x + 5)^3} \\ y' &= \frac{6}{2x + 5} \end{aligned}$$

Una forma alternativa de simplificar las derivadas de funciones logarítmicas naturales, es aplicando la propiedades de los logaritmos antes de derivar, así por ejemplo, la función anterior se simplifica como,

$$\begin{aligned} y &= \ln(2x + 5)^3 \\ &= 3 \ln(2x + 5) \end{aligned}$$

al derivar se obtiene,

$$\begin{aligned} y' &= 3 \frac{1}{2x+5} (2) \\ &= \frac{6}{2x+5} \end{aligned}$$

la misma derivada de una manera simple.

4.

$$y = x^2 \ln(4x + 2)$$

se identifica que la función es un producto de funciones, donde

$$f = x^2 \rightarrow f' = 2x$$

$$g = \ln(4x + 2) \rightarrow g' = \frac{4}{4x + 2}$$

luego:

$$\begin{aligned} y' &= fg' + gf' \\ &= x^2 \left(\frac{4}{4x + 2} \right) + \ln(4x + 2) (2x) \\ &= \underbrace{\frac{4x^2}{4x + 2}}_{\text{Factorizando}} + 2x \ln(4x + 2) \\ &= \frac{2x^2}{2x + 1} + 2x \ln(4x + 2) \end{aligned}$$

5.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Se identifica un cociente de funciones, donde:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} \\ &= \frac{x^2 d(\ln x) - \ln x d(x^2)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 \frac{1}{x} - \ln x (2x)}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

6.

$$y = \ln(p + 1)^2 (p + 2)^3 (p + 3)^4$$

Reescribiendo la función con las propiedades de los logaritmos, se tiene:

$$y = 2 \ln(p + 1) + 3 \ln(p + 2) + 4 \ln(p + 3)$$

derivando:

$$y' = \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}$$

7.

$$f(w) = \ln \sqrt{\frac{1+w^2}{w^2-1}}$$

reescribiendo la función,

$$f(w) = \ln \left(\frac{1+w^2}{w^2-1} \right)^{1/2}$$

aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$f(w) = \frac{1}{2} (\ln(1+w^2) - \ln(w^2-1))$$

derivando y simplificando,

$$\begin{aligned} f'(w) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2w}{(1+w^2)} - \frac{2w}{(w^2-1)} \right) \\ &= \frac{w}{(1+w^2)} - \frac{w}{(w^2-1)} \\ &= \frac{w(w^2-1) - w(1+w^2)}{(1+w^2)(w^2-1)} \\ &= \frac{-2w}{(1+w^2)(w^2-1)} \end{aligned}$$

8.

$$f(x) = \ln^3(2x+5)$$

La función se reescribe,

$$f(x) = (\ln(2x+5))^3$$

al derivar,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln(2x+5))^2 d \ln(2x+5) \\ &= 3(\ln(2x+5))^2 \frac{1}{(2x+5)} d(2x+5) \\ &= 3(\ln(2x+5))^2 \frac{1}{(2x+5)} 2 \\ &= \frac{6(\ln(2x+5))^2}{(2x+5)} \\ &= \frac{6 \ln^2(2x+5)}{(2x+5)} \end{aligned}$$

13.3 Derivadas de Funciones Logarítmicas con base diferente a e

Sea por ejemplo,

$$y = \log_2 x$$

la función se reescribe en términos de logaritmos naturales mediante un cambio de base, esto es;

$$y = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Derivando esta función se obtiene,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\ln 2} d(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{x} \right) (1) \\ &= \frac{1}{x \ln 2} \end{aligned}$$

note que $\ln 2$ es una constante.

Ejemplo 226 1.

$$y = \log(2x + 1)$$

reescribiendo la función en términos de $\ln$ se tiene,

$$y = \frac{\ln(2x + 1)}{\ln 10}$$

al derivar se tiene,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{(2x + 1)} d(2x + 1) \\ &= \frac{2}{(2x + 1) \ln 10} \end{aligned}$$

las funciones logarítmicas se reescriben de tal forma que el argumento de la función no se confunda.

Ejercicio 101 Determine las derivadas de las funciones logarítmicas siguientes.

1. $y = \ln(3x^2 + 2x + 1)$

2. $y = x^3 \ln(2x + 5)$

3. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$

4. $y = \sqrt{4 + 3 \ln x}$

5. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$

6. $y = \ln^2(2x + 11)$

13.4 Derivadas de Funciones exponenciales naturales

Una función exponencial es definida por,

$$f = e^{\arg}$$

en su forma general. la derivada es,

$$f' = f d(\arg)$$

esto es, la misma función exponencial, por la derivada del $\arg$:

$$y' = e^{\arg} d(\arg)$$

13.4.1 o tambien

Derivada de una función exponencial con base e , si $f(x) = e^{\text{argumento}}$, su derivada es,

$$f'(x) = e^{\text{argumento}} d(\text{argumento})$$

en corto,

$$f'(x) = e^u du$$

donde $u(x)$.

Esto es, la derivada de una función exponencial con base e , es la misma función exponencial por la derivada del argumento.

Ejemplo 227 Determinar las derivadas de las funciones exponenciales siguientes,

1. $f(x) = e^{3x}$, argumento= $3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3x} (3) \\ &= 3e^{3x} \end{aligned}$$

2. $f(t) = e^{-t}$, argumento= $-t$

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-t} d(-t) \\ &= -e^{-t} \\ f'(t) &= \frac{-1}{e^t} \end{aligned}$$

3. $f(x) = e^x + x$ (suma de funciones).

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + x \\ f'(x) &= e^x + 1 \end{aligned}$$

4. $f(x) = 2e^x - x^2$ (suma de funciones).

$$f'(x) = 2e^x - 2x$$

5. $f(x) = x^3 e^x$ (producto de funciones).

$$\begin{aligned} F &= x^3 & F' &= 3x^2 \\ G &= e^x & G' &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{x^3(e^x) + e^x(3x^2)}_{\text{factorizando}} \\ f'(x) &= x^2 e^x (x + 3) \end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{2e^x}{x}$ (cociente de funciones), o producto de funciones $f(x) = 2x^{-1}e^x$. Como cociente de funciones:

$$\begin{aligned} F &= 2e^x & F' &= 2e^x \\ G &= x & G' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(2e^x) - 2e^x(1)}{x^2} \\ &\text{Factorizando el numerador} \\ &= \frac{2e^x(x-1)}{x^2} = \frac{2}{x^2} e^x (x-1) \end{aligned}$$

7. $f(x) = 3(e^x + e^{-x})$, reescribiendo la función, $f(x) = 3e^x + 3e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^x(1) + 3e^{-x}(-1) \\ &= 3e^x - 3e^{-x} \\ &= 3e^{-x}(e^{2x} - 1) \end{aligned}$$

8. $f(x) = 3e^{-1/x}$, reescribiendo la función $f(x) = 3e^{-x^{-1}}$, su derivada es,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{-x^{-1}} d(-x^{-1}) \\ &= 3e^{-x^{-1}} (x^{-2}) \\ &= 3x^{-2} e^{-x^{-1}} \\ &= 3x^{-2} e^{-1/x} \\ &= \frac{3}{x^2 e^{1/x}} \end{aligned}$$

9. $f(x) = (e^x + 1)^{25}$ la deriva es,

$$f(x) = (e^x + 1)^{25}$$

Primero con regla de la cadena

$$\begin{aligned} f'(x) &= 25(e^x + 1)^{24} d(e^x + 1) \\ &= 25e^x (e^x + 1)^{24} \end{aligned}$$

10. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = e^{2x-3}$ en el punto $(3/2, 1)$.

Recordar que la derivada proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de $y = e^{2x-3}$, esta es,

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x-3} d(2x - 3) \\ &= 2e^{2x-3} \end{aligned}$$

Ahora la pendiente de la recta que pasa por $x = 3/2$, se calcula evaluando la derivada de la función en $x = 3/2$, esto es,

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= y'(3/2) \\ &= 2e^{2(3/2)-3} \\ &= 2e^0 \\ m_{\tan} &= 2 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente se obtiene de,

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 2(x - 3/2) \\ y - 1 &= 2x - 3 \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

o de,

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ 1 &= 2(3/2) + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

y la ecuación es,

$$y = 2x - 2$$

11. $y = e^x$; aquí $\arg = x$, luego:

$$\begin{aligned} y' &= e^x d(x) \\ &= e^x (1) \\ &= e^x \end{aligned}$$

12. $y = e^{x^3+3x}$; aquí $\arg = x^3 + 3x$, luego:

$$\begin{aligned} y' &= e^{x^3+3x} d(x^3 + 3x) \\ &= e^{x^3+3x} (3x^2 + 3) \\ &= (3x^2 + 3) e^{x^3+3x} \\ &= 3(x^2 + 1) e^{x^3+3x} \end{aligned}$$

13. $y = \frac{x}{e^x}$; se identifica un cociente de funciones:

$$f = x \rightarrow f' = 1$$

$$g = e^x \rightarrow g' = e^x$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} \\ &= \frac{e^x (1) - x e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x (1 - x)}{e^{2x}} \\ &= \frac{(1 - x)}{e^x} \end{aligned}$$

14. $y = e^{x+1} \ln(x^2 + 1)$; se identifica un producto de funciones con:

$$f = e^{x+1} \rightarrow f' = e^{x+1}$$

$$g = \ln(x^2 + 1) \rightarrow g' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} y' &= fg' + gf' \\ &= e^{x+1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) + e^{x+1} \ln(x^2 + 1) \\ &= e^{x+1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \right) \end{aligned}$$

13.5 Derivadas de funciones exponenciales con base b

Sea por ejemplo,

$$y = 4^x$$

aplicando $\ln$ a ambos lados de la función,

$$\ln y = \ln 4^x$$

$$\ln y = x \ln 4$$

derivando en ambos lados de la función:

$$\frac{y'}{y} = \ln 4 d(x)$$

$$y' = y \ln 4$$

al sustituir la función se tiene:

$$y' = 4^x \ln 4$$

En forma general si la función exponencial de base b es:

$$y = b^{\arg}$$

la derivada es:

$$y' = b^{\arg} \ln b d(\arg)$$

Ejercicio 102 *Determinar la derivada de las funciones exponenciales siguientes.*

1. $y = 5e^x$

2. $y = e^{2x^2+3}$

3. $y = xe^x$

4. $y = x^2e^{-x^2}$

5. $y = e^{x^2+6x^3+1}$

6. $y = 3x^4e^{-x}$

7. $y = (e^{2x} + 1)^3$

8. $y = e^{2x}(x + 6)$

13.5.1 Diferenciación Logarítmica

Existe una técnica llamada diferenciación logarítmica, que con frecuencia simplifica la diferenciación de una función $y = f(x)$, cuando $f(x)$ es una combinación de productos, cocientes o potencias. El procedimiento es como sigue:

1. Aplicar a ambos lados de $y = f(x)$ el $\ln$, esto es,

$$\ln y = \ln f(x)$$

2. Aplicar a $\ln f(x)$, lado derecho de la ecuación, las propiedades de los logaritmos, estas son:

$$\begin{aligned}\ln(FG) &= \ln F + \ln G \\ \ln\left(\frac{F}{G}\right) &= \ln F - \ln G \\ \ln F^r &= r \ln F\end{aligned}$$

3. Diferenciar ambos lados con respecto a la variable independiente, al la derivada se tiene,

$$\begin{aligned}d(\ln y) &= d(\ln f(x)) \\ \frac{y'}{y} &= d(\ln f(x))\end{aligned}$$

la derivada de $d(\ln y)$ es siempre $\frac{y'}{y}$.

4. Despejar y' , esto es,

$$y' = y d(\ln f(x))$$

5. Expresar la respuesta sólo en términos de x y simplificar. Esto requiere sustituir $f(x)$ por y .

13.5.2 Ejemplo de Derivación Logarítmica

1. Aplique la técnica de derivación logarítmica para obtener la derivada de:

$$\begin{aligned}y &= f(x) = \frac{(2x-5)^3}{x^2 \left(\sqrt[4]{x^2+1}\right)} \\ y &= \frac{(2x-5)^3}{x^2 (x^2+1)^{1/4}}\end{aligned}$$

- (a) Paso 1: Aplicar $\ln$ a ambos lados de la ecuación, esto es,

$$\ln y = \ln \left(\frac{(2x-5)^3}{x^2 (x^2+1)^{1/4}} \right)$$

- (b) Paso 2: Aplicar las propiedades de los logaritmos al lado derecho de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(2x-5)^3 - \ln x^2 (x^2+1)^{1/4} \\ &= 3 \ln(2x+5) - \left(2 \ln x + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \right)\end{aligned}$$

- (c) Paso 3. Derivar:

$$\begin{aligned}d(\ln y) &= d \left[3 \ln(2x+5) - 2 \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \right] \\ \frac{y'}{y} &= \frac{3}{2x+5} \cdot 2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{4(x^2+1)} \cdot 2x \\ \frac{y'}{y} &= \frac{6}{2x+5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

(d) Paso 4. Despejar y' :

$$y' = y \left(\frac{6}{2x+5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right)$$

(e) Paso 5. Expresar la derivada en términos de x :

$$y' = \frac{(2x-5)^3}{x^2(x^2+1)^{1/4}} \left(\frac{6}{2x+5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right)$$

Ejercicios

1. $y = (x+1)^2(x-2)(x^2+3)$

2. $y = (2x^2+1)\sqrt{8x^2-1}$

3. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

4. $y = \frac{(2x^2+2)^2}{(x+1)(3x+2)}$

5. $y = \sqrt{\frac{x^2+5}{x+9}}$

6. $y = \frac{x(1+x^2)^2}{\sqrt{2+x^2}}$

Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones.

Se terminó de editar en septiembre de 2025

en los talleres de Astra Ediciones

Av. Acueducto No. 829

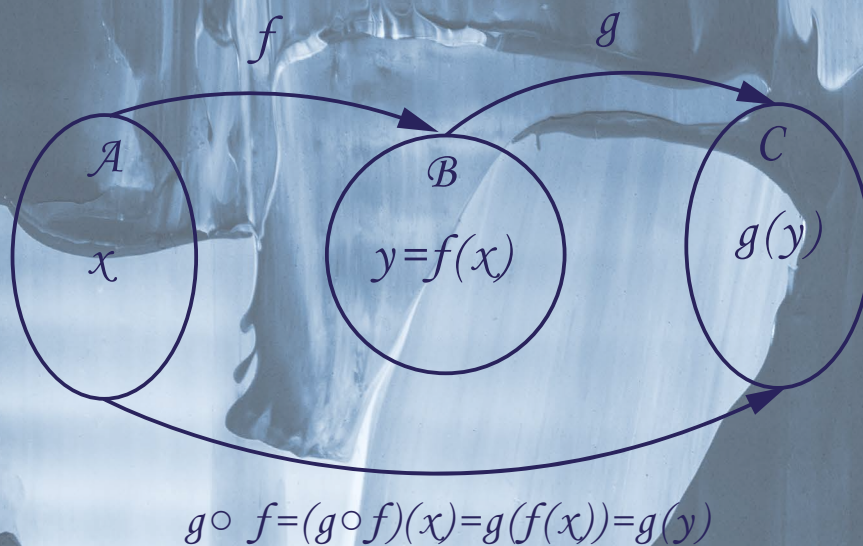
Colonia Santa Margarita, C. P. 45140

Zapopan, Jalisco, México.

33 38 34 82 36

E-mail: edicion@astraeditorial.com.mx

www.astraeditorialshop.com



Este libro "Introducción al Cálculo Diferencial: Un Curso Básico de Álgebra y Funciones", está dirigido a estudiantes que ingresan al nivel universitario, los cuales ya tienen alguna experiencia previa de un curso de álgebra el libro trata principalmente de 11 temas esenciales de álgebra y principios de funciones: 1) Números Reales; 2) Expresiones Algebraicas; 3) Productos Notables y Factorización; 4) Expresiones Racionales; 5) Ecuaciones Algebraicas; 6) Desigualdades; 7) Ecuaciones de Rectas; 8) Ecuaciones Lineales Simultáneas; 9) Exponentes y Logaritmos; 10) Sistemas de Ecuaciones no Lineales; 11) Funciones Reales. Adicionalmente, 2 temas de cálculo diferencial como introducción al cálculo diferencial: 12) Límites de Funciones y 13) Derivada de Funciones.

ISBN: 978-607-8964-22-2



9 786078 964222



Consulta y descarga


astra
editorial