

Alma Yolanda Alanís García
Jesús Gilberto Álvarez Carreón

SISTEMAS

DINÁMICO

Caracterización y Análisis



Sistemas Dinámicos

Caracterización y Análisis



Sistemas Dinámicos

Caracterización y Análisis

Alma Yolanda Alanís García
Jesús Gilberto Álvarez Carreón



Sistemas Dinámicos: Caracterización y Análisis. **Autores:** Alma Yolanda Alanís García y Jesús Gilberto Álvarez Carreón. — *Guadalajara, México. 2023.*

Primera edición

D. R. © copyright 2024.

ISBN: **978-84-10215-87-0**

DOI: <https://doi.org/10.61728/AE24001199>



La presente obra fue dictaminada bajo el sistema de doble ciego y cuenta con el aval de los dictámenes de pares académicos.

Edición y corrección: **Astra ediciones**

Se prohíbe la reproducción, el registro o la transmisión parcial o total de esta obra por cualquier sistema de recuperación de información, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, por fotocopia, cualquier otro existente o por existir; sin el permiso previo, por escrito, del titular de los derechos.

HECHO EN MÉXICO | MADE IN MEXICO

Dedicatoria

Con amor a nuestra familia

Contenido

Prefacio	11
Sistemas dinámicos: caracterización y análisis.....	15
Bibliografía	16
Bibliografía complementaria	16
Conocimientos previos.....	17
Nomenclatura y símbolos utilizados.....	18

Capítulo 1

Sistemas dinámicos	21
1.1 Importancia de los sistemas dinámicos y definiciones básicas.....	22
1.2 Descripción entrada-salida.....	31
1.3 Sistemas de control	35

Capítulo 2

Descripción en variables de estado de sistemas dinámicos	39
2.1 El concepto de estado.....	40
2.2 Ejemplos físicos	57
2.3 Solución de la ecuación de estado	88
2.4 Representación gráfica de sistemas lineales	94
2.5 Realizaciones canónicas.....	98
2.6 Transformaciones de similitud.....	102

Capítulo 3

Sistemas de primer y segundo orden	105
3.1 Sistemas de primer orden.....	106
3.2 Sistemas de segundo orden	107
3.3 Comportamiento cualitativo de sistemas lineales	113
3.4 Múltiples puntos de equilibrio	116
3.5 Comportamiento cualitativo cerca de los puntos de equilibrio...	120
3.6 Ciclos límite	133

Capítulo 4

Controlabilidad y observabilidad	139
---	-----

4.1 Controlabilidad	140
4.1.1 Controlabilidad de sistemas lineales.....	143
4.2 Observabilidad	173
4.2.4 Subespacio no observable en sistemas LTI.....	183
4.3 Descomposición general de sistemas no controlables no observables en sistemas LTI	198
4.4 Principio de dualidad	208
Capítulo 5	
Estabilidad	211
5.1 Estabilidad externa (entrada-salida).....	212
5.2 Estabilidad interna	215
5.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov.....	216
5.4 Sistemas no autónomos.....	243
5.5 Método del gradiente variable	246
Capítulo 6	
Retroalimentación de estado	251
6.1 Asignación del polinomio característico del sistema	252
6.2 Efecto de la retroalimentación sobre ceros del sistema, controlabilidad y observabilidad.....	258
6.3 Efecto de la retroalimentación sobre la controlabilidad	259
6.4 Linealización exacta por realimentación	262
6.4.1 Linealización entrada-estado	264
6.5 Sistemas no lineales reducibles a la forma canónica controlable.....	271
Capítulo 7	
Observadores de estado	291
7.1 Diseño del observador para sistemas lineales.....	292
7.2 Esquema controlador-observador para sistemas lineales.....	296
7.3 Observador no lineal.....	300
7.4 Resumen de observadores no lineales.....	312
Capítulo 8	
Apéndice	315
El filtro de Kalman en tiempo discreto	316
Filtro de Kalman extendido	325

Prefacio

Los sistemas dinámicos son un campo de estudio fascinante que ha interesado al ser humano desde hace varios siglos, iniciándose con sistemas y fenómenos simples y ahora centrándose en la caracterización y análisis de sistemas más complejos e interconectados, su evolución y comportamiento a lo largo del tiempo. Estos sistemas pueden describir fenómenos naturales, procesos socioeconómicos e incluso sistemas biológicos. Comprender los sistemas dinámicos es esencial para predecir, modelar y controlar una amplia gama de aplicaciones en diversos campos. Este libro, presenta una introducción que proporciona una visión general de conceptos clave y aplicaciones de los sistemas dinámicos, preparando el terreno para un análisis profundo de los mismos.

Su definición está en constante evolución, un sistema dinámico se define como un conjunto de variables que evolucionan en el tiempo de acuerdo con un conjunto de reglas o ecuaciones con la condición de que su evolución depende de su pasado, por ello también son llamados sistemas con memoria. La relación entre las señales de entradas, los componentes, las interconexiones y las señales de salida determinan cómo el sistema cambia de un estado a otro. Las características clave de los sistemas dinámicos, principalmente en el caso no lineal, incluyen su capacidad para exhibir patrones complejos, sensibilidad a las condiciones iniciales, la presencia de atractores, bifurcaciones y caos. Estas propiedades hacen que los sistemas dinámicos sean herramientas poderosas para modelar y comprender una amplia gama de fenómenos en campos como física, astronomía, biología, ecología, finanzas, economía, ingeniería y muchas otras disciplinas.

Así mismo el comportamiento de los sistemas dinámicos está determinado por las características de sus componentes, lo que implica la presencia de fenómenos como retardos, histéresis, saturaciones, fallas, bifurcaciones, múltiples modos de operación, puntos de equilibrio, atrac-

tores, escapes en tiempo finito y muchos más que van a caracterizar el comportamiento del sistema dinámico como lineal o no lineal. En este mismo sentido un sistema dinámico puede clasificarse como continuo o discreto en el primer caso los cambios en la evolución del sistema ocurren en unidades de tiempo infinitesimales, por lo que típicamente se representan a través de ecuaciones diferenciales, sin embargo, en la actualidad tenemos una gran cantidad de representaciones de sistemas obtenidas a partir de datos, los cuales se representan mediante ecuaciones a diferencias o ecuaciones iterativas, en este sentido, el análisis de los sistemas dinámicos en tiempo discreto se ha desarrollado en mucho menor medida que su contraparte continua, algo similar ocurre en él, cuanto al análisis de los sistemas lineales que por mucho tiempo ha sido ampliamente estudiado mientras que el caso de los sistemas no lineales, no tiene una comprensión tan profunda como los lineales, siendo que la mayoría de los sistemas dinámicos que se presentan en el mundo real están sujetos a no linealidades, sin embargo, la mayoría de las herramientas matemáticas y conceptuales que existen se han desarrollado para el caso de sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo, sin embargo, tanto la adquisición de datos como el procesamiento y las implementaciones se realizan mediante dispositivos digitales, por lo que es altamente importante tener un compendio de herramientas que nos permitan caracterizar y analizar sistemas dinámicos de prácticamente cualquier tipo. En este libro podemos encontrar las herramientas necesarias para realizar la caracterización y análisis de sistemas lineales deterministas, en tiempo discreto y en tiempo continuo ya sean lineales o no lineales. Esto por medio de conceptos teóricos acompañados de una gran cantidad de ejemplos resueltos, que le permitan al estudiante comprender lo referente al modelado, caracterización y análisis de los mismos, teniendo en cuenta definiciones como controlabilidad, observabilidad, estabilidad, grado relativo, linealización, retroalimentación del estado y estimación del estado. Con aplicaciones que van desde sistemas mecánicos, químicos, biológicos, robóticos, redes neuronales y muchos más.

La idea de escribir este libro se dio debido a la necesidad de nuestros estudiantes por encontrar estos conceptos en una sola obra que les permita extender sus conocimientos y aplicaciones a diferentes tipos de sistemas de una forma asequible a través de desarrollos teóricos acompañados

de ejemplos resueltos para diferentes tipos de sistemas de una manera integral y no como conceptos aislados e independientes. Este libro puede utilizarse tanto para un curso de sistemas dinámicos lineales como no lineales, hay temas que pueden obviarse dependiendo del nivel del curso en el que se esté utilizando, sin embargo, para poder integrar todos los conceptos, se incluyen en este libro. Así mismo se incluye un apéndice con resultados relacionados con el filtro de Kalman en tiempo discreto tanto lineal como extendido que es uno de los filtros, estimadores y observadores más utilizados, pero del que pocas veces se toma en cuenta su desarrollo matemático el cual es muy relevante conocer para poder utilizarlo de forma adecuado obteniendo su máximo potencial.

Esperamos que nuestros estudiantes adquieran el interés y pasión por los sistemas dinámicos como lo hemos tratado de expresar en este libro.

Alma Yolanda Alanís García

Jesús Gilberto Álvarez Carreón

CUCEI de la Universidad de Guadalajara

Departamento de Innovación Basada en la Información y el Conocimiento

Julio de 2024

Sistemas dinámicos: caracterización y análisis

Objetivos

1. Que el alumno adquiriera la capacidad para formular modelos que describan el comportamiento de sistemas dinámicos en espacio de estado y sea capaz de analizar las características básicas del sistema como controlabilidad, observabilidad y estabilidad para establecer conclusiones sobre el comportamiento de sistemas dinámicos.
2. Que el alumno sea capaz de modelar, simular y aplicar metodologías de control para sistemas dinámicos.
3. Que el alumno presente de manera clara y efectiva los resultados y conclusiones obtenidos, utilizando gráficos, tablas y explicaciones adecuadas para diferentes audiencias.

Competencias a desarrollar

- Análisis y caracterización de sistemas dinámicos no lineales para aplicar técnicas de control.
- Entender las diferencias entre sistemas lineales y no lineales y sus características.
- Saber cómo formular y representar sistemas no lineales usando ecuaciones diferenciales, ecuaciones a diferencias, sistemas de ecuaciones y otros métodos matemáticos y computacionales.
- Utilizar software y herramientas computacionales para simular y analizar el comportamiento de sistemas no lineales.
- Interpretar los resultados de los análisis y simulaciones y hacer recomendaciones basadas en estos resultados.

Bibliografía

- Besaçon, G., Nonlinear Observers and Applications. (2009). Lecture Notes in Control and Information Sciences 363, Springer Berlin Heidelberg.
- Chen, C. T. Introduction to linear system theory. Holt, Rinehart and Winston
- Domínguez, S., Campoy, P., Sebastián, J.M. y Jiménez, A. (2006). Control en el espacio de estado. Pearson Educación, Madrid.
- Dorf, R. C. Sistemas modernos de control. Addison-Wesley, 10a Edición
- Isidori, A. (1995). Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag.
- Kailath, T. Linear systems. Prentice Hall-
- Khalil, H. (2001). Nonlinear Systems. 3ra Edición, Pearson.
- Ogata, K. Sistemas de control en tiempo discreto. Pearson Educación.
- Sira-Ramírez, H., Márquez, R., Rivas-Echeverría, F. y Llanes-Santiago, O. (2005). Control de sistemas no lineales: linealización aproximada, extendida, exacta. Pearson, Prentice Hall.
- Slotine, J.-J. E. (1991). Applied nonlinear control. Prentice Hall.
- Sontag, E. D. (1998). Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems. 2nd ed., Springer Science + Business Media New York.

Bibliografía complementaria

- Ali, J. M., Hoang, N. H., Hussain, M. A., y Dochain, D. (2015). Review and classification of recent observers applied in chemical process systems, Computers & Chemical Engineering, Vol. 76.
- Chow, W. L. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Mathematische Annalen, Vol. 117, pp. 98-105, 1940/1941
- Hermann, R. and Krener, A. (1977). Nonlinear Controllability and observability. IEEE TAC, Vol 22, no. 05.
- Kalman, R. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, ASME Journal of Basic Engineering. Vol. 82-
- Luenberger, D. G. (1971). An introduction to observers. IEEE Transac-

- tions on Automatic Control, Vol. 16, pp. 596-602.
- Lyapunov, A. M. (1892). The General Problem of the Stability of Motion. Kharkov Mathematical Society, Kharkov.
- Poincaré, H. (1895). Analysis situs, Journal de l'École Polytechnique.
- Sophus, S. Lie. (1871). Over en classe geometriske Transformationer (PhD). University of Christiania.
- Sussman, H. J. and Jurdjevic, V. (1979). Controllability of nonlinear systems, Journal of Differential Equations, Vol. 12, pp. 95–116.

Conocimientos previos

- Cálculo diferencial e integral.
- Álgebra.
- Transformada de Laplace.
- Transformada z.
- Variable compleja.
- Álgebra elemental.
- Álgebra lineal.

Nomenclatura y símbolos utilizados

FT	Función de transferencia
p.e.	Punto de equilibrio
v.p.	Valor propio
SNL	Sistema no lineal
LTI	Sistema lineal invariante en el tiempo
MIMO	Múltiples entradas – Múltiples salidas
MISO	Múltiples entradas – salida simple
BIBO	Entrada acotada – Salida acotada
GR	Grado relativo
EKF	Filtro de Kalman extendido
GAS	Globalmente asintóticamente estable
AE	Asintóticamente estable
RCL	Resistivo, capacitivo, inductivo
$\lim()$	Límite
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertenece a
$\exists$	Existe
$\subset$	Subconjunto propio
$\subseteq$	Subconjunto impropio
$\rightarrow$	Tiende a
$\Rightarrow$	Implica
Σ	Sumatoria
$\mathbb{R}$	Espacio de los reales
$ $	Valor absoluto
$\ \ $	Norma Euclidiana
$\det()$	Determinante
$\text{adj}()$	Adjunta
A^T	Transpuesta de A
$\text{cof}()$	Matriz de cofactores
I	Identidad

$\dim()$	Dimensión
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$E\{ \}$	Esperanza
J_k	Función de costo
$\text{span}()$	Expansión
$[f, g](x)$	Corchete de Lie
$L_f \lambda(x)$	Derivada de Lie

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

1.1 Importancia de los sistemas dinámicos y definiciones básicas

¿Por qué son importantes los sistemas dinámicos?

- Por la necesidad de controlar sistemas dinámicos.
- Son el tipo de sistemas más comunes.
- Sus conceptos básicos se aplican en muchas y muy diversas disciplinas relativas al control.

La ingeniería trata de comprender y controlar los materiales y fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad.

La base para el análisis de un sistema es el funcionamiento proporcionado por la teoría de los sistemas dinámicos, que supone una relación entre causa y efecto para sus componentes.

Planta, es el ente real que mapea estímulos o entradas en salidas o respuestas a esos estímulos.

Modelo, es cualquier abstracción que realiza el ser humano, de una planta o proceso y representa la forma en que sus variables se relacionan con otras.

- Modelos gráficos
- Modelos matemáticos
- Modelos computacionales
- Modelos mentales

“Todos los modelos son solo una ventana que nos permiten observar una parte del sistema, bajo suposiciones e idealizaciones, además de que la presencia de un observador siempre implica la modificación al sistema”

Sistema, arreglo, conjunto o colección de componentes relacionados de tal forma que constituyen un todo.

“Conjunto de componentes cuyas variables interactúan para producir una respuesta”

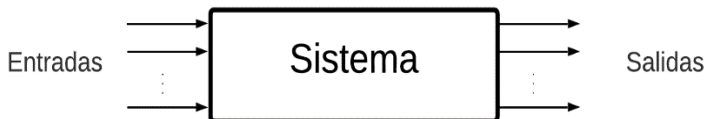
El propósito para el cual está destinado el sistema determina la entrada y la salida.

Entrada: Estimulo o excitación que se aplica a un sistema desde una fuente de energía externa con el fin de producir una respuesta específica por parte del sistema.

Salida: Respuesta obtenida del sistema de control.

Perturbación: Estimulo externo a un sistema sobre el cual no es posible tener algún tipo de influencia.

Ejemplos de sistemas: Sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etcétera.



Ejemplos:

Sistema	Entradas	Salidas
Conmutador eléctrico	Estado de conducción o estado de corte	Presencia de flujo o Ausencia de flujo
Calefactor con termostato	Temperatura de referencia	Temperatura de la habitación
Sistema de transpiración del cuerpo humano	Temperatura confortable del cuerpo	Temperatura actual del cuerpo
Motor eléctrico	Voltaje de alimentación	Velocidad angular

Proceso, operación o desarrollo natural, progresivamente continua, caracterizada por una serie de cambios graduales que tienden a un determinado resultado.

Ejemplos de proceso: Procesos químicos, económicos, biológicos, etcétera.

1.1.1 Clasificación de sistemas

1. Un sistema se dice mono variable o escalar si tiene una sola entrada y una sola salida.

SISO = Single input – single output

Si el sistema tiene más de una entrada o más de una salida se llamará multivariable.

MIMO = Multiple input – multiple output

2. Un sistema es determinista si a cada entrada le corresponde una y solo una salida.

$y = g(u)$ es una función

3. Un sistema se dice causal o no anticipatorio si la salida del sistema al tiempo t_1 no depende del valor de la entrada aplicada después del tiempo t_1

$y(t) = u(t - 1)$ es causal $y(n) = (2x(n) - x(n)^2)^2$

$y(t) = u(t + 1)$ es no causal $y(n) = x(n) - x(n + 1)$

Un sistema no causal es capaz de predecir el comportamiento basado en información que aún no se tiene, lo cual es imposible para los sistemas físicos; por lo tanto, la causalidad es una propiedad intrínseca de cualquier sistema físico.

4. Un sistema dinámico es aquel cuya salida presente depende de entradas pasadas y presentes. Si el valor de la salida al tiempo t_1 depende solamente de la entrada aplicada en t_1 , el sistema se conoce como estático o sistema sin memoria.

Ejemplos:

Sistema dinámico: Circuito RC, RL o RLC.

Sistema estático: Circuito resistivo, báscula, etcétera.

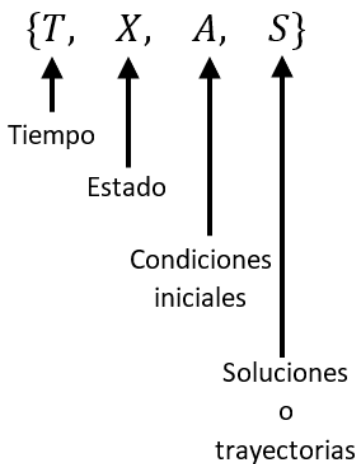
La salida de un sistema estático permanece si la entrada no cambia. En sistemas dinámicos, la salida cambia con el tiempo a pesar de que no cambie la entrada a menos que se encuentre en un estado o punto de equilibrio.

Sistema estático → Ecuaciones algebraicas

Sistema dinámico → Ecuaciones diferenciales, integro-diferenciales o a diferencias.

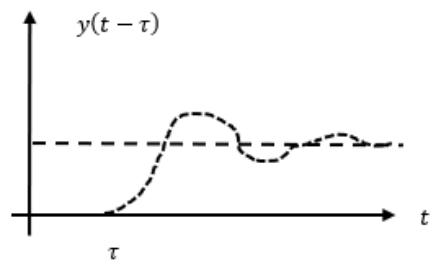
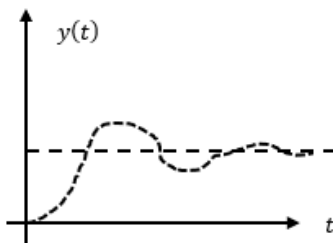
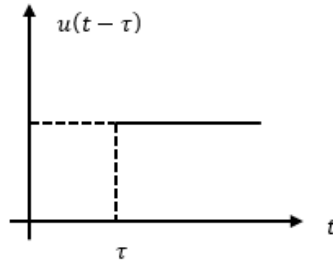
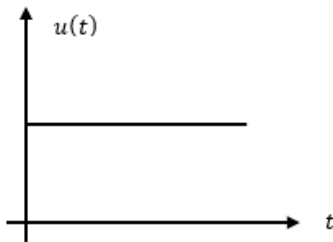
En términos modernos, un sistema dinámico es una cuarteta $\{T, X, A, S\}$ donde T representa el conjunto sobre el que se mide el tiempo, X es un espacio métrico que representa los diferentes valores del estado o movimientos del sistema, A es un subconjunto de X que contiene las condiciones iniciales y S representa el conjunto de posibles movimientos.

$y(n) = (2x(n) - x(n)^2)^2$	Estático o sin memoria
$y(t) = R(x)(t)$	Estático o sin memoria
$y(t) = x(t)$	Estático o sin memoria
$y(n) = x(n)$	Estático o sin memoria
$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$	Dinámicos o con memoria
$y(t) = x(t - 1)$	Dinámicos o con memoria
$y(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\dashv \Leftarrow$ Dinámicos o con memoria



Esta definición permite visualizar la clasificación típica de los sistemas dinámicos. Estos son continuos cuando T está en los reales positivos y discretos cuando T está en los naturales. Si la dimensión de X es finita, entonces el sistema dinámico es dimensionalmente finito y si los cambios en el sistema son independientes del tiempo T , entonces los sistemas dinámicos son autónomos, de lo contrario son no-autónomos.

5. Un sistema se dice que es invariante en el tiempo, fijo o estacionario, si sus características no cambian con el tiempo, es decir, sus propiedades son invariantes a traslaciones en el tiempo. En caso contrario, el sistema es variante en el tiempo.



Ejemplo. Sistema variante en el tiempo

Un resorte de elasticidad K . La salida (desplazamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza) en $t = 0$ es diferente a la salida en un tiempo posterior, debido al envejecimiento del material ($K = K_0 e^{-\delta t}$)

6. Un sistema dinámico se dice relajado al tiempo t_0 , inicialmente relajado o en reposo si la salida $y_{[t_0, \infty]}$ depende única y exclusivamente de la entrada $[t_0, \infty]$

Si se hablara de energía, el sistema está relajado al tiempo t_0 , si en ese instante no tiene energía almacenada.

Tarea: La respuesta al impulso de un sistema relajado está dada por:

$$g(t, \tau) = e^{-|t-\tau|}$$

para toda t y τ . Diga si el sistema es causal o no y por qué. Diga si el sistema es invariante en el tiempo o no y por qué.

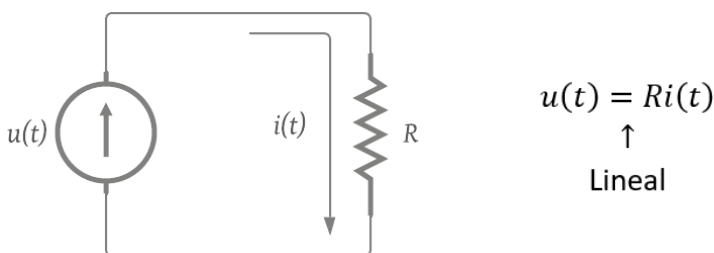
7. Un sistema se dice lineal si la salida producida por la suma de dos entradas es igual a la suma del efecto producido por cada entrada aplicada individualmente.

Principio de superposición

dado $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$ es lineal si $\alpha_1 v_1(t) + \alpha_2 v_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$
 $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$

Si la relación anterior no se cumple, el sistema es no lineal.

Ejemplo: Considere el circuito

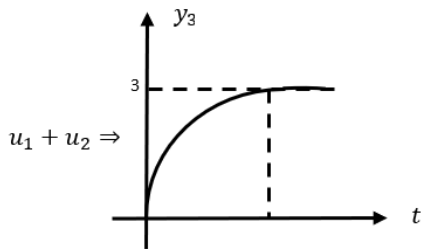
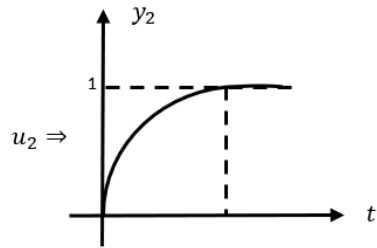
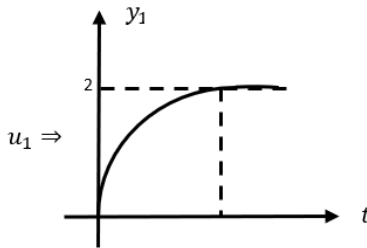


Prácticamente todos los sistemas físicos son no lineales en mayor o menor medida, pero muchos de ellos pueden considerarse lineales bajo ciertas condiciones.

Ejemplo: El sistema $y(t) = [u(t)]^2$ es no lineal

y	u
1	← 1
4	← 2
9	← 3
$9 \neq 5$	

Ejemplo: Sistema lineal



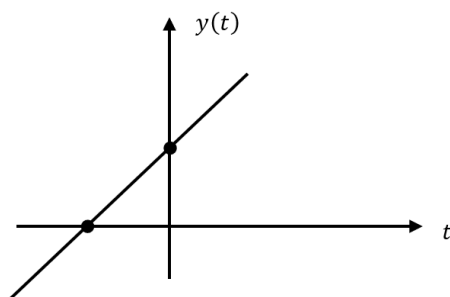
Para que el sistema sea lineal necesita pasar por cero.

Homogeneidad

$$\begin{aligned} T(ax(t)) &= t^2(ax(t)) \\ &= at^2x(t) \\ &= aT(x(t)) \end{aligned}$$

Aditividad

$$\begin{aligned} y(t) &= t^2x(t) \\ T(x_1(t) &+ x_2(t)) \\ &= t^2(x_1(t) + x_2(t)) \\ &= t^2x_1(t) + t^2x_2(t) \\ &= T(x_1(t)) + T(x_2(t)) \end{aligned}$$

Ejemplo: Sistema no lineal

$$y(t) = u(t) + 1$$

u	y
1	2
2	3
3	4

$$4 \neq 5$$

No se cumple el principio de Superposición

El término lineal, función lineal o polinomio lineal, no es el mismo que sistema lineal, porque los polinomios lineales sobre los números reales generalmente no satisfacen la aditividad o la homogeneidad. De hecho, los polinomios solo los cumplen cuando pasan por el origen, la función entonces es llamada función afín o transformación afín. La linealidad o no linealidad de un sistema debe de entenderse como la linealidad o no linealidad del modelo específico que relaciona la entrada y la salida particulares elegidas en el sistema.

En resumen, un sistema se dice lineal si cumple las siguientes propiedades.

$$y(t) = H(u(t))$$

1. $H(u_1 + u_2) = H(u_1) + H(u_2)$ propiedad de aditividad
2. $H(\alpha u_1) = \alpha H(u_1)$ propiedad de homogeneidad

Tarea. Demuestre que si $H(u_1 + u_2) = H(u_1) + H(u_2)$ para cualquier u_1 y u_2 entonces $H(\alpha u) = \alpha H(u)$ para cualquier número racional α .

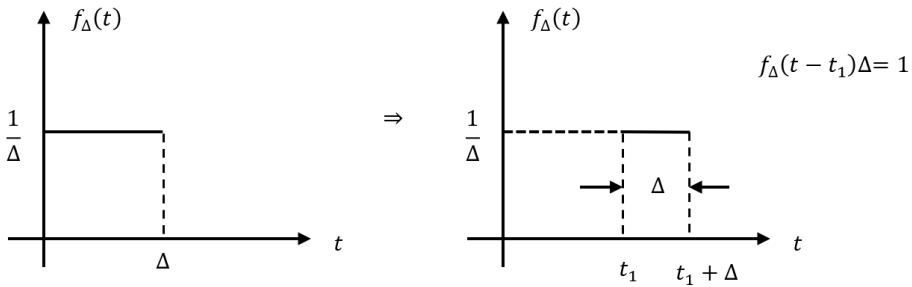
aditividad $\rightarrow$ homogeneidad

1.2 Descripción entrada-salida

Para obtener la descripción entrada-salida de un sistema, es necesario el siguiente concepto:

Función impulso unitario o delta de Dirac. Considere la siguiente función

$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \text{ con } \Delta > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$



Se define la función impulso unitario o Delta de Dirac como:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_{\Delta}(t)$$

Algunas propiedades de esta función son las siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t) dt = u(0)$$

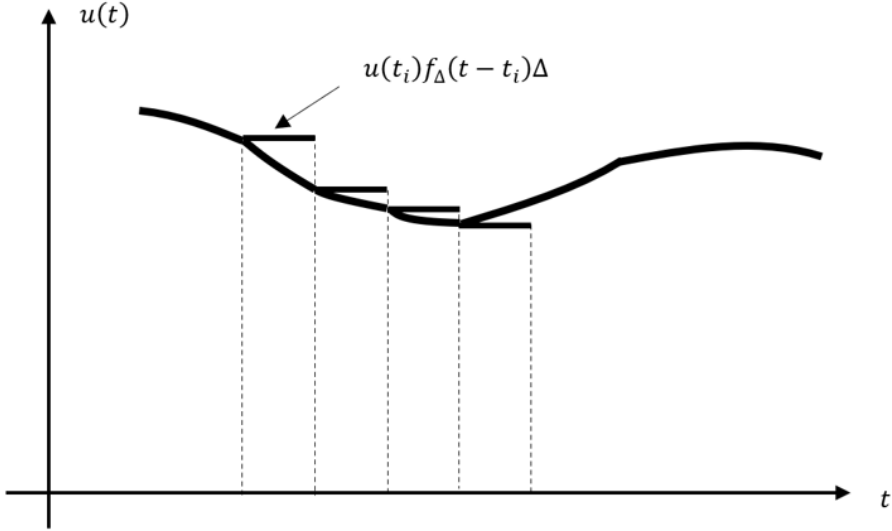
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t - t_1) dt = u(t_1)$$

Para $u(t)$ continua en cero

Para $u(t)$ en t_1

Cualquier función continua a tramos puede ser aproximada por una serie de pulsos. Es decir, la entrada $u(t)$ puede ser aproximada por:

$$u(t) \approx \sum_i u(t_i) f_\Delta(t - t_i) \Delta$$



Si el sistema es lineal, entonces

$$\begin{aligned} y = H(u) &\approx H(\sum_i u(t_i) f_\Delta(t - t_i) \Delta) \\ &\approx \sum_i (H f_\Delta(t - t_i)) u(t_i) \Delta \end{aligned}$$

Cuando $\Delta \rightarrow 0$, tenemos que

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} (H \delta(t - \tau)) u(\tau) d\tau$$

de la ecuación anterior, si se conoce $H\delta(t-\tau)$ para toda τ , entonces se puede obtener la salida del sistema para cualquier entrada. La función $H\delta(t-\tau)$ es la salida del sistema relajado cuando se le aplica un impulso unitario al tiempo τ , por lo tanto, se le conoce como la **respuesta al impulso del sistema**.

Denotando $H\delta(t - \tau) \triangleq g(t, \tau)$

La salida del sistema queda como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Si el sistema es causal entonces $g(t, \tau) = 0$ para $t < \tau$ es decir

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Considerando que el sistema está relajado en $t=0$, entonces

$$y(t) = \int_0^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Además, si el sistema es invariante en el tiempo, se tiene que:

$$g(t, \tau) = g(t - \tau) \quad \forall \tau$$

entonces

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad \text{Integral de convolución}$$

calculando la transformada de Laplace de $y(t)$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

Para un sistema causal $g(t) = 0$ para $t < 0$ o $g(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$, cuando $t \rightarrow \infty$ el límite superior de la integral de convolución se puede sustituir por ∞ , sustituyendo $y(t)$ y cambiando el orden de integración, se tiene

$$Y(s) = \int_{t=0}^{\infty} \left(\int_{t=0}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right) e^{-s(t-\tau)} e^{-s\tau} dt$$

reordenando

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \left(\int_{t=0}^{\infty} g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right) u(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

usando una nueva variable $v=t-\tau$

$$Y(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} \left(\int_{v=-\tau}^{\infty} g(v)e^{-sv} dv \right) u(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

De nuevo utilizando la condición de causalidad para reemplazar el límite inferior de la integración, dentro del paréntesis de $v=-\tau$ a $v=0$, la integral se vuelve independiente de τ y la doble integración se convierte en:

$$Y(s) = \int_{v=0}^{\infty} g(v)e^{-sv} dv \int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

donde

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

Es llamada la **función de transferencia** del sistema. Entonces la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso y viceversa, la respuesta al impulso es la inversa de la transformada de Laplace de la función de transferencia.

Es importante notar que Laplace transforma la integral de convolución en una ecuación algebraica. En el análisis y en el diseño es más sencillo

usar ecuaciones algebraicas que integrales de convolución, por lo que dicha expresión se utiliza raramente.

1.3 Sistemas de control

Sistema de control, arreglo de componentes interconectados de tal manera que se pueda comandar, dirigir o regular a sí mismo o a otro sistema.

Automatización, control de un proceso por medios automáticos en vez de humanos.

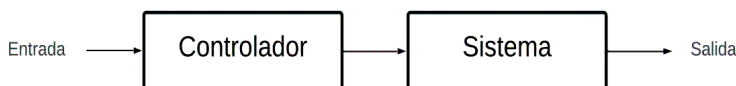
Clasificación de los sistemas de control

a. **Por su naturaleza u origen**

- Naturales (biológicos)
- Hechos por el ser humano
- Híbridos (ej. Persona manejando un automóvil)

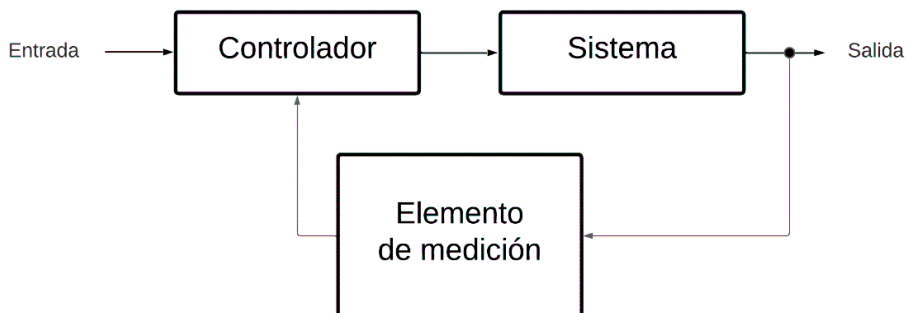
b. **Por el tipo de información**

- Sistemas de control en lazo abierto: Son aquellos en los cuales la acción de control es independiente de la salida. Típicamente funcionan en una base de tiempo.



Ejemplos: Tostador automático, ventilador automático, lavadora, semáforo.

- Sistemas de control en lazo cerrado: La acción de control depende de la salida. Se conocen también como sistemas retroalimentados.



Ejemplos: Sistema de control de temperatura de una habitación, control de nivel en un tanque de agua con flotador, control de temperatura del cuerpo humano, piloto automático de aviones, persona conduciendo un automóvil.

Análisis, investigación de las propiedades del sistema. Nos permite obtener una imagen cualitativa de los fenómenos del universo.

Diseño, determinar el sistema de control para ejecutar una tarea específica.

Ejemplo

$$H(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \text{Sistema inestable}$$

Usando un compensador

$$H_c(s) = \frac{s-1}{s+1}$$



	Control clásico	Control moderno
Sistema físico	Sistemas dinámicos, lineales, escalares, invariantes en el tiempo	Sistemas dinámicos, lineales, no lineales, variantes e invariantes en el tiempo, escalares, multivariariables,
Modelado	Ecuaciones diferenciales Ecuaciones a diferencias → Función de transferencia	Espacio de estado
Análisis, diseño y evaluación	Análisis de respuesta en el tiempo Análisis por métodos frecuenciales	Conceptos de controlabilidad, observabilidad, estabilidad, polos y ceros,
Diseño del controlador	PID, lugar de las raíces, Bode, Nyquist, compensadores	Retroalimentación de estado para sistemas lineales invariantes... Retroalimentación de la salida Retroalimentación del error Control óptimo ⋮

Tarea:

Redactar un resumen de máximo dos cuartillas en el que se analice la importancia del control automático, el desarrollo histórico del control automático y las tendencias de los sistemas de control.

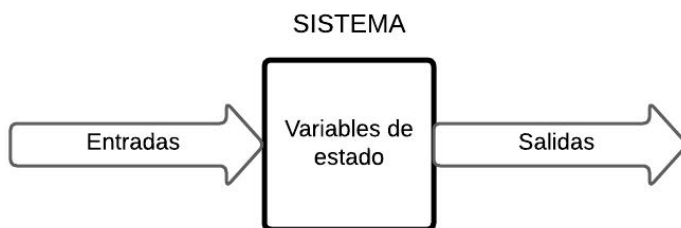
Capítulo 2

Descripción en variables de estado de sistemas dinámicos

2.1 El concepto de estado

A finales del siglo XIX Poincaré, con su trabajo sobre los “Nuevos métodos de la mecánica celeste”, intuyó la necesidad de formular una teoría general de los sistemas dinámicos en función de conjuntos de ecuaciones diferenciales de primer orden, e introdujo la ahora familiar idea de considerar el conjunto relevante de variables del sistema como la trayectoria de un punto en un espacio n -dimensional. Este enfoque se popularizó rápidamente y se vino a conocer como método del **espacio de estado**.

Así, el concepto de estado se hace dominante en el estudio de sistemas dinámicos. Lo que es fundamental es que su conducta actual está influenciada por su historia y por lo tanto su comportamiento no puede especificarse simplemente como una relación “instantánea” entre conjuntos de variables de entrada y salida. Se necesita un conjunto extra de variables cuyo objetivo es tomar en cuenta la historia del sistema; estas variables son las llamadas **variables de estado**.



Las variables de estado representan la cantidad mínima de información que resume todo el pasado dinámico del sistema y es todo lo que se necesita conocer para poder predecir su evolución frente a cualquier señal de entrada que se le aplique al sistema.

Considérese el caso de un sistema dinámico modelado por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

donde $u_1, u_2, \dots, u_p$ son las variables de entrada, $(\dot{x}_i)$ denota la derivada de x_i con respecto al tiempo t . Las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ son llamadas variables de estado y corresponden a la información mínima necesaria para representar al sistema.

Utilizando notación matricial se tiene:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema dinámico queda representado por:

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

llamada ecuación de estado con x el estado y u la entrada. Otra forma común de expresar la ecuación de estado es sin la presencia explícita de la señal de entrada la cual a su vez puede expresarse en función del propio estado (retroalimentación de estado)

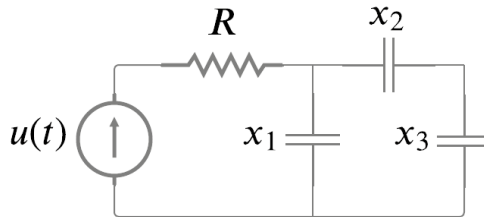
$$\dot{x} = f(t, x)$$

Un caso especial es aquel en el que el campo vectorial f **no depende explícitamente del tiempo t** .

$$\dot{x} = f(x)$$

y se le llama **sistema autónomo invariante en el tiempo**.

Ejemplo: Considérese el siguiente sistema:



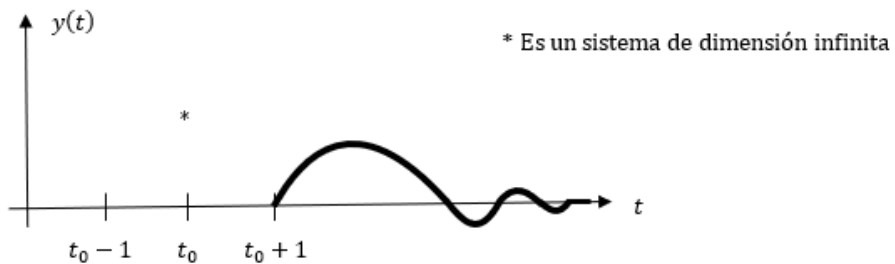
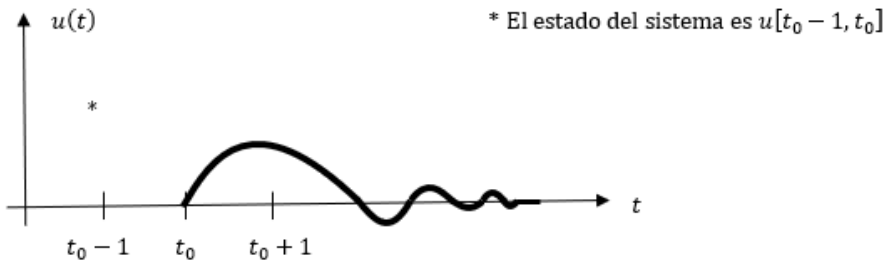
x_1, x_2 y x_3 califican como variables de estado, sin embargo, la información mínima requerida solo es dos de ellas

$x_1 \quad x_3$

$x_2 \quad x_3$

$x_1 \quad x_2$

Ejemplo: Sea el sistema continuo definido como $y(t)=u(t-1)$ con $t \in \mathbb{R}$



En este caso la salida simplemente corresponde a la entrada retardada 1s. Por lo que para determinar $y(t)$ para $t \geq t_0$ a partir de $u(t)$ con $t \geq t_0$ es necesario contar con la información de $u(t)$ para $t_0 - 1 \leq t < t_0$. Por lo tanto, el estado inicial del sistema tiene puntos infinitos en $t_0 - 1 \leq t < t_0$ es decir el vector de estado es de dimensión infinita.

Ejemplo. Considere el sistema en tiempo discreto $y(k)=u(k-1)$ en este caso solo se requiere un dato para iniciar su evolución, es un sistema de orden 1, su dimensión es 1.

$$y(k) = u(k-1)$$

aplicando transformada z

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

Nótese que cada sistema continuo que involucra retardos en el tiempo es de dimensión infinita. No así los sistemas discretos en el tiempo.

Los sistemas continuos de dimensión finita usualmente se describen por ecuaciones diferenciales ordinarias o ciertos tipos de ecuaciones integrales, mientras que los sistemas discretos de dimensión finita, usualmente se caracterizan por ecuaciones a diferencias ordinarias o sus contrapartes integrales.

Las ecuaciones para describir sistemas de dimensión infinita incluyen las ecuaciones a derivadas parciales, ecuaciones integro-diferenciales de Volterra, ecuaciones diferenciales funcionales, y muchas otras.

Ejemplo: Considere un banco creado en el año 1900. Desde su fundación sus transacciones han sido múltiples. Si se considera su capital como la salida del sistema y es deseable conocerla a partir del día de hoy o de un día cualquiera, no es necesario revisar operación por operación desde que fue fundado ya que la historia que afecta el aumento del capital puede resumirse en varias cifras (dinero en inversiones, cuentas por cobrar, dinero en efectivo, etc.) que constituyen el estado de cuentas (estado del sistema) al día de hoy.

Ejemplo. Considere un sistema dado por $y(t)=[u(t)]^2$

No tiene estado, es un sistema estático, la salida en un momento dado solo depende de la entrada aplicada en ese momento.

Ejemplo. ¿Cuáles son los estados de un interruptor?

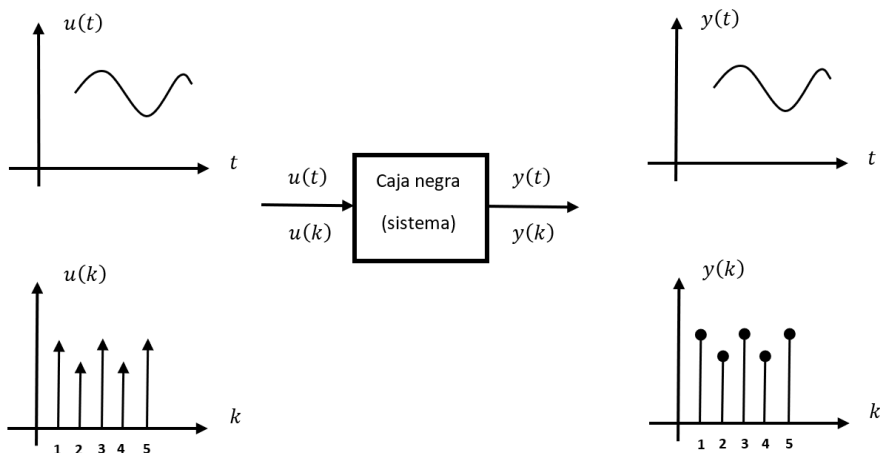
Los sistemas de dimensión finita se representan en espacios vectoriales de dimensión finita (Euclidiano) y los sistemas de dimensión infinita se representan en espacios vectoriales de dimensión infinita (Hilbert)

Tarea. De tres ejemplos de sistema continuo de dimensión finita, tres ejemplos de sistema discreto de dimensión finita y tres ejemplos de dimensión infinita, todos con significado físico.

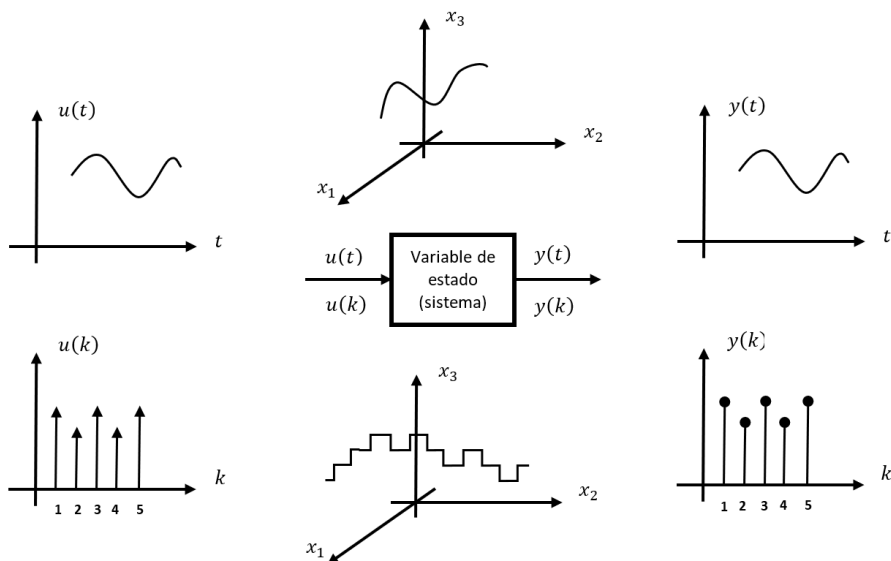
– Fluidos – Vibraciones – Problemas de la frontera – Memoria térmica – Fluidos no newtonianos - incomprensibles	}	ecuaciones diferenciales parciales → dimensión infinita
---	---	---

Las descripciones de sistemas híbridos involucran dos o más tipos diferentes de ecuaciones. Los sistemas no deterministas se describen por sus contrapartes estocásticas de dichas ecuaciones (por ejemplo, las ecuaciones diferenciales de Ito). La descripción en variables de estado o descripción en espacio de estado o descripción interna de sistemas de dimensión finita. Otra forma de describir sistemas continuos y discretos de dimensión finita involucran operadores que establecen una relación entre las entradas y las salidas del sistema, llamada descripción entrada-salida o descripción externa del sistema.

Descripción externa



Descripción interna



De los ejemplos anteriores se deduce:

1. El concepto de estado se puede aplicar a cualquier sistema dinámico.
2. La elección de las variables de estado no es única.

3. El estado de un sistema es una cantidad que puede o no tener significado físico.
4. El estado de un sistema puede consistir de un conjunto finito o infinito de números.

La teoría moderna de control basada en el conocimiento del comportamiento interno de los sistemas, reflejado en las variables que influyen en su dinámica (variables de estado).

Es común emplear la nomenclatura de representación interna, cuando se utiliza el estado para representar un sistema y representación externa cuando se emplea la relación entrada-salida.

2.1.1 Propiedades de las variables de estado

Las trayectorias que describe el vector de estado de un sistema causal y determinista dentro del espacio de estado están sujetas a las siguientes condiciones ligadas a la definición de estado del sistema:

1. Unicidad

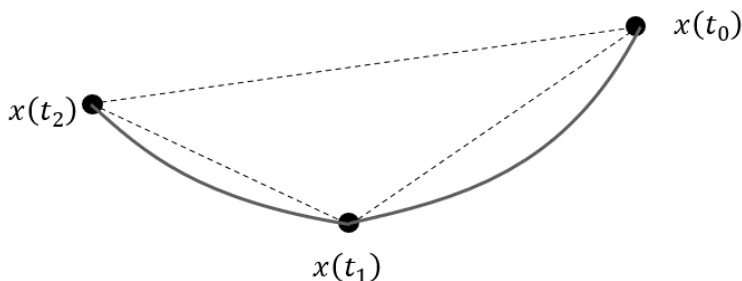
$$\forall t \geq t_0, \quad x_0 = x(t_0), \quad u(\tau) \quad t_0 < \tau \leq t \Rightarrow x(t) \text{ es única}$$

2. Continuidad

Las trayectorias en el espacio de estado son continuas:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x(t_0) \quad \forall t, t_0$$

3. Transitividad o propiedad de transición



Si se consideran en una trayectoria en el espacio de estado tres tiempos t_0, t_1, t_2 tal y como se muestra en la figura.

El valor del estado en estos tiempos está relacionado por la propiedad de transición:

$$x(t_2) = f(t_2, t_0, x(t_0), u(\tau)) \text{ con } t_0 < \tau \leq t_2$$

o

$$x(t_2) = f(t_2, t_1, x(t_1), u(\tau)) \text{ con } t_1 < \tau \leq t_2$$

siendo

$$x(t_1) = f(t_1, t_0, x(t_0), u(\tau)) \text{ con } t_0 < \tau \leq t_1$$

Es decir, para conocer el estado en el instante t_2 , da lo mismo:

- Conocer el estado en t_0 y la entrada entre t_0 y t_2
- Conocer el estado en t_1 y la entrada entre t_1 y t_2 , evidentemente, para conocer el estado en t_1 , es necesario conocer el estado en t_0 y la entrada entre t_0 y t_1 .

2.1.2 Ecuaciones del modelo de estado

Como se ha establecido anteriormente, la teoría de estado representa un formalismo para el tratamiento y resolución de sistemas dinámicos deterministas. Una definición amplia de dichos sistemas es:

Un modelo de sistema dinámico determinista es una relación matemática entre dos conjuntos de variables, las de entrada y las de salida.

$$u(t) \rightarrow y(t)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$

En la teoría moderna se añade, como ya se ha explicado, otro conjunto de variables, a las que se llama estado o variables de estado. Entradas y estado se encuentran relacionados por la ecuación.

$$x(t) = f(t, t_0, x(t_0), u(\tau)), \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

Además, es posible definir una relación entre las variables de estado y la salida

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

donde la salida en el instante t solo depende del tiempo, del estado y de la entrada en ese instante, no de valores anteriores.

Por lo tanto, los sistemas dinámicos diferenciales se caracterizan porque pueden ser representados por un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ Ecuación de estado} \\ y(t) = h(t, x(t), u(t)) \text{ Ecuación de salida} \end{array} \right\} \text{ Realización en el espacio de estado}$$

La solución de la ecuación de estado con determinadas condiciones iniciales describirá la trayectoria seguida por el estado dentro del espacio de estado. El espacio de estado es el espacio n -dimensional cuyos ejes coordenados consisten en los n componentes del vector de estado. Por lo cual, cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio. Así mismo se llama orden del modelo al número de variables de estado con que se construye. Finalmente, la determinación de los puntos de equilibrio se logra encontrando las soluciones de

$$f(t, x(t), u(t)) = 0$$

Para los sistemas lineales solo puede existir un punto de equilibrio aislado. Sin embargo, los sistemas no lineales pueden tener múltiples puntos de equilibrio aislados, ciclos limite, escapes en tiempo finito, entre otros.

Tarea. Encuentre la representación en espacio de estado de un sistema lineal de dimensión finita descrito por un conjunto de ecuaciones, de la forma.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) & i = 1, \dots, n \\ y_j = g_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) & j = 1, \dots, p \end{array}$$

donde u_l ($l=1, \dots, m$) denota la entrada o estímulo, y_j ($j=1, \dots, p$) denota las salidas o respuestas; x_i ($i=1, \dots, n$) denota las variables de estado, t

denota el tiempo, $\dot{x}_i$ denota la derivada con respecto al tiempo de x_i , f_i ($i=1, \dots, n$) son funciones reales al igual que g_j ($j=1, \dots, p$)

$$\begin{aligned} \text{b. } x_i(k+1) &= f_i(k, x_i(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) & i &= 1, \dots, n \\ y_j(k) &= g_j(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) & j &= 1, \dots, p \end{aligned}$$

Caso continuo

Para x

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ & \vdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2m}(t) \\ & \vdots & & \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \end{aligned}$$

Para y

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t)$$

$$y_2(t) = c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) + d_{21}(t)u_1(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t)$$

$\vdots$

$$y_p(t) = c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & c_{p2}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(t) & d_{p2}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

En el caso invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Caso discreto

Para x

$$x_1(k+1) = a_{11}(k)x_1(k) + \cdots + a_{1n}(k)x_n(k) + b_{11}(k)u_1(k) + \cdots + b_{1m}(k)u_m(k)$$

$$\vdots$$

$$x_n(k+1) = a_{n1}(k)x_1(k) + \cdots + a_{nn}(k)x_n(k) + b_{n1}(k)u_1(k) + \cdots + b_{nm}(k)u_m(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(k) & a_{12}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ a_{21}(k) & a_{22}(k) & \cdots & a_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & a_{n2}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \cdots & b_{1m}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \cdots & b_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \cdots & b_{nm}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

Para y

$$y_1(k) = c_{11}(k)x_1(k) + c_{12}(k)x_2(k) + \cdots + c_{1n}(k)x_n(k) + d_{11}(k)u_1(k) + \cdots + d_{1m}(k)u_m(k)$$

$$\vdots$$

$$y_p(k) = c_{p1}(k)x_1(k) + c_{p2}(k)x_2(k) + \cdots + c_{pn}(k)x_n(k) + d_{p1}(k)u_1(k) + \cdots + d_{pm}(k)u_m(k)$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix}}^{y(k)} &= \overbrace{\begin{bmatrix} c_{11}(k) & c_{12}(k) & \cdots & c_{1n}(k) \\ c_{21}(k) & c_{22}(k) & \cdots & c_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(k) & c_{p2}(k) & \cdots & c_{pn}(k) \end{bmatrix}}^{C(k)} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}}^{x(k)} \\
&+ \overbrace{\begin{bmatrix} d_{11}(k) & d_{12}(k) & \cdots & d_{1m}(k) \\ d_{21}(k) & d_{22}(k) & \cdots & d_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1}(k) & d_{p2}(k) & \cdots & d_{pm}(k) \end{bmatrix}}^{D(k)} \overbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}}^{u(k)} \\
y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k)
\end{aligned}$$

En el caso invariante en el tiempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

2.1.3 Fenómenos no lineales

Debido a la gran cantidad de herramientas existentes para el análisis de sistemas lineales, una primera solución es la linealización, si es posible, alrededor de un punto de operación y analizar el modelo lineal resultante. Esta es una práctica común en ingeniería y puede ser muy útil. Sin embargo, la linealización, por si sola puede ser no suficiente; lo ideal es desarrollar herramientas para el análisis de sistemas no lineales. En general existen dos limitaciones principales para la linealización.

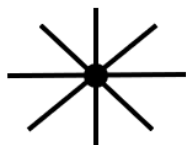
Primero, debido a que la linealización es una aproximación en los alrededores del punto de operación, esta solo podrá predecir el comportamiento local del sistema no lineal en la vecindad del punto de operación y por lo tanto no se podrá predecir el comportamiento “global” a través del espacio de estado.

En segundo lugar, las dinámicas de un sistema no lineal son mucho más ricas que las de un sistema lineal. Existen fenómenos no lineales esenciales, los cuales nunca podrán ser descritos por un sistema lineal, como:

- **Escape en tiempo finito:** El estado de un sistema lineal inestable tiende a infinito conforme el tiempo se aproxima hacia infinito. Sin embargo, el estado de un sistema no lineal puede tender a infinito en un tiempo finito.

$$\dot{x} = 1 + x^2 \quad x(0) = 0 \Rightarrow x = \tan t \Rightarrow \begin{cases} x(t) \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- **Múltiples puntos de equilibrio aislados:** Un sistema lineal solo puede tener un punto de equilibrio aislado; entonces solo podrá tener un punto de operación en estado estable el cual atraerá al estado del sistema independientemente del estado inicial. Un sistema no lineal puede tener más de un punto de equilibrio aislado. El estado puede converger a alguno de los múltiples puntos de operación en estado estable, dependiendo del estado inicial del sistema.



lineal



no lineal

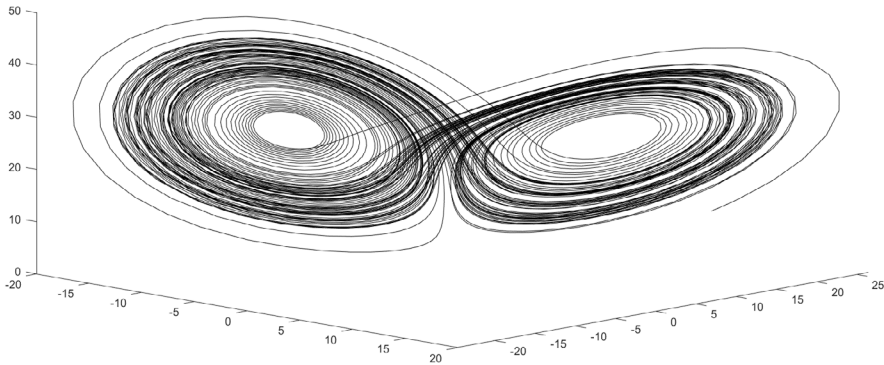
- **Ciclos límite:** Para que un sistema lineal invariante en el tiempo oscile, deberá tener un par de valores propios en el eje imaginario, lo que es una condición poco robusta que es casi imposible de mantener en presencia de perturbaciones. Aún y cuando se lleve a cabo, la amplitud de la oscilación dependerá del estado inicial. En la vida real, una oscilación estable debe de ser producida por un sistema no lineal. Existen sistemas no lineales que pueden generar oscilaciones de amplitud y frecuencia fijas, independientemente del estado inicial. Este tipo de oscilación se conoce como ciclo límite.

- **Subarmónicos, armónicos u oscilaciones casi-periódicas:** Un sistema lineal estable bajo una entrada periódica, produce una salida de la misma frecuencia. Un sistema no lineal bajo una entrada (excitación) periódica puede oscilar con frecuencias que son múltiplos; o submúltiplos de la frecuencia de entrada. Y puede generar una oscilación casi-periódica, un ejemplo de ella es la suma de oscilaciones periódicas con frecuencia que no son múltiplos de otras.
- **Modos múltiples de comportamiento:** No es inusual que un sistema no lineal presente dos o más modos de comportamiento. Un sistema no forzado puede tener más de un ciclo límite. Un sistema forzado con excitación periódica puede presentar armónicos, sub armónicos o comportamientos en estado estable más complicados, dependiendo de la amplitud y frecuencia de la entrada. Incluso pueden presentar saltos discontinuos en el modo de comportamiento cuando la amplitud o la frecuencia de la excitación cambia suavemente.
- **Caos:** Un sistema no lineal puede tener un comportamiento en estado estable más complicado que no es un punto de equilibrio, una oscilación periódica ni una oscilación casi-periódica. Tal comportamiento comúnmente es llamado caos. Algunos de estos movimientos caóticos. Presentan aleatoriedad, independientemente de la naturaleza determinista del sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= x(b - z) - y \\ \dot{z} &= xy - cz \\ a, b, c &> 0\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}a &= 10 \\ b &= 28 \\ c &= \frac{8}{3}\end{aligned} \right\} \text{comportamiento caótico}$$

b=28 orbitas periódicas
Edward Lorenz 1963
W. Tucker 2001



- Láseres
- Generadores eléctricos
- Rollos de convección en la atmósfera terrestre

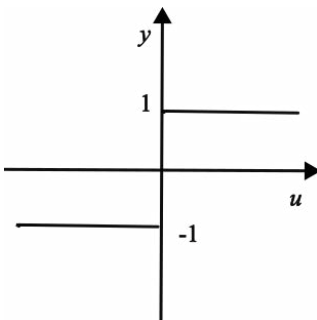
2.1.4 No linealidades comunes

En esta sección se consideran otras no linealidades que se presentan en los componentes comunes, estas pueden ser sin memoria o con memoria.

No linealidades sin memoria, con memoria cero o estáticas

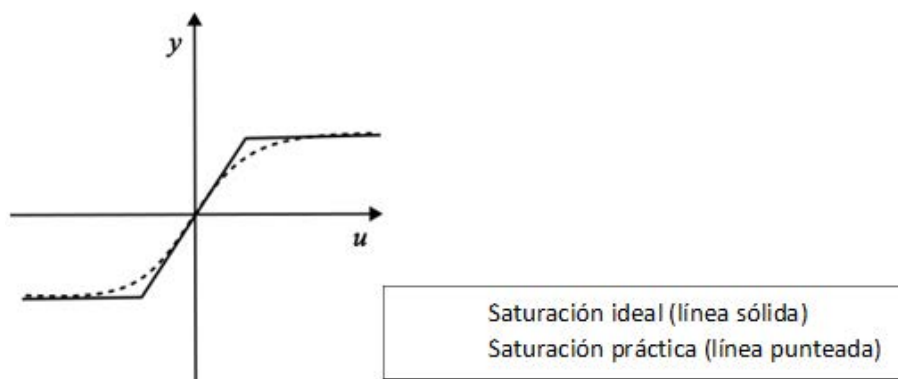
La salida de la no linealidad en cualquier instante de tiempo está determinada única y exclusivamente por su entrada en ese instante y no depende de la historia de la entrada.

Relevador ideal: Relevadores, tiristores, interruptores, etcétera.



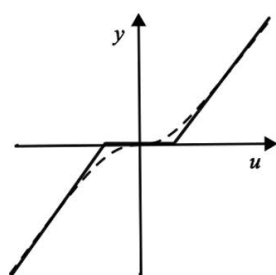
$$\text{sgn}(u) \begin{cases} 1, & \text{si } u > 0 \\ 0, & \text{si } u = 0 \\ -1, & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Saturación: Amplificadores (electrónicos, magnéticos, neumáticos, hidráulicos, motores, etcétera)

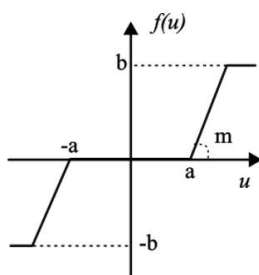


$$sat(u) \begin{cases} u, & \text{si } |u| \leq 1 \\ sgn(u), & \text{si } |u| \geq 1 \end{cases}$$

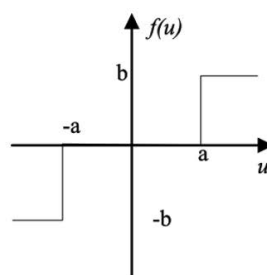
Zona muerta: Válvulas, amplificadores ante señales de entrada pequeñas



Ideal (línea sólida)
Práctica (línea punteada)

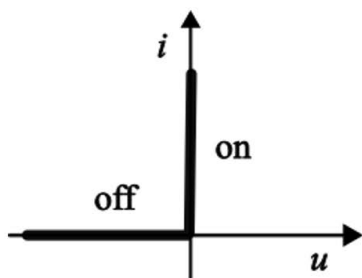


Saturación con zona muerta

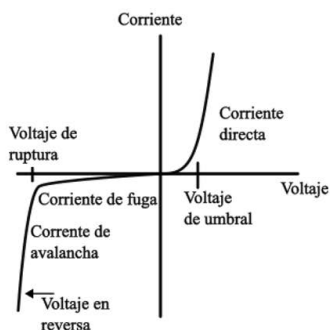


Signo con zona muerta

Diodo: Semiconductores

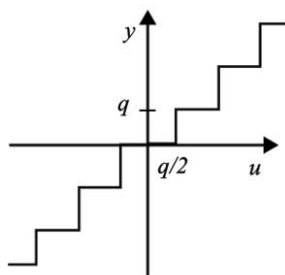


Diodo ideal

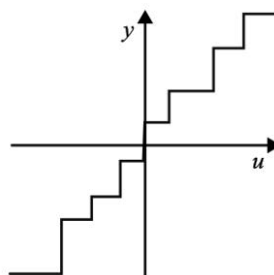


Diodo práctico

Cuantificación: Convertidores analógico-digital



Uniforme

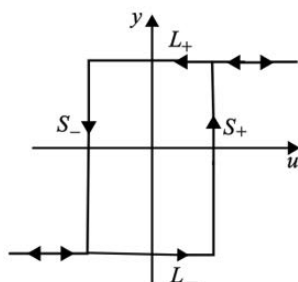


No uniforme

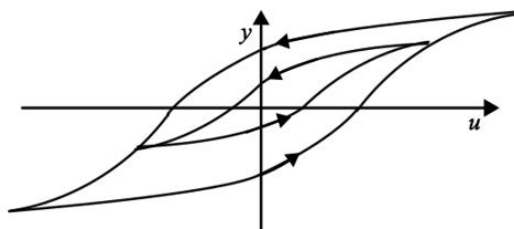
No linealidades con memoria

La salida de la no linealidad en cualquier instante de tiempo está determinada por su entrada en ese instante y su historia.

Relevador con histéresis: Se usa frecuentemente para describir un efecto que aparece en materiales ferromagnéticos. Se caracteriza porque al magnetizar este tipo de material mantiene la señal magnética tras retirar el campo magnético que la ha inducido.

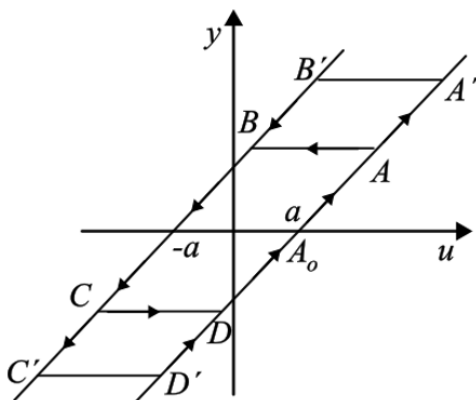
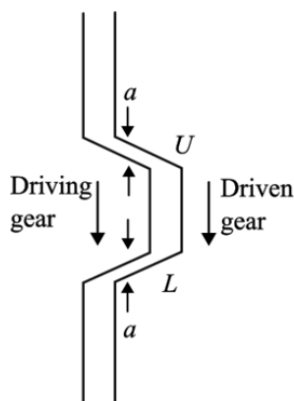


Histéresis ideal



Histéresis práctica

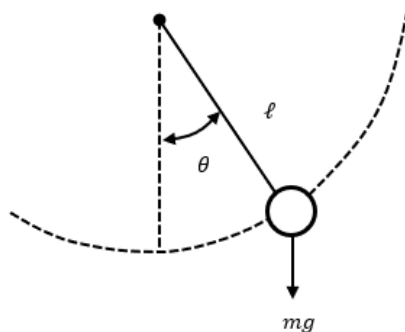
No linealidad por holgura o *backlash*: Se usa frecuentemente para describir un efecto que aparece en la transmisión de movimiento de un engrane recto a otro.



2.2 Ejemplos físicos

Ejemplo: Ecuación del péndulo en espacio de estado.

Determine la ecuación del péndulo, mostrado en la figura, considerando la acción de la fuerza de gravedad y la existencia de una fuerza de fricción que se opone al movimiento del péndulo, la cual se supone proporcional a la velocidad del péndulo y con un coeficiente de fricción k . Además, encuentre los puntos de equilibrio.



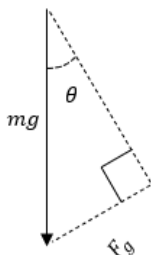
La posición del péndulo está definida por el arco S del círculo de radio ℓ que establece el ángulo θ

$$S = \ell\theta$$

Entonces la aceleración angular es:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

por la 2ª ley de Newton



$$F = ma = m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

es la fuerza necesaria para producir el movimiento, vencer la fuerza de gravedad y vencer la fricción.

$$\text{sen}\theta = \frac{F_g}{mg} \quad \therefore \quad F_g = mg \text{sen}\theta$$

La fuerza de fricción es proporcional a la velocidad

$$v = \frac{dS}{dt} = \ell \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow F_f = k\ell \frac{d\theta}{dt}$$

entonces

$$F + F_g + F_f = 0 \Rightarrow F = -F_g - F_f$$

$$m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \text{sen}\theta - k\ell \frac{d\theta}{dt} \quad \text{Ecuación del péndulo}$$

1 ecuación diferencial de 2^{do} orden $\Rightarrow$ ecuación de estado de dimensión 2

$$x_1 = \theta \text{ y } x_2 = \dot{\theta} \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$m\ell\dot{x}_2 = -mg\text{sen}x_1 - k\ell x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{mg}{m\ell}\text{sen}x_1 - \frac{k\ell x_2}{m\ell}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Ecuación de estado del péndulo

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2$$

Sin fricción – ciclo límite

Para encontrar los puntos de equilibrio

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{g}{\ell}\text{sen}x_1 - \frac{k}{m}x_2 \Rightarrow \text{sen}x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = n\pi$$

$$\text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Entonces el péndulo tiene sus puntos de equilibrio en $(n\pi, 0)$. Evidentemente esto corresponde a dos posiciones de equilibrio $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ el resto son repeticiones.

$(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable

$(\pi, 0)$ es un punto de equilibrio inestable

Ejemplo: Ecuación de estado de un robot.

Las ecuaciones dinámicas para un robot con m articulaciones toman la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

donde $q \in \mathbb{R}^m$ representa la posición, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control (torque) M es la matriz de inercia, C representa las fuerzas de Coriolis, y el término g incluye a las fuerzas de gravedad. Encuentre la ecuación en espacio de estado.

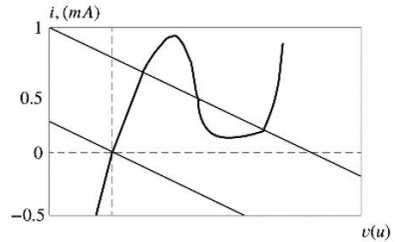
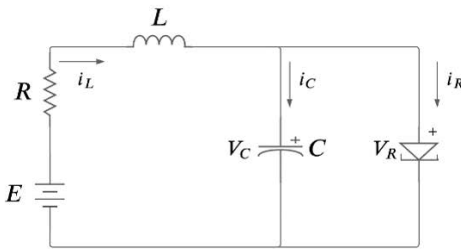
1 ecuación diferencial ordinaria de 2^{do} orden $\Rightarrow$ 2 ecuación de estado
Tomando las variables de estado como: $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$, se tiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = M^{-1}(x_1)[-g(x_1) - C(x_1, x_2)x_2 + u]$$

Ejemplo: Múltiples puntos de equilibrio aislados.

Considere el circuito del diodo túnel mostrado, donde el diodo túnel tiene una curva característica como lo mostrado. Encuentre la representación en espacio de estado, considerando como variables de estado el voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor y como entrada un voltaje constante E . Defina sus puntos de equilibrio



Usando leyes de Kirchoff en el nodo positivo del capacitor

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

$$C \frac{dV_C}{dt} + h(V_R) - i_L = 0$$

considerando $x_1 = V_C$ y $x_2 = i_L$ con $V_C = V_R$, $U = E$, $y = V_C$

$$C\dot{x}_1 + h(x_1) - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2]^*$$

y usando leyes de Kirchoff de voltaje en la primera malla

$$-E + Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + V_C = 0$$

$$-U + Rx_2 + L\dot{x}_2 + x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + U]$$

*

Para los p. e.

$$-h(x_1) + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = h(x_1)$$

$$-x_1 - Rx_2 + U$$

$$-x_1 - Rh(x_1) + U = 0 \Rightarrow h(x_1) = \frac{U}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

Ejemplo: Ecuación de estado de un robot con m uniones flexibles.

Para el siguiente sistema no lineal.

$$M(q_1)\ddot{q}_1 + h(q_1, \dot{q}_1) + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = U$$

con M , h , k , J y U matrices de las dimensiones adecuadas. Encuentre una representación en espacio de estado.

2 ecuaciones diferencial ordinarias de 2^{do} orden c/u $\Rightarrow$ 4 variables de estado

$$x_1 = q_1 \quad x_2 = \dot{q}_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$M(x_1)\dot{x}_2 + h(x_1, x_2) + k(x_1, x_3) = 0$$

$$\dot{x}_2 = M^{-1}(x_1)[-h(x_1, x_2) - K(x_1 - x_3)]$$

$$x_3 = q_2 \quad x_4 = \dot{q}_2$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$J\dot{x}_4 + k(x_1 - x_3) = U$$

$$\dot{x}_4 = J^{-1}[U + k](x_1 - x_3)$$

Ejemplo: Ecuación diferencial de orden “n”

Encuentre la ecuación en espacio de estado para un sistema dinámico descrito por:

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} = g\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}, u\right)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}$ la salida.

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_n = y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

Ejemplo: Sistema SISO.

Encuentre la ecuación en espacio de estado de un sistema SISO descrito por:

$$\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} = g_1(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}, u) + g_2(t, u, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)})\dot{u}$$

donde $g_2(\cdot)$ es una función diferenciable, u la entrada, y la salida. Considere

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$x_{n-1} = y^{(n-2)}$$

$$x_n = y^{(n-1)} - g_2(\cdot)u = \dot{x}_{n-1} - g_2(\cdot)u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\dot{x}_{n-2} = x_{n-1}$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + g_2(\cdot)u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= y^{(n)} - g_2(\cdot)\dot{u} - \dot{g}_2(\cdot)u \\ &= g_1(\cdot) - \dot{g}_2(\cdot)u\end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\dot{x}_{n-2} = x_{n-1}$$

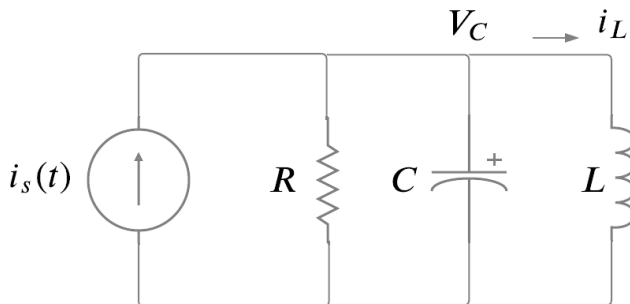
$$\dot{x}_{n-1} = x_n + g_2(\cdot)u$$

$$\dot{x}_n = g_1(\cdot) - g_2(\cdot)u$$

Ejemplo: Inductor tipo Josephson.

Para el circuito mostrado en la figura con un inductor tipo Josephson, el cual tiene una dinámica definida por: $i_L = I_0 \sin(k\phi_L)$ donde ϕ_L es el flujo magnético del inductor con I_0 , y k constantes. Encuentre la ecuación de estado:

- Usando ϕ_L y V_C como variables de estado
- Usando i_L y V_C como variables de estado



- Usando la ley de Kirchhoff de corriente.

$$i_s(t) = i_R + i_c + i_L$$

$$i_s(t) = \frac{V_c}{R} + C \frac{dV_c}{dt} + I_0 \sin k\varphi_L$$

considerando $x_1 = \varphi_L \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_L = V_L = V_c = x_2$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$i_s(t) = \frac{x_2}{R} + C\dot{x}_2 + I_0 \sin kx_1$$

$$x_2 = \frac{1}{C} \left[i_s(t) - I_0 \sin kx_1 - \frac{1}{R} x_2 \right]$$

b. $x_1 = i_L$

$$x_2 = V_c$$

$$x_1 = I_0 \sin k\varphi_L$$

$$\dot{x}_1 = I_0 k \cos k\varphi_L \dot{\varphi}_L$$

Además

$$k^2(I_0^2 - I_L^2) = k^2(I_0^2 - I_0^2 \sin^2 k\varphi_L)$$

$$k^2(I_0^2 - i_L^2) = k^2 I_0^2 (1 - \sin^2 k\varphi_L)$$

$$k^2(I_0^2 - i_L^2) = k^2 I_0^2 \cos^2 k\varphi_L$$

$$\Rightarrow k \sqrt{I_0^2 - I_L^2} = k I_0 \cos k\varphi_L$$

entonces

$$\dot{x}_1 = k \sqrt{I_0^2 - I_L^2} \phi_L$$

como $\dot{\phi}_L = V_c = x_2$

$$\dot{x}_1 = k \sqrt{I_0^2 - I_L^2} x_2$$

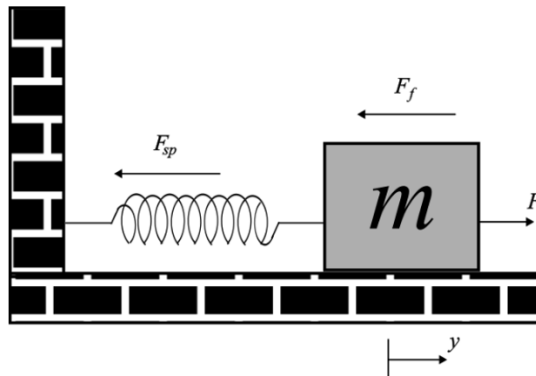
$$i_s(t) = \frac{V_c}{R} + C \frac{dV_c}{dt} i_L$$

$$i_s(t) = \frac{x_2}{R} + C \dot{x}_2 + x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left[i_s(t) - x_1 - \frac{1}{R} x_2 \right]$$

Ejemplo: Sistema masa-resorte.

Considere el sistema masa-resorte mostrado en la figura. Encuentre una representación en espacio de estado, con F como la fuerza externa aplicada, la fuerza de fricción F_f , proporcional a la velocidad con un coeficiente C , la fuerza de restitución del resorte F_{sp} proporcional al desplazamiento en un coeficiente k y y el desplazamiento del resorte. Encuentre la realización matricial del sistema con $u = F$ y y como salida.



con $F_f = C\dot{y}$ y $F_{sp} = ky$ De la segunda ley de Newton:

$$F = F_m + F_f + F_{sp}$$

$$F = m\ddot{y} + C\dot{y} + F_{sp} \Rightarrow F = m\ddot{y} + C\dot{y} + ky$$

considerando $x_1 = y$ $x_2 = \dot{y}$ $u = F$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\dot{x}_2 + Cx_2 + kx_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{C}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{C}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{array} \right\} \text{Realización}$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{C}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Realización matricial} \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array}$$

$$F = m\ddot{y} + C\dot{y} + k(1 + a^2y^2)y$$

$$F = m\ddot{y} + C\dot{y} + ky + ka^2y^3$$

$$u = m\dot{x}_2 + Cx_2 + kx_1 + ka^2x_1^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}a^2x_1^3 - \frac{C}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ y = x_1 \end{array} \right.$$

Para desplazamientos pequeños, la fricción se puede considerar lineal, $F_{sp} = ky$ para desplazamientos mayores la fricción presenta un comportamiento no lineal

$$F_{sp} = k(1 + a^2y^2)y$$

Ejemplo: Tasa de interés.

Considere el mercado de valores con una tasa de interés fija, sin importar la cantidad de dinero en la cuenta (caso lineal) LTI. Con una tasa de interés del 0.015 % por día, calculada diariamente. La entrada $u(k)$ es la cantidad de dinero en la cuenta en el k -ésimo día y la salida $y(k)$ es la cantidad total de dinero al final del k -ésimo día.

Encuentre la realización en espacio de estado que describe la cuenta.

$$\text{Seleccionando } y(k) = x(k) + u(k) \Rightarrow y(k+1) = x(k+1) + u(k+1)$$

Si se selecciona $x(k) = y(k)$ como variable de estado, el sistema resultaría ser no causal. Por lo tanto, se debe seleccionar otra variable de estado. entonces

$$y(k+1) = y(k) + 0.00015y(k) + u(k+1)$$

Sustituyendo $y(k+1) = x(k+1) + u(k+1)$ y $y(k) = x(k) + u(k)$, se tiene:

$$x(k+1) + u(k+1) = x(k) + u(k) + 0.00015x(k) + 0.00015u(k) + u(k+1)$$

$$x(k+1) = 1.00015x(k) + 1.00015u(k)$$

$$y(k) = x(k) + u(k)$$

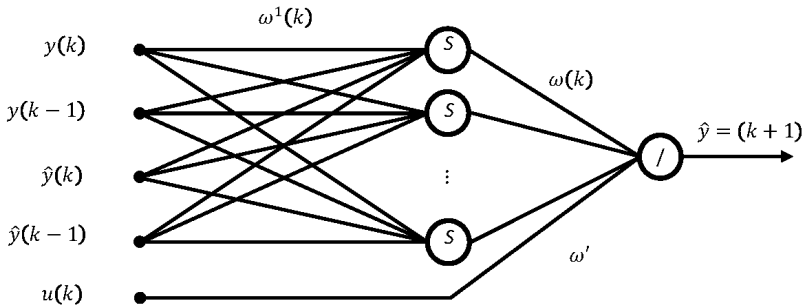
Realización
del
sistema discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Ejemplo: Red neuronal.

Considere el caso de una serie de tiempo no lineal, modelada por una red neuronal tipo perceptrón multicapa de la forma:



orden 2

$$\hat{y}(k+1) = \omega^T(k)Z(y(k), y(k-1), \hat{y}(k), \hat{y}(k-1)) + \omega' u(k)$$

Encuentre una representación en espacio de estado.

Elijiendo las variables de estado como

$$x_1(k) = \hat{y}(k-1)$$

$$x_2(k) = \hat{y}(k)$$

entonces

$$x_1(k+1) = \hat{y}(k) = x_2(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$\vdots$

$$x_2(k+1) = \hat{y}(k+1) = w^T(k)Z(\cdot) + w' u(k)$$

$$x_2(k+1) = w^T(k)Z(\cdot) + w' u(k)$$

Ejemplo: Generador síncrono.

Un generador síncrono conectado a un bus infinito puede representarse como:

$$M\ddot{\xi} = P - D\dot{\xi} - \eta_1 E_q \sin \xi$$

$$\tau \dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos \xi + E_{FD}$$

donde ξ es un ángulo en radianes, E_q es el voltaje, P es la potencia mecánica de entrada, E_{FD} es la entrada de voltaje de campo, D es el coeficiente de amortiguamiento, M es el coeficiente de inercia, τ es la constante de tiempo y η_1, η_2 y η_3 son parámetros constantes.

- Usando $\xi, \dot{\xi}$ y E_q como variables de estado, encuentre la ecuación de estado.
- Sea $P = 0.815$, $E_{FD} = 1.22$, $R_1 = 2.0$, $R_2 = 2.7$, $R_3 = 1.7$, $\tau = 6.6$, $M = 0.0147$ y $\frac{D}{M} = 4$. Encuentre sus puntos de equilibrio.
- Suponga que τ es lo suficientemente grande tal que $(\dot{E}_q) \approx 0$. Muestre que suponiendo E_q constante, escriba el modelo del generador como la ecuación de un péndulo.

$$M\ddot{\xi} = P - D\dot{\xi} - R_1 E_q \sin \xi$$

$$\tau \dot{E}_q = -R_2 E_q + R_3 \cos \xi + E_{FD}$$

- Usando $\xi, \dot{\xi}$ y E_q como variables de estado y E_{FD} como entrada

$$x_1 = \xi$$

$$x_2 = \dot{\xi}$$

$$x_3 = E_q$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{P}{M} - \frac{D}{M} x_2 - \frac{R_1}{M} x_3 \sin x_1$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R_2}{\tau} x_3 + \frac{R_3}{\tau} \cos x_1 + \frac{1}{\tau} u$$

(1)

(2)

(3)

b. con $P = 0.815$, $E_{FD} = 1.22$, $R_1 = 2.0$, $R_2 = 2.7$, $R_3 = 1.7$, $\tau = 6.6$, $M = 0.147$, $\frac{D}{M} = 4$ los puntos de equilibrio son:

De (1) $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ (4)

de (2) $0 = 0.815 - D x_2 - 2.0 x_3 \sin x_1 \Rightarrow x_3 = \frac{0.4075}{\sin x_1}$ (5)

de (3) $0 = -2.7 x_3 + 1.7 \cos x_1 + 1.22$ (6)

sustituyendo (5) en (6)

$$-2.7 \left(\frac{0.4075}{\sin x_1} \right) + 1.7 \cos x_1 + 1.22 = 0$$

$$\left(\frac{-1.10025}{\sin x_1} \right) + 1.7 \cos x_1 + 1.22 = 0$$

Multiplicando todo por $\sin x_1$

$$-1.10025 + (1.7 \cos x_1 + 1.22) \sin x_1 = 0$$

resolviendo para x_1 , se tienen dos raíces $x_1 = 0.4067$ y $x_1 = 1.6398$ con sus repeticiones es decir $x_1 = 0.4067 + 2n\pi$ y $x_1 = 1.6398 + 2n\pi$ por ser una senoidal con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Entonces los puntos de equilibrio están en $(0.4067, 0, 1.0301)$ y

(1.6398, 0, 0.4085) y sus repeticiones. Los valores de x_3 se obtienen al sustituir los valores de x_1 en (5)

c. Con E_q constante el modelo se reduce a:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{P}{M} - \frac{D}{M}x_2 - \frac{\eta_1}{M}E_q \sin x_1$$

que corresponde al modelo del péndulo con entrada.

En sistemas dinámicos discretos los puntos de equilibrio también llamados puntos fijos, se dan cuando las variables de estado no cambian.

$$\Delta x(k) = 0$$

$$x(k+1) = x(k)$$

En sistemas discretos los puntos de equilibrio se dan cuando el valor de las variables de estado no cambia.

En el caso discreto son llamados puntos fijos

$$x(k+1) = x(k) \text{ o } \Delta x(k) = 0$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema

$$x(k+1) = 4 + 0.6x(k)$$

El p. e. está en $x(k+1) = x(k)$, entonces

$$x(k) = 4 + 0.6x(k)$$

$$0.4x(k) = 4$$

$$x(k) = \mathbf{10}$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema

$$q_{n+1} = q_n^2$$

el p. e. se encuentra cuando $q_{n+1} = q_n$

$$q_n = q_n^2$$

$$q_n^2 - q_n = 0$$

$$q_n(q_n - 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} q_n = 0 \\ q_n = 1 \end{array} \right\} \text{tiene dos p. e.}$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema descrito por:

$$x(k+1) = x(k) + rx(k) - bx(k)$$

Para determinar los p. e. se hace $x(k+1) = x(k)$, entonces

$$x(k) = x(k) + rx(k) - bx(k)$$

$$x(k)(r - b) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x(k) = 0 \\ r = b \end{array} \right\} \text{Se tienen dos p. e. uno aislado y el otro continuo}$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del siguiente sistema

$$x_1(k+1) = x_2^2(k) + x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k)$$

$\Delta x_i(k) = 0 \Rightarrow x_1(k+1) = x_1(k)$ y $x_2(k+1) = x_2(k) \forall k$, entonces de la primera variable de estado

$$x_1(k) = x_2^2(k) + x_1(k) \Rightarrow x_2^2(k) = 0 \Rightarrow x_2(k) = 0$$

de la segunda variable de estado

$$x_2(k) = x_1(k) \text{ y dado que } x_2(k) = 0 \Rightarrow x_1(k) = 0$$

entonces el punto de equilibrio está en (0,0)

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del mapa logístico definido por

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k)$$

Simule su comportamiento y compruebe para diferentes valores de r
Los puntos de equilibrio se dan en $x_{k+1} = x_k$, entonces

$$x_k = rx_k(1 - x_k)$$

$$x_k - rx_k + rx_k^2 = 0$$

$$x_k(1 - r + rx_k) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_k = 0 \\ x_k = \frac{r-1}{r} \end{array} \right\} \text{ Se tienen dos p. e. uno aislado en } x_k = 0 \text{ y otro aislado que depende del valor de } r$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema descrito por:

$$P_{t+1} = P_t + rP_t - h$$

El p. e. se encuentra cuando $P_{t+1} = P_t$

$$P_t = P_t + rP_t - h$$

$$tP_t - h = 0$$

$$rP_t = h$$

$$P_t = \frac{h}{r}$$

Ejemplo. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema descrito por.
 $X_{K+1} = X_K + rX_K - bX_K$.

El p. e. se encuentra cuando $X_{K+1} = X_K \Rightarrow X_K = X_K + rX_K - bX_K$

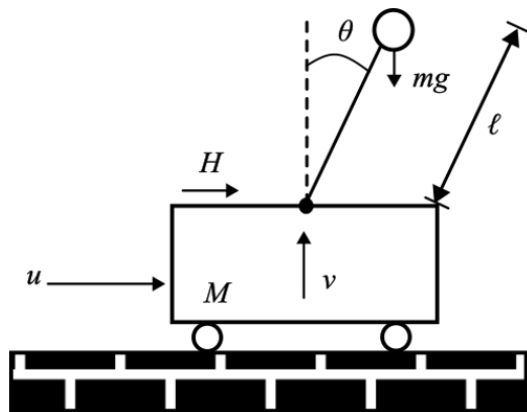
$$X_K(r - b) = 0$$

$$X_K = 0$$

$$r = b$$

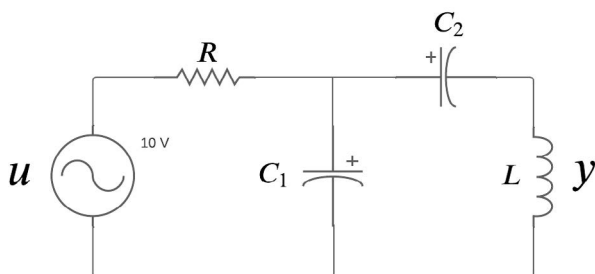
Se tienen dos puntos de equilibrio.

Tarea. Encuentre la realización matricial del péndulo invertido



Tarea. Para la red mostrada en la figura, encuentre la realización matricial considerando u como entrada, el voltaje en la inductancia como salida

y los voltajes de los capacitores y de la inductancia como variables de estado.



2.2.1 Conclusiones de la obtención del modelo de estado

1. En la ecuación de estado solo pueden estar relacionadas las variables de estado, sus primeras derivadas y las entradas.
2. En la ecuación de salida solo pueden estar relacionadas las variables de estado, las entradas y las salidas.
3. En un sistema continuo, las variables de estado no pueden presentar discontinuidades, aunque la entrada al sistema si las puede tener.
4. Se pueden admitir discontinuidades en la entrada (ej. entrada escalón), por lo que las entradas no pueden elegirse como variables de estado del sistema.
5. La representación en espacio de estado no es única, depende de la elección de las variables de estado de estado.
 - a) Variables de estado como magnitudes físicas del sistema.
 - b) Variables de estado como salida de los integradores del sistema.
 - c) Otros.
6. Las variables de estado pueden o no tener significado físico.

2.2.2 Sistemas dinámicos lineales

Un sistema dinámico se dice lineal si cumple la propiedad de superposición. En el caso de sistemas diferenciales, se traduce a que las funciones f y h son lineales con respecto a x y u

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t))\end{aligned}$$

$$f(t, \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha f(t, x_1(t), u_1(t)) + \beta f(t, x_2(t), u_2(t))$$

$$h(t, \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha h(t, x_1(t), u_1(t)) + \beta h(t, x_2(t), u_2(t))$$

donde $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son funciones vectoriales, por lo que la propiedad de linealidad se verifica cuando las ecuaciones del modelo de estado se pueden expresar como funciones lineales de x y u

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cu(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Típicamente un sistema LTI se puede describir algebraicamente como:

$$y(s) = g(s)u(s)$$

En el caso escalar, o matricialmente como

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

donde $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ donde $G(s)$ es llamada función de transferencia del sistema. Cualquier función de transferencia, puede expresarse como $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios del operador de Laplace s .

Dependiendo de los grados de los polinomios, $G(s)$ se puede clasificar como

- $G(s)$ es propia $\Leftrightarrow \deg D(s) \geq \deg N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = \text{cero o constante}$
- $G(s)$ es estrictamente propia $\Leftrightarrow \deg D(s) > \deg N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = 0$
- $G(s)$ es bipropia $\Leftrightarrow \deg D(s) = \deg N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = \text{constante} \neq 0$
- $G(s)$ es impropia $\Leftrightarrow \deg D(s) < \deg N(s) \Leftrightarrow |G(\infty)| = \infty$

Ejemplo. Clasifique las siguientes funciones racionales.

$$a) s^2 + 1 \quad b) 2 \quad c) \frac{1}{s+1} \quad d) \frac{s^2+1}{s+1} \quad e) \frac{s-1}{s+1}$$

¿Cuántas de ellas son funciones racionales propias?

- a) Impropia
- b) Bipropia
- c) Estrictamente propia
- d) Impropia
- e) Bipropia

Una función de transferencia impropia amplifica los ruidos de alta frecuencia, lo que rara vez se encuentra en el mundo real, por lo cual las funciones de transferencia impropias rara vez se encuentran en la práctica.

Evidentemente, debe existir una relación entre la representación en espacio de estado y la función de transferencia de un sistema LTI. Considere el siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

usando la transformada de Laplace con $x(0) = 0$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

entonces

$$X(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \text{ sustituyendo en } Y(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{\text{Función de transferencia del sistema LTI}} U(s)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

FT con p salidas y m entradas

Esto relaciona las representaciones entrada-salida y en espacio de estado; considerando únicamente la FT.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = C \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)B + D$$

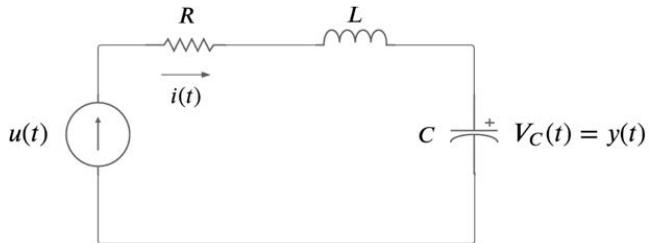
Nota si $D = 0 \Rightarrow G(s)$ es estrictamente propio

$\deg(\text{adj}(sI - A)) < \deg(sI - A)$

Si $D \neq 0 \Rightarrow G(s)$ es propia

Ejemplo. Encuentre la representación en espacio de estado y la función de transferencia del siguiente circuito, considerando como variables de estado:

$$x_1(t) = i(t) \text{ y } x_2(t) = V_C(t)$$



Usando las leyes de Kirchhoff

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + Vc(t) = u(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{Vc(t)}{L} + \frac{1}{L}u(t)$$

$$C \frac{dVc(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow \frac{dVc(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$$

En espacio de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[0 \quad 1]}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Para la FT

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= s^2 + \frac{SR}{L} + \frac{1}{CL} \\ &= \frac{CLs^2 + sCR + 1}{CL} \end{aligned}$$

$$\text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & +\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \text{cof}(sI - A)^T = \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A^{-1}) = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \frac{CL}{CLs^2 + CRs + 1}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \frac{CL}{CLs^2 + CRs + 1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{CL} \frac{CL}{CLs^2 + CRs + 1} = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}$$

Tarea. Repetir utilizando como variables de estado.

$$x_1(t) = Vc(t)$$

$$x_2(t) = \dot{V}c(t)$$

Ejemplo. Encuentre la función de transferencia del siguiente sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 5 \quad 1]x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [4 \quad 5 \quad 1]$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & -6 & 6s \\ s + 6 & s^2 + 6s & -11s \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & (-1) & 0 \\ (0) & s & (-1) \\ 6 & (11) & s + 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & -6 & 6s \\ s + 6 & s^2 + 6s & -11s - 6 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s + 6 & 1 \\ -6 & s^2 + 6s & s \\ 6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s \begin{vmatrix} s & -1 \\ 11 & s + 6 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1s & -1 \end{vmatrix} = s(s^2 + 6s + 11) + (1)$$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$C(sI - A)^{-1}B = [4 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s + 6 & 1 \\ -6 & s^2 + 6s & s \\ 6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$G(s) = \frac{4 + 5s + s^2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Ejemplo. Para el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ck \\ k \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1]x$$

Encuentre la función de transferencia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ck \\ k \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & b \\ -1 & s+a \end{bmatrix}$$

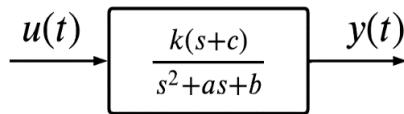
$$\text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ -b & s \end{bmatrix} \quad \text{adj} = (sI - A) = \begin{bmatrix} s+a & -b \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + as + b$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+a & -b \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ck \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + as + b}$$

$$G(s) = \frac{ck + ks}{s^2 + as + b}$$

Ejemplo. Encontrar un modelo en espacio de estado para el sistema.



$$k(s + C)u = (s^2 + as + b)y$$

$$s^2 + asy + by + ksu + kcu = 0$$

$$\underbrace{s(sy + ay - ku)}_{\dot{x}_1} + \underbrace{by}_{x_2} - ck u = 0 \quad (1)$$

definiendo

$$x_1 = sy + ay - ku = \dot{y} + ay - ku \Rightarrow x_1 = x_2 + a\dot{x}_2 - ku$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - ax_2 + ku$$

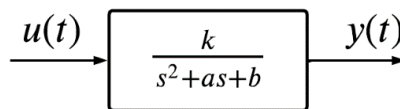
$$x_2 = y$$

entonces
de (1)

$$\dot{x}_1 = s(sy + ay - ku) \Rightarrow \dot{x}_1 = cku - bx_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= cku - bx_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - ax_2 + ku \\ y &= x_2\end{aligned}$$

Ejemplo. Encuentre una representación en espacio de estado para el siguiente sistema.



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F.T.$$

La dinámica del sistema está dada por:

$$ku = s^2y + asy + by$$

$$ku = \ddot{y} + a\dot{y} + by$$

$$\text{con } x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$ku = \dot{x}_2 + ax_2 + bx_1$$

$$\dot{x}_2 = ku - ax_2 - bx_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2 + ku$$

$$y = x_1$$

Ejemplo. Encuentre la función de transferencia del siguiente sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 5]x$$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [4 \quad 5] \quad D = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & 3.5 \\ -6 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s-4 & 6 \\ -3.5 & s+6 \end{bmatrix} \quad \text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s-4 & -3.5 \\ 6 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+6)(s-4) + 21 = s^2 + 2s - 24 + 21 = s^2 + 2s - 3$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [4 \quad 5] \begin{bmatrix} s - 4 & -3.5 \\ 6 & s + 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} -s + 4 - 3.5 \\ -6 + s + 6 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\
 &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} 0.5 - s \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\
 &= \frac{2 - 4s + 5s}{s^2 + 2s - 3} = \boxed{\frac{s + 2}{s^2 + 2s - 3}}
 \end{aligned}$$

2.2.3 Interpretación dinámica de polos y ceros

Un número real o complejo λ se llama polo de una función de transferencia propia $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ si $|G(\lambda)| = \infty$ y se llama cero si $G(\lambda) = 0$.

Si $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos (no tienen factores comunes) entonces todas las raíces de $N(s)$ son ceros de $G(s)$ y todas las raíces de $D(s)$ son polos de $G(s)$. En términos de polos y ceros, la función de transferencia puede expresarse como:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad n \geq m$$

La cual se denomina forma ganancia-ceros-polos.

Para una representación en espacio de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

La función de transferencia se determina como

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

por lo cual el polinomio característico del sistema está dado por

$$\det(sI - A)$$

de tal forma que los polos del sistema coinciden con los valores propios de la matriz A , en el caso de representaciones mínimas. Es decir, como el polinomio característico solo depende de A , también su estabilidad. La posición de los ceros del sistema está definida por A , B , C y D .

Ejemplos: ¿Cuáles son los polos y ceros de los siguientes sistemas?

a) $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = G(s)$ cero en $s = 3$ polos en $s = -1$ y $s = -2$

b) $G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$ polos en $s = -2$

c) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ con $y = [3 \ 1]$

cero en $s = -3$

polos en $s = -1$ y $s = -2$

Valores propios de A

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$$

$$G(s) = [3 \ 1] \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}$$

2.3 Solución de la ecuación de estado

Método de la transformada de Laplace

Considere un LTI sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con condiciones iniciales $x(0)$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de estado

$$sX(s) = AX(s) + x(0) + BU(s)$$

con condiciones iniciales $x(0) \neq 0$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{Respuesta entrada cero}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{Respuesta estado cero}}$$

La transformada inversa de Laplace genera la respuesta en el tiempo.

Ejemplo. Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 5]x$$

Encuentre la salida ante una entrada escalón unitario y condiciones iniciales $x(0) =$

$$[-2 \quad 1]^T$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3.5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & 3.5 \\ -6 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \quad \text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s-4 & 6 \\ -3.5 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) = \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \begin{bmatrix} s-4 & -3.5 \\ 6 & s+6 \end{bmatrix}$$

Para el término de respuesta entrada cero.

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}x(0) &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} s-4 & -3.5 \\ 6 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\ &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} -2s + 8 - 3.5 \\ -12 + s + 6 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\ &= \frac{-8s + 18 + 5s - 30}{s^2 + 2s - 3} = \frac{-3s - 12}{s^2 + 2s - 3} \end{aligned}$$

Para el término de respuesta estado cero

$$\begin{aligned} G(s) = C(sI - A)^{-1}B &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} s-4 & -3.5 \\ 6 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\ &= [4 \quad 5] \begin{bmatrix} -s + 4 - 3.5 \\ -6 + 5 + 6 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \\ &= \frac{-4s + 2 + 5s}{s^2 + 2s - 3} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s - 3} \end{aligned}$$

finalmente, con $D = 0$ y $u(s) = \frac{1}{s}$

$$[C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = \frac{s+2}{s^2+2s-3} \cdot \frac{1}{s}$$

Uniendo ambos términos

$$Y(s) = \frac{-3s - 12}{s^2 + 2s - 3} + \frac{s + 2}{s(s^2 + 2s - 3)} = \frac{-3s^2 - 12s + 5 + 2}{s(s + 3)(s - 1)}$$

expandiendo en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{-3}{s - 1} + \frac{2/3}{s + 3} - \frac{2/3}{s}$$

para obtener la respuesta en el tiempo se calcula la transformada inversa de Laplace

$$y(t) = -3e^t + \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3} \quad \text{para } t \geq 0$$

2.3.1 Solución en el dominio del tiempo

La solución del sistema en variables de estado también puede obtenerse directamente en el dominio del tiempo sin utilizar la transformada de Laplace. Considere la siguiente expansión para el caso escalar.

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

para el caso matricial

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $t = 0$ entonces $e^0 = I$ además $e^{a(t-\tau)} = e^{at} e^{-a\tau}$ por lo tanto

$$e^{A(t-\tau)} = e^{At} e^{-A\tau}$$

si $\tau = t$

$$e^{A(t-\tau)} = e^{A \cdot 0} = e^0 = I$$

Diferenciando la expansión matricial (1) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= 0 + A + \frac{2t}{2!} A^2 + A^3 \frac{3t^2}{3!} + \dots \\ &= A \left[I + At + A^2 \frac{2t}{2!} + \dots \right] = \left[I + At + A^2 \frac{2t}{2!} + \dots \right] A \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación de estado por e^{-At} , se tiene:

$$e^{-At} \dot{x}(t) = e^{-At} A x(t) + e^{-At} B u(t)$$

$$e^{-At} \dot{x}(t) - e^{-At} A x(t) = e^{-At} B u(t)$$

Lo cual implica

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} x(t)) = e^{-At} B u(t)$$

integrando de 0 a t

$$e^{-At} x(t) \Big|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

Entonces

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Dado que la inversa de e^{-At} es e^{At} y $e^0 = I$, entonces

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Lo cual es la solución en el dominio del tiempo para la ecuación de estado. Sustituyendo (3) en la ecuación de salida

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t)$$

La matriz e^{At} se le denomina matriz de transición de estado

$$\Phi(t) = e^{At}$$

Propiedades de la matriz de transición de estado

Existen varios métodos para calcular e^{At} , entre ellos, destacan:

1. Por expansión en series de potencias
2. Por transformada inversa de Laplace $e^{At} = L^{-1}(sI - A)^{-1}$
3. Llevar A a la forma diagonal o en su defecto a la forma de Jordan

$$T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_i\}$$

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

- a. Método de interpolación de Sylvester
- b. Métodos computacionales

La matriz de transición de estado posee las siguientes propiedades.

- 1) $\Phi(0) = 1$
- 2) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
- 3) $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) \quad \forall t_0, t_1, t_2 \quad (\text{Transición de estado})$
- 4) $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$
- 5) $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$

Tarea. Comprobar que (3) es la solución de la ecuación de estado.

Tarea. Demostrar las 5 propiedades de la matriz de transición de estado.

Ejemplo. Considere la siguiente ecuación de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Determine la matriz de transición de estado $\Phi(t)$ y el vector de estado $x(t)$ para $t \geq 0$ con una entrada $u(t) = 1$ para $t \geq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 3s + 2$$

$$\text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Usando la transformada inversa de Laplace

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

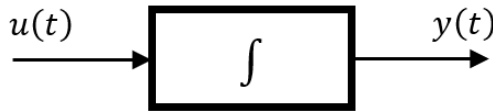
$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}x(0) + \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} t \geq 0$$

2.4 Representación gráfica de sistemas lineales

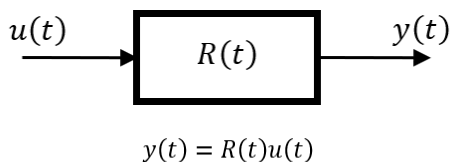
El modelo de estado de un sistema lineal admite una forma gráfica por bloques similar a la de los sistemas representados por su función de transferencia. Hay tres elementos básicos.

1. Bloque integrador

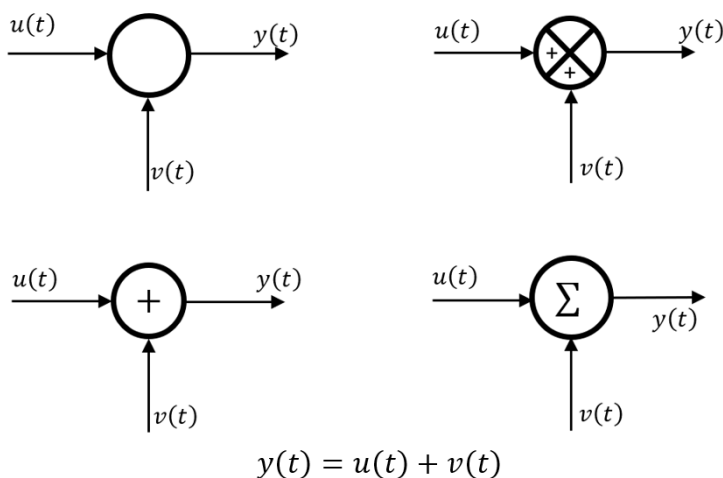


$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau)d\tau$$

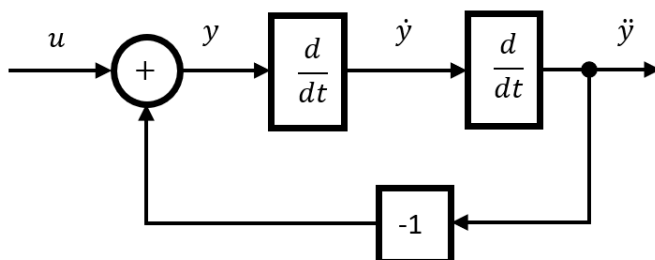
2. Multiplicación por una matriz



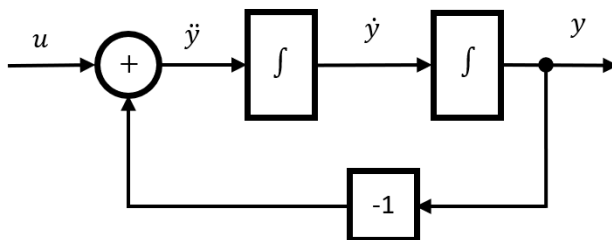
3. Bloque sumador



Ejemplo. Analice las siguientes representaciones gráficas para el sistema $\ddot{y} + y = u$



No es implementable. Si existe ruido en el sistema las derivadas del mismo son demasiado grandes y pueden provocar explosión paramétrica, inestabilidad, divergencia, etcétera.



Si es implementable. No tiene problemas con el ruido. Solo se puede utilizar cuando existen derivadas del estado, pero no de la entrada. Cuando se tengan derivadas de la entrada deberán ser de menor orden que las derivadas del estado.

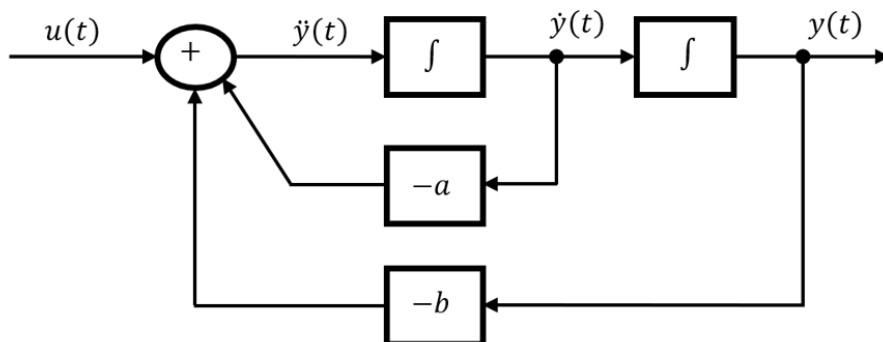
Todas las salidas de los integradores, califican como variables de estado.

Ejemplo. Encontrar la representación gráfica del sistema.

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y}(t) = -a\dot{y}(t) - by(t) + u(t)$$

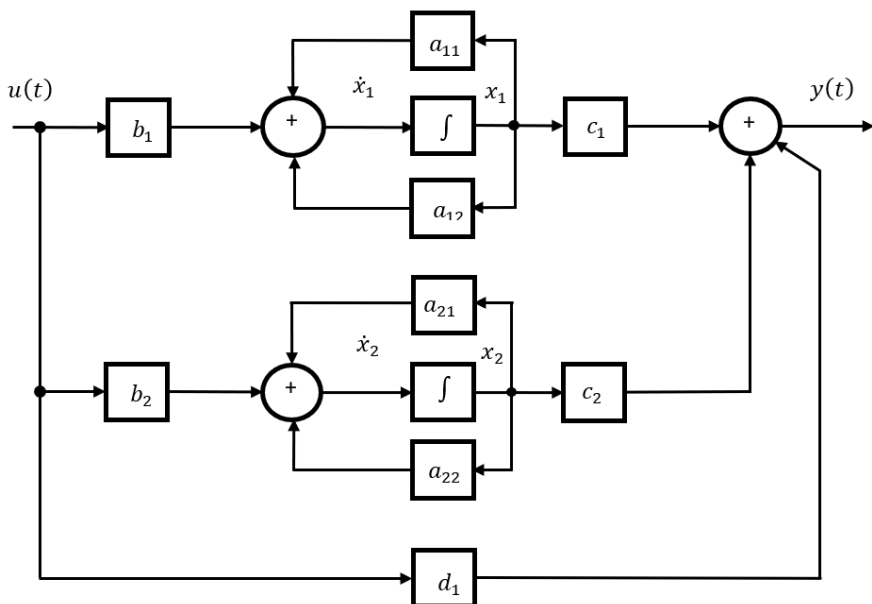


Ejemplo. Encuentre la representación gráfica para el siguiente sistema.

- De forma escalar
- De forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d_1 u(t)$$



Escalar

$$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c u$$

$$y = C_c x_c$$

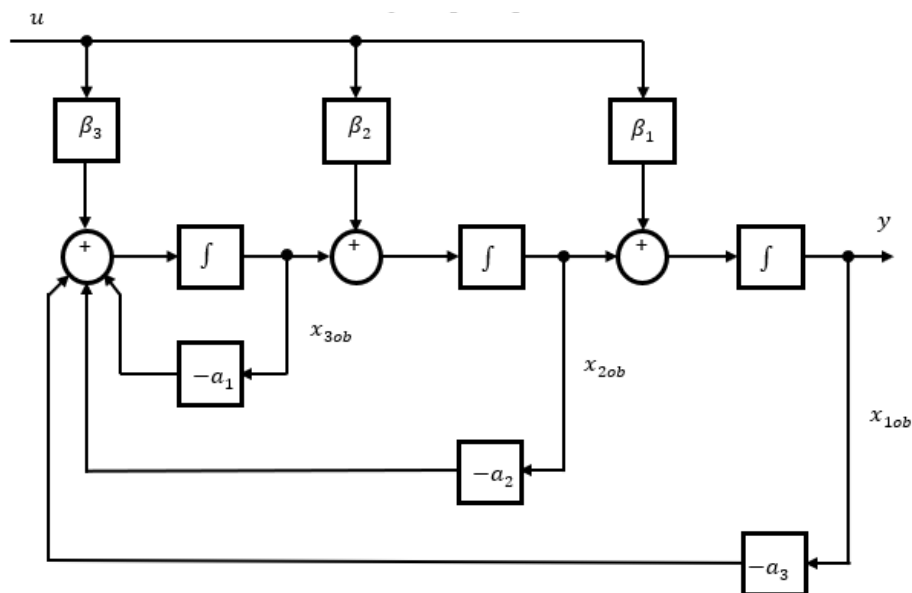
$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_c = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

Solo sistemas escalares

2. Forma canónica observabilidad

$$\ddot{y} = a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = m$$

$$m = b_3 u + b_2 \dot{u} + b_1 \ddot{u}$$



$$\beta_1 = b_1$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 b_1$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 b_2 + a_1^2 b_1 - a_2 b_1$$

$$\dot{x}_{ob} = A_{ob} x_{ob} + b_{ob} u$$

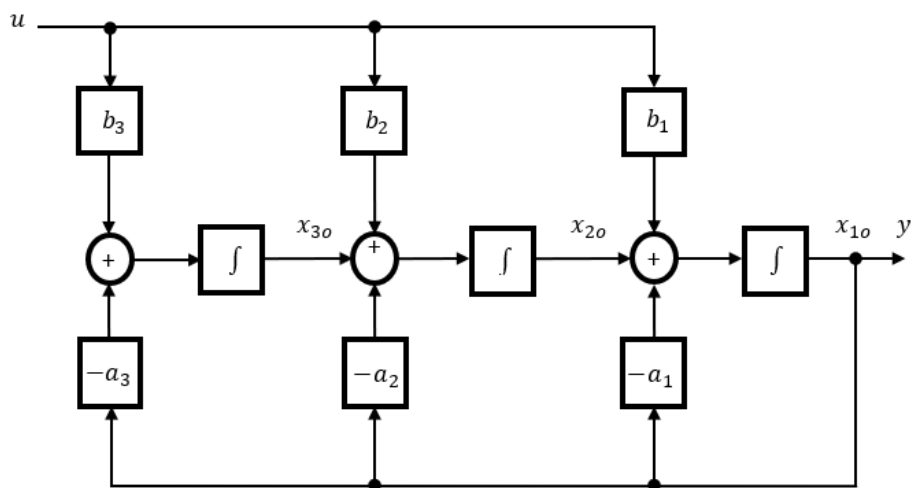
$$y_{ob} = C_{ob} x_{ob}$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ob} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{Matriz de Toeplitz}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$C_{ob} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

3. Forma canónica observador



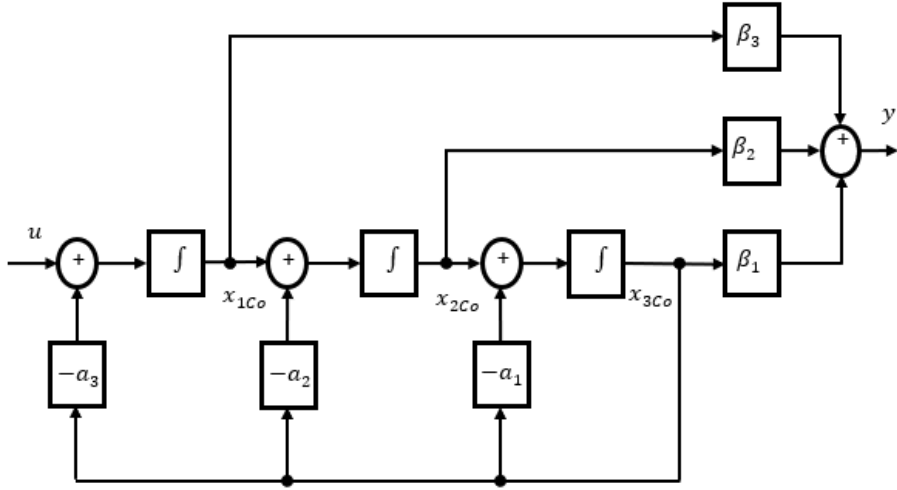
$$\dot{x}_0 = A_0 x_0 + b_0 u$$

$$y = C_0 x_0$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [1 \quad 0 \quad 0]$$

4. Forma canónica controlabilidad



$$\dot{x}_{co} = A_{co}x_{co} + b_{co}u$$

$$y = C_{co}x_{co}$$

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{co} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]$$

$$= [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_o = A_c^T \quad b_o = C_c^T \quad C_{ob} = b_c^T$$

$$A_{ob} = A_{co}^T \quad b_{ob} = C_{co}^T \quad C_{ob} = b_{co}^T$$

Todas las representaciones canónicas tienen la misma función de transferencia.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

Tarea. Comprobar para las cuatro formas canónicas

2.6 Transformaciones de similitud

Sea

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

una representación cualquiera en espacio de estado. Considérese el siguiente cambio de variable.

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

donde T es una matriz no singular, entonces para el sistema original, se tiene:

$$\dot{x}(t) = T\dot{\bar{x}}(t)$$

$$T\dot{\bar{x}}(t) = AT\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = CT\bar{x}(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = T^{-1}AT\bar{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$y(t) = CT\bar{x}(t)$$

Por lo tanto, la nueva representación del sistema es:

$$\begin{array}{lll} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) & \text{con} & \bar{A} = T^{-1}AT \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) & & \bar{B} = T^{-1}B \\ & & \bar{C} = CT \end{array}$$

A estas representaciones se les denomina “similares” o “de similitud”.

Lema. Las raíces del determinante $(sI - A)$ (modos del sistema) son invariantes bajo transformaciones de similitud.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \det(sI - A) &= \det(sI - \bar{A}) \quad \text{con } \bar{A} = T^{-1}AT \\
 \det(sI - A) &= \det(sI - T^{-1}AT) \\
 &= \det T^{-1}(sI - A)T \\
 &= \det T^{-1} \cdot \det(sI - A) \det T \\
 &= \frac{1}{\det T} \det(sI - A) \det T \\
 \underline{\underline{\det(sI - A) &= \det(sI - A)}}
 \end{aligned}$$

Lema. La función de transferencia de un sistema es invariante bajo transformaciones de similitud.

Demostración:

Para el sistema original $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Para el sistema transformado $H(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$

Con $\bar{A} = T^{-1}AT$ $\bar{B} = T^{-1}B$ $\bar{C} = CT$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B \\
 &= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B \\
 &= CT \underbrace{T^{-1}(sI - A)T}_{*} T^{-1}B \\
 &= C(sI - A)^{-1}B
 \end{aligned}$$

$$* \begin{cases} (sI - T^{-1}AT)^{-1} \\ (T^{-1}(sI - A)T)^{-1} \\ ((sI - A)T)^{-1}T \\ T^{-1}(sI - A)^{-1}T \end{cases} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Capítulo 3

Sistemas de primer y segundo orden

3.1 Sistemas de primer orden

Los sistemas autónomos de segundo orden ocupan un lugar importante en el estudio de sistemas no lineales, debido a que sus trayectorias de solución pueden ser representadas por curvas en el plano. Esto permite la fácil visualización del comportamiento cualitativo del sistema. El propósito de esta sección es utilizar a los sistemas de segundo orden para introducir algunas de las ideas básicas de los sistemas no lineales. Los sistemas físicos son inherentemente no lineales. Sin embargo, cuando el rango de operación es pequeño y las no linealidades implicadas son suaves, entonces se puede tener una buena aproximación lineal del sistema no lineal descrita como:

$$\dot{x} = Ax$$

con las siguientes propiedades

- Si A es no singular, el sistema tiene un punto de equilibrio único,
- Si los valores propios de A tienen parte real negativa (A es Hurwitz), el punto de equilibrio $x_e = 0$ es estable,
- Para $u \neq 0$ si el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es estable $\rightarrow$ Estabilidad BIBO.

Se denomina sistema lineal de primer orden de entrada u y salida y , al sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + ay = bu$$

con $y(0) = y_0$

donde a y b son constantes que representan los coeficientes de la ecuación. En la práctica, muchos sistemas físicos pueden ser representados por una ecuación de primer orden, siendo esta una de las aproximaciones más sencillas que se pueden hacer de un sistema dinámico. Resulta útil para el estudio de la respuesta del sistema describirlo como:

$$\tau \frac{dy}{dx} + y = Ku$$

con $y(0) = y_0$ donde $\tau = 1/a$ y $K = b/a$.

De una manera general, si un sistema lineal de primer orden tiene una señal de entrada $u(t)$ y una señal de salida $y(t)$, su función de transferencia se escribe como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

donde K es conocida como la ganancia de régimen estacionario y τ la constante de tiempo del sistema.

3.2 Sistemas de segundo orden

Sistemas de segundo orden, sistemas planares, son también llamados sistemas de dimensión dos o sistemas de dos variables de estado. Se representan por dos ecuaciones diferenciales escalares. Las soluciones del sistema se pueden representar como curvas en el plano, que llamaremos también órbitas.

Las órbitas se representan en lo que se llama el plano de fase del sistema. Un sistema autónomo de segundo orden está representado por dos ecuaciones diferenciales escalares

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2)$$

sea $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la solución de 1-2 que inicia en cierto estado $x_0 = (x_{10}, x_{20})$; tal que $x(0) = x_0$.

El lugar geométrico, en el plano x_1 - x_2 , de la solución para todo $t \geq 0$ es una curva que pasa por el punto x_0 . Esta curva es llamada trayectoria u órbita de (1)-(2) a partir de x_0 .

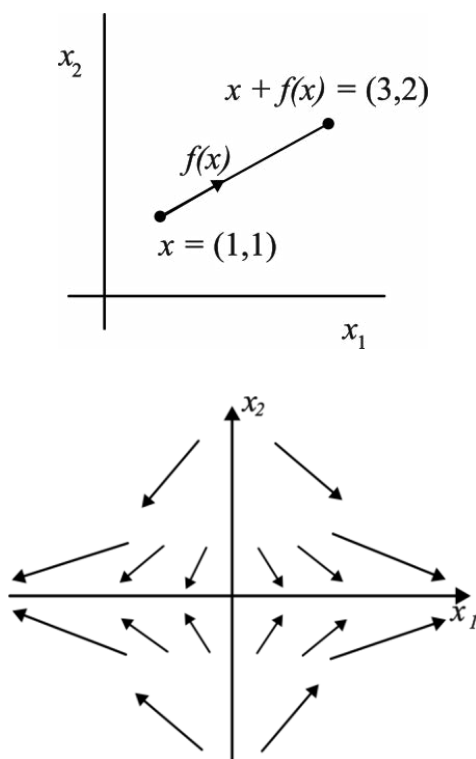
El plano x_1 - x_2 usualmente se denomina plano de estado o plano de fase. El lado derecho de (1)–(2) expresa el vector tangente de la curva $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$

Usando notación vectorial

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f(x)$ es el vector $(f_1(x), f_2(x))$, el vector $f(x)$ se considera un campo vectorial en el plano de estado.

Esto significa que cada punto x en el plano tiene un vector $f(x)$ asignado. Para una fácil visualización, se representa a $f(x)$ como un vector basado en x ; es decir: se asigna a x un segmento de línea dirigido de x a $x+f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = (2x_1^2, x_2)$, entonces en $x = (1,1)$, se dibuja una flecha que va de $(1,1)$ hacia $(1,1) + (2,1) = (3,2)$; Repitiendo esto en cada punto del plano, se obtiene el diagrama del campo vectorial.



En esta figura, la longitud de la flecha en un punto dado x es proporcional a $\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)}$.

Debido a que el campo vectorial en un punto es tangente a la trayectoria a través de ese punto, en esencia es posible construir la trayectoria iniciando en un punto dado x_0 a partir del diagrama del campo vectorial.

A la familia de todas las trayectorias o de curvas solución es llamada el retrato de fase (phase portrait). Un retrato de fase aproximado se puede construir graficando trayectorias para una gran cantidad de valores iniciales del estado, dispersos sobre todo el plano $x_1 - x_2$.

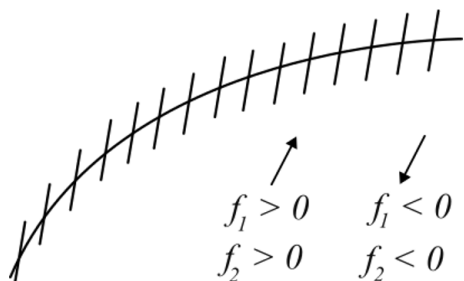
Debido a la gran disponibilidad de subrutinas numéricas, resulta muy sencilla la construcción de los retratos de fase por medios numéricos. Aquí solo se describirá un método para obtener los retratos de fase, el método de las isoclinas o curvas de nivel. Para entender la ida detrás de este método, nótese que la pendiente de una trayectoria en cualquier punto x , denotada por $S(x)$, está dada por:

$$S(x) = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$S(x) = c$$

define una curva en el plano $x_1 - x_2$, a lo largo de la cual las trayectorias de (1) - (2) cruza la curva $S(x) = c$, la pendiente de la trayectoria en el punto de intersección deberá de ser c . El procedimiento es graficar la curva $x_1 - x_2$ en el plano $x_1 - x_2$ y a lo largo de esta curva dibujar segmentos de línea cortos que tengan pendiente c . Estos segmentos de línea son paralelos y sus direcciones están determinadas por los signos de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en x . Isoclina con pendiente positiva



La curva $S(x) = c$ se conoce como una isoclina

El procedimiento se repite para diferentes valores de c , hasta que el plano se llena de isoclinas. Entonces, iniciando en cualquier x_0 , se puede construir su trayectoria moviéndose en dirección de los segmentos de línea de una isoclina a otra.

Ejemplo. Dibuje el retrato de fase del modelo del péndulo sin fricción.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1$$

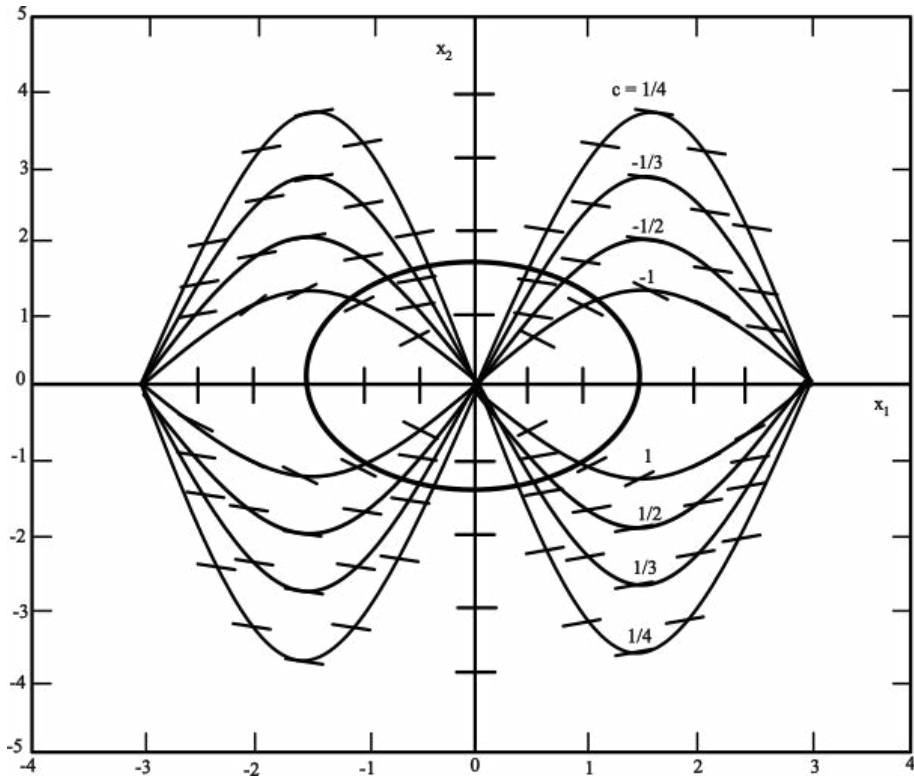
La función pendiente $S(x)$ está dada por

$$S(x) = \frac{-\sin x_1}{x_2}$$

Entonces las isoclinas se definen como

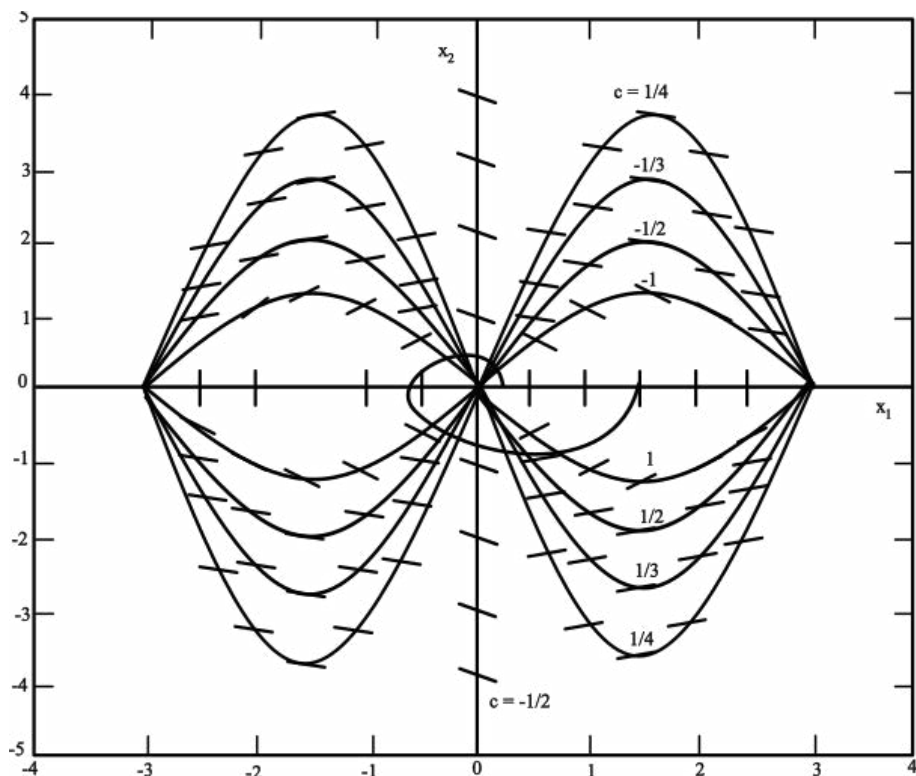
$$x_2 = -\frac{1}{c} \sin x_1$$

Para diferentes valores de c se tiene:



Fácilmente se puede dibujar la trayectoria iniciando de cualquier punto. Tal y como se muestra en la figura para una trayectoria inicial en $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Se puede observar que la trayectoria es una curva cerrada.

Fácilmente se puede dibujar la trayectoria iniciando de cualquier punto. Tal y como se muestra en la figura para una trayectoria inicial en $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Se puede observar que la trayectoria es una curva cerrada. Para diferentes valores de c se tiene:



Las isoclinas son idénticas a las del modelo del péndulo sin fricción, excepto que las pendientes de los segmentos de línea son distintos. Un dibujo de la trayectoria que inicia en $(\frac{\pi}{2}, 0)$, muestra que la trayectoria es una espiral que se cierra hacia el origen.

Nótese que debido a que el tiempo es suprimido en una trayectoria, no es posible recobrar la solución para $x(t)$ asociada a la trayectoria dada.

Entonces, una trayectoria determinada por este método solo proporciona un comportamiento cualitativo relativo a la solución, pero no uno cuantitativo.

Por ejemplo, una trayectoria cerrada muestra que existe una solución periódica; es decir, que el sistema sostiene una oscilación, mientras que la espiral muestra una oscilación que decae.

Aquí se utilizarán los retratos de fase para analizar el comportamiento cualitativo de sistemas de segundo orden.

3.3 Comportamiento cualitativo de sistemas lineales

Considérese un sistema lineal invariante en el tiempo.

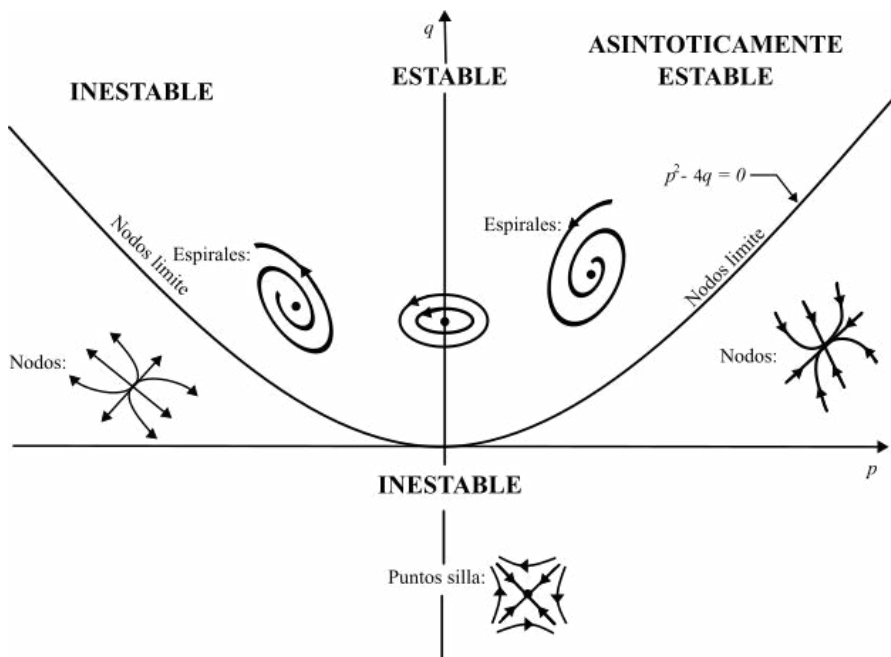
$$\dot{x} = Ax$$

donde A es una matriz real de 2×2 . La solución de (3) para un estado inicial x_0 , está dada por $x(t) = e^{At} x_0$.

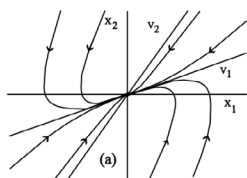
De lo cual se pueden distinguir cuatro casos:

- La matriz A tiene valores propios reales diferentes y diferentes de cero.
- La matriz A tiene valores propios complejos.
- La matriz A tiene valores propios reales iguales y diferentes de cero.
- La matriz A tiene uno o dos valores propios iguales a cero.

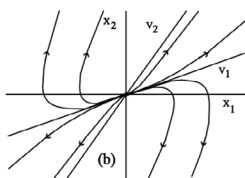
En la siguiente figura se puede ver el comportamiento de cada uno de las trayectorias alrededor de los puntos de equilibrio.



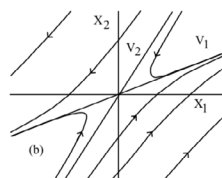
Caso 1. Valores propios reales diferentes entre sí y diferentes a cero: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$



Ambos negativos **Nodo Estable**

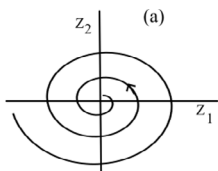


Ambos positivos **Nodo Inestable**



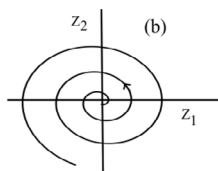
Uno positivo y otro negativo **Punto silla (saddle)**

Caso 2. Valores propios complejos: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$



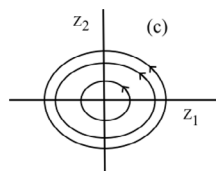
$\alpha < 0$

Parte real negativa
Foco Estable



$\alpha > 0$

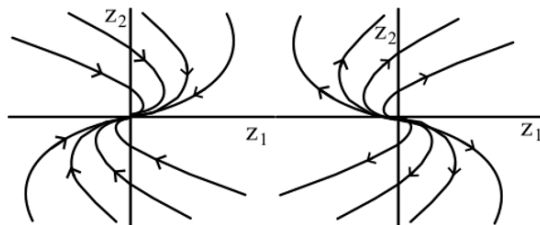
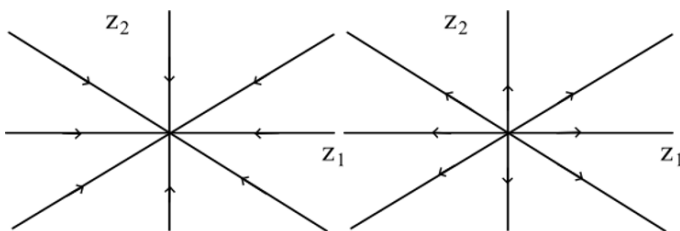
Parte real positiva
Foco Inestable



$\alpha = 0$

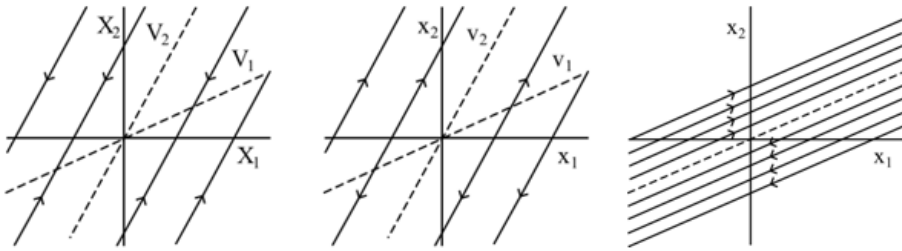
Parte real cero
Centro

Caso 3. Valores propios reales iguales entre sí y diferentes de cero:



El retrato de fase es similar al retrato de fase de un nodo, por lo tanto, el punto de equilibrio será un nodo estable si $\lambda < 0$ o un nodo inestable si $\lambda > 0$.

Caso 4. Uno o dos valores propios iguales a cero.



Cuando uno o ambos valores propios son cero, el retrato de fase en cierto sentido se ve degenerado. En este caso, la matriz A no tiene un espacio nulo trivial. Cualquier vector en el espacio nulo de A , es un punto de equilibrio para el sistema, es decir, el sistema tiene un subespacio de equilibrio, que puede ser de dimensión uno o dos.

3.3.1 Comportamiento cualitativo de los sistemas lineales bajo la presencia de perturbaciones

Pensemos en el comportamiento de un sistema lineal bajo perturbaciones lineales, es decir, consideremos una matriz A que suponemos tiene valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y ΔA una matriz diagonal cuyos elementos están afectados por perturbaciones lineales μ arbitrariamente pequeñas, entonces

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \mu \end{bmatrix}$$

Dado que los valores propios de una matriz dependen en forma continua de sus parámetros, cualquier valor propio con parte real estrictamente negativa (o estrictamente positiva) permanecerá en su correspondiente semiplano bajo perturbaciones suficientemente pequeñas. Entonces, si el punto de equilibrio del sistema lineal es un nodo, foco o un punto silla, el equilibrio del sistema perturbado será del mismo tipo.

Si en cambio, el equilibrio es un centro, el sistema perturbado tendrá un foco estable o inestable, según μ sea negativo o positivo.

Llamamos entonces al nodo, foco y silla equilibrios estructuralmente estables, (puntos de equilibrio hiperbólicos) ya que mantienen su comportamiento cualitativo bajo perturbaciones pequeñas.

3.4 Múltiples puntos de equilibrio

El sistema lineal

$$\dot{x} = Ax$$

solo tiene un punto de equilibrio en $x = 0$ si A no tiene valores propios cero, es decir si $\det A \neq 0$. Cuando $\det A = 0$, el sistema tiene un punto de equilibrio continuo y estos son los únicos tipos de equilibrio que puede tener un sistema lineal. Un sistema no lineal puede tener múltiples puntos de equilibrio aislados.

Ejemplo. Analice el retrato de fase del modelo del circuito para el diodo túnel dado por:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u]$$

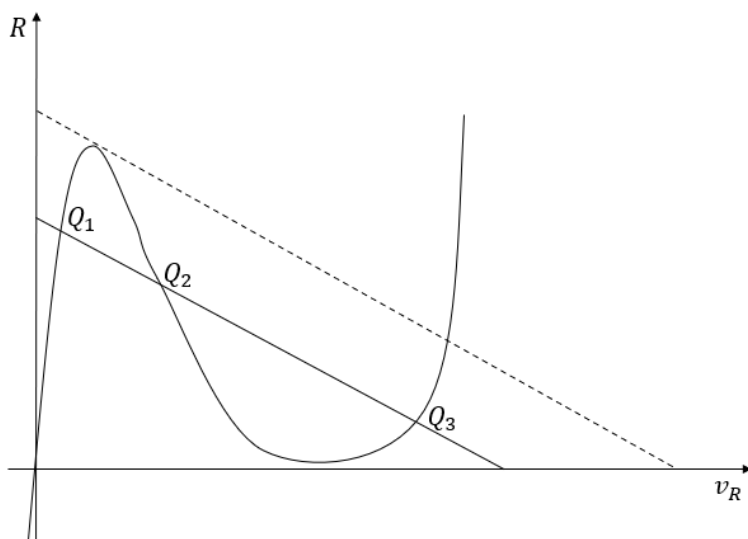
Con $u = 1.2v$, $R = 1.5k\Omega$, $C = 2pF$ y $L = 5\mu H$ la ecuación de estado será

$$\dot{x}_1 = 0.5[-h(x_1) + x_2]$$

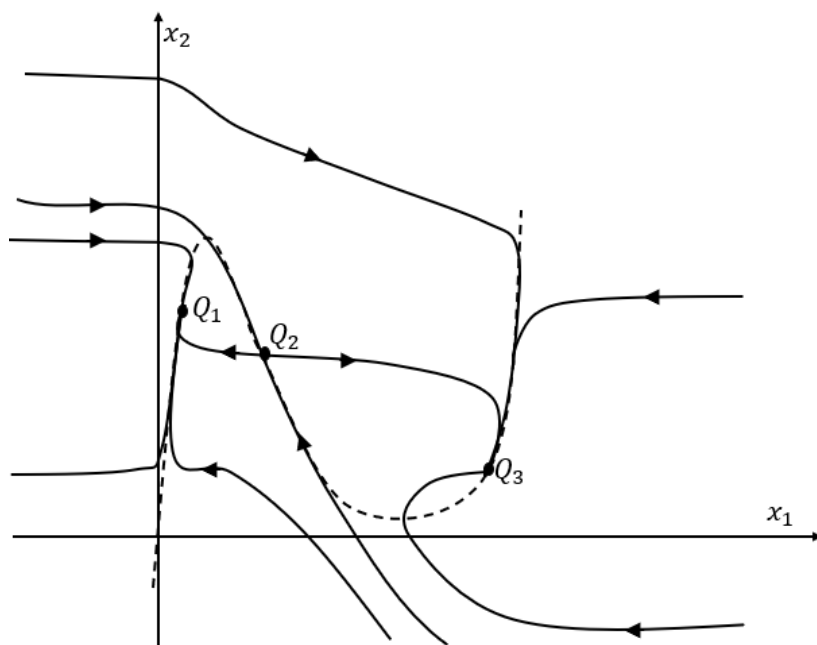
$$\dot{x}_2 = 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]$$

con $h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$ y encontrando los puntos de equilibrio con $\dot{x}_i = \dot{x}_2 = 0$, se tiene:

$$Q_1 = (0.063, 0.758), Q_2 = (0.285, 0.61), Q_3 = (0.884, 0.21)$$



El retrato de fase está dado por:

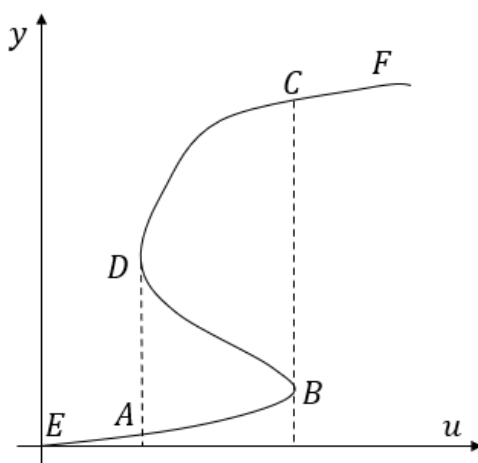


Se observa que todas las trayectorias a excepción de dos eventualmente tienden hacia Q_1 o Q_3 . Las dos trayectorias especiales que convergen a Q_2 dividen al plano de fase en dos partes, esta trayectoria es llamada separatriz ya que divide al plano en dos regiones con diferentes comportamientos.

En la práctica solo se podrá observar alguno de los dos estados estables hacia Q_1 o Q_3 dependiendo de las condiciones iniciales del capacitor y del inductor.

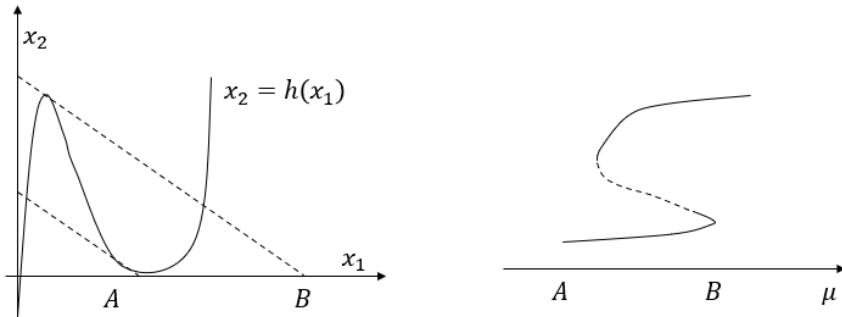
El punto de equilibrio Q_2 nunca se observa debido a que la existencia de cualquier ruido hará que diverja de Q_2 hacia Q_1 o Q_3 .

Este modelo es llamado “biestable” ya que tiene dos puntos de operación en estado estable.



Conforme el voltaje aplicado cambia, el comportamiento del sistema también lo hace. Los puntos de equilibrio del sistema se ubican las intersecciones de la curva característica con la línea.

Cuando $u < A$ el sistema solo tiene un punto de equilibrio, para $A < u < B$ existen tres puntos de equilibrio mientras que para $u > B$ solo hay un punto de equilibrio.



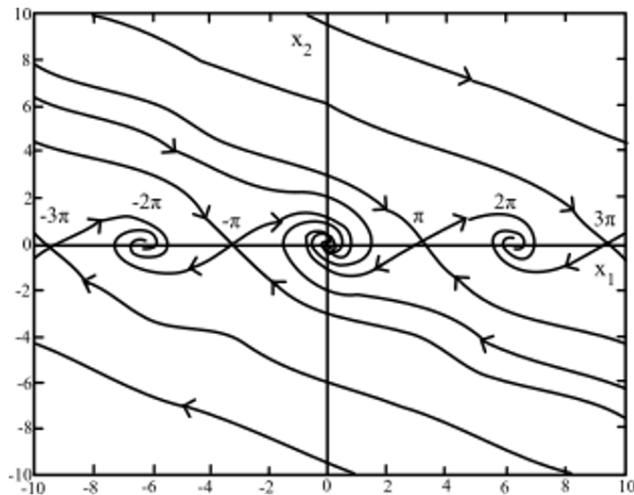
De tal forma que se tienen dos nodos de bifurcación uno cuando $u = A$ y otro cuando $u = B$. Nótese que en este caso la estabilidad no se ve afectada por la bifurcación, ya que, en cualquier caso, las trayectorias del sistema convergen a uno de los nodos estables.

Ejemplo. Analice el retrato de fase del péndulo con fricción.

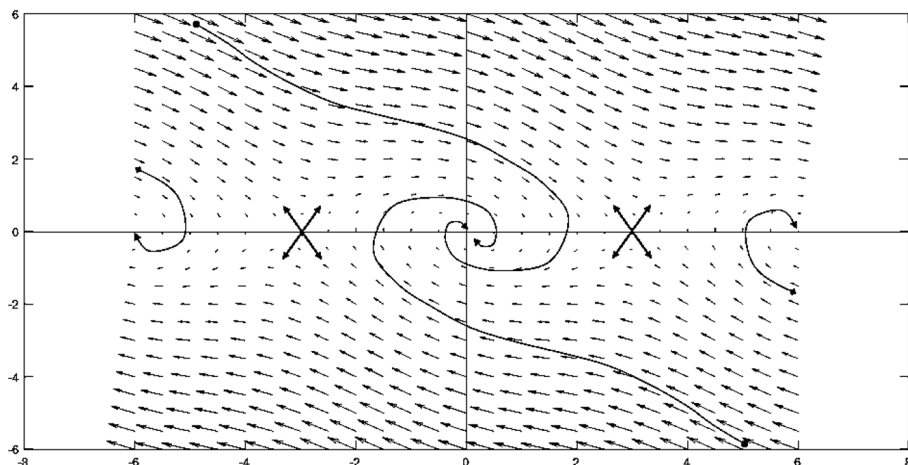
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x - \frac{k}{m} x_2$$

con $\frac{g}{l} = 1$ y $\frac{k}{m} = 0.5$. el retrato de fase está dado por



El diagrama del campo vectorial del sistema obtenida con Matlab:



Excepto por las trayectorias especiales que terminan en el punto de equilibrio inestable $(\pi, 0)$ todas las trayectorias tienden al punto de equilibrio estable $(0, 0)$.

Nuevamente, el punto de equilibrio inestable $(\pi, 0)$ no puede ser mantenido en la práctica ya que cualquier ruido hará que la trayectoria diverja hacia el punto de equilibrio estable.

3.5 Comportamiento cualitativo cerca de los puntos de equilibrio

El análisis de los retratos de fase para el circuito del diodo túnel y para el péndulo con fricción, es bastante similar, en cuanto al comportamiento de los puntos de equilibrio al que se presenta en los sistemas lineales (nodos y focos).

De hecho, estas observaciones son bastante generales. Excepto en algunos casos especiales, el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio puede ser determinado por medio de la linealización con respecto a ese punto.

Sea $p = (p_1, p_2)$ un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

y suponiendo que las funciones f_1 y f_2 son continuamente diferenciables. Expandiendo las EDO en series de Taylor alrededor del punto $p = (p_1, p_2)$:

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + HOT$$

$$\dot{x}_2 = f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + HOT$$

con

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \quad a_{12} = \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \quad a_{22} = \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$

debido a que es un punto de equilibrio, entonces

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$$

ahora se definirá un cambio de variables de estado

$$y_1 = x_1 - p_1$$

$$y_2 = x_2 - p_2$$

Lo que implica que, eliminando los términos de alto orden, la ecuación de estado linealizada es:

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 - a_{12}y_2$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 - a_{22}y_2$$

Reescribiéndola en forma matricial, se tiene:

$$\dot{y} = Ay$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=p}$$

La matriz $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ es llamada el Jacobiano de $f(x)$ y la matriz A es el Jacobiano evaluado en el punto de equilibrio " p ".

Resulta razonable esperar que las trayectorias del sistema no lineal en una pequeña vecindad del punto de equilibrio sean muy similares a las trayectorias de su linealización alrededor de ese punto.

En efecto esto es verdad: Si el origen de la ecuación linealizada es un nodo estable (inestable), un foco estable (inestable) o un punto silla, entonces en una pequeña vecindad del punto de equilibrio, las trayectorias de la ecuación de estado no lineal se comportarán como un nodo estable (inestable), un foco estable (inestable) o un punto silla.

Lo que implica que el tipo de puntos de equilibrio de un sistema no lineal se puede determinar por medio de la linealización sin necesidad de construir el retrato de fase del sistema.

Ejemplo: Determine los puntos de equilibrio y su tipo, para el sistema dado por:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{x_1^3}{6} - x_2$$

Para determinar los puntos de equilibrio

$$x_2 = 0$$

$$x_1 \left(-1 + \frac{x_1^2}{6} \right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = \pm\sqrt{6}$$

$$p_1 = (0,0), p_2 = (\sqrt{6},0), p_3 = (-\sqrt{6},0)$$

El jacobiano está definido como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \frac{x_1^2}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=p_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

v. p. complejos con $Re < 0$ implica tener un foco estable en (0,0)

$$A_{2,3} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=p_2, p_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$$

v. p. reales de distinto signo $\Rightarrow$ Punto silla en $(\pm\sqrt{6},0)$

Ejemplo: Determine el tipo de los puntos de equilibrio, para el circuito del diodo túnel con:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 - u]$$

con $\frac{1}{C} = 0.5$, $\frac{1}{L} = 0.2$ y $\frac{R}{L} = 0.3$ donde

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

$$p_1(0.063, 0.758), p_2(0.285, 0.61), p_3(0.884, 0.21)$$

El Jacobiano queda como

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -0.5h'(x_1) & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$$

con

$$h'(x_1) = 17.76 - 207.58x_1 + 688.86x_1^2 - 905.24x_1^3 + 418.6x_1^4$$

Evaluando el Jacobiano en los puntos de equilibrio, se tiene:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.598 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3.57, \lambda_2 = -0.33$$

v. p. distintos con $Re < 0 \Rightarrow$ Nodo estable

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.82 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1.77, \lambda_2 = -0.25$$

v. p. con signos distintos $\Rightarrow$ Punto silla

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1.427 & 0.5 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1.33, \lambda_2 = -0.4$$

v. p. distintos con $Re < 0 \Rightarrow$ Nodo estable

Ejemplo. Determine ¿Qué tipos de puntos de equilibrio presenta el modelo del péndulo con fricción?

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - 0.5x_2$$

El Jacobiano queda como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Para el punto de equilibrio que está en $p_1 (0,0)$, entonces

$$A_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -0.25 \pm j0.97$$

v. p. complejo con $Re < 0$ Foco estable

Para el punto de equilibrio que está en $p_2 (\pi,0)$, entonces

$$A_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1.28 \quad \lambda_2 = 0.78$$

v. p. reales con signos distintos lo que implica un punto silla.

Es importante señalar que el método de la linealización es efectivo cuando se tienen puntos de equilibrio hiperbólicos, es decir que no tienen valores propios en el eje imaginario.

Si el Jacobiano tiene valores propios en el eje imaginario, entonces el comportamiento cualitativo del sistema no lineal podrá ser diferente al del sistema linealizado.

Esto se debe al efecto de las perturbaciones en los puntos de equilibrio no hiperbólicos, como el caso de un centro.

Ejemplo. El siguiente sistema tiene un punto de equilibrio en el origen. Determine el tipo.

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

El Jacobiano queda como

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3\mu x_1^2 - \mu x_2^2 & -1 - 2\mu x_1 x_2 \\ 1 - 2\mu x_1 x_2 & -\mu x_1^2 - 3\mu x_2^2 \end{bmatrix}$$

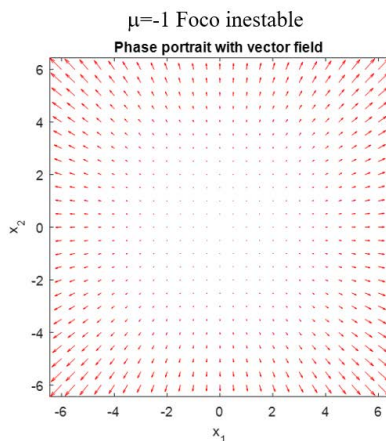
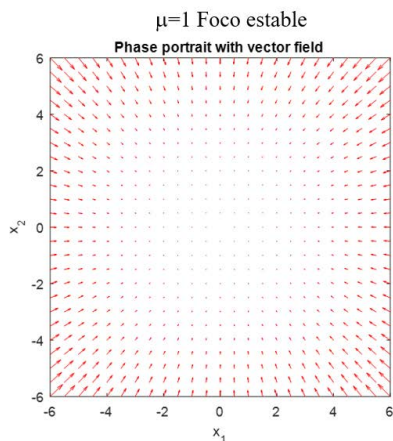
Evaluando el Jacobiano en el origen se tiene

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

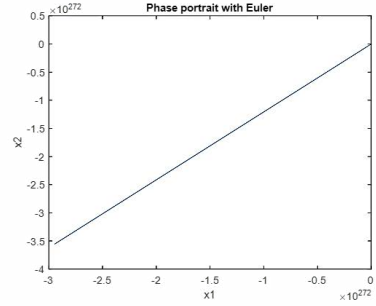
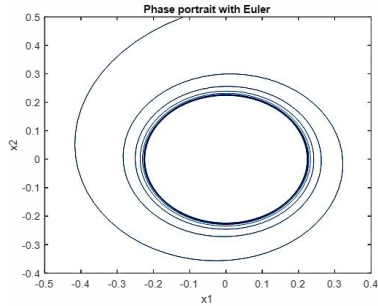
$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

v. p. imaginario $\Rightarrow$ centro

Solución del sistema por el método de campo vectorial

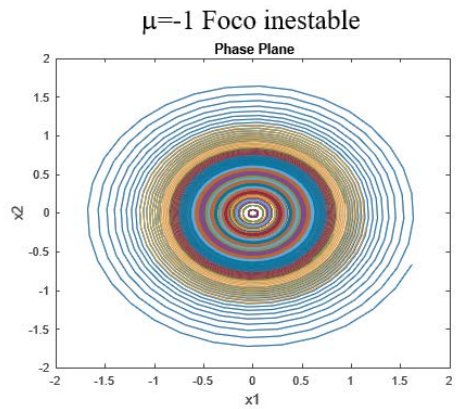
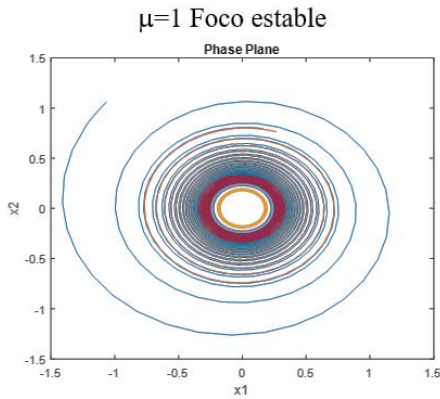


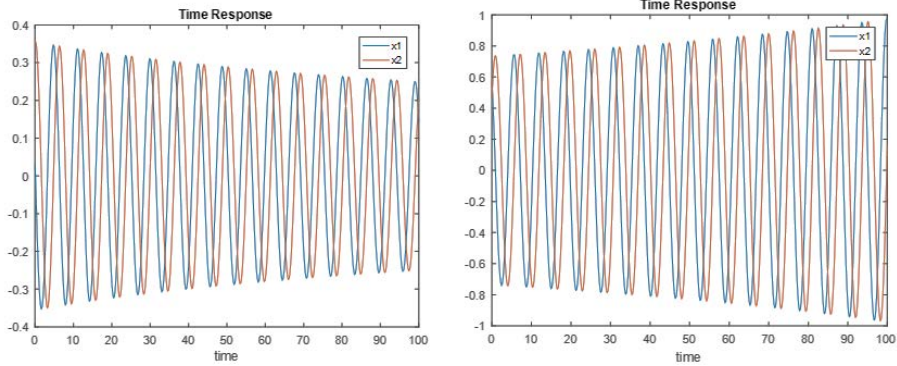
Solución del sistema por el método de Euler



```
%Ejemplo de sistema no lineal cuyo comportamiento no corresponde al sistema
%linealizado
clear all
clc
x1(1)=rand;
x2(1)=rand;
miu=1;
N=50000;
T=0.1;
for k=1:N
    x1(k+1)=x1(k)+T*(-x2(k)-miu*x1(k)*(x1(k)*x1(k)+x2(k)*x2(k)));
    x2(k+1)=x2(k)+T*(x1(k)-miu*x2(k)*(x1(k)*x1(k)+x2(k)*x2(k)));
end
figure
plot(x1,x2)
title('Phase portrait with Euler');
xlabel('x1');
ylabel('x2');
```

Solución del sistema con ode45 de Matlab





El sistema linealizado indica que se tiene un punto de equilibrio tipo centro $\forall \mu$, sin embargo, para el sistema no lineal si $\mu > 0$ se tiene un foco estable y para $\mu < 0$ se tiene un foco inestable.

Este ejemplo muestra que el método de linealización no funciona cuando se tienen valores propios en el eje imaginario.

Solución analítica

Con $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$

Se tiene que

$$\dot{r} = -\mu r^3$$

y

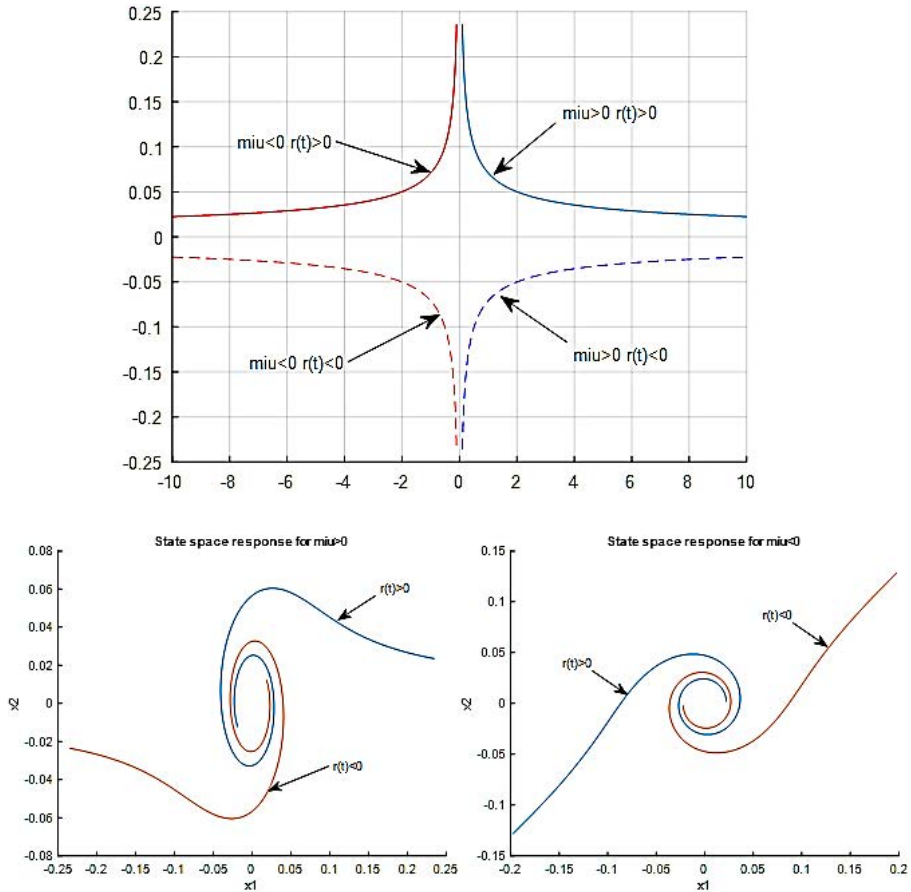
$$\dot{\theta} = 1$$

de lo cual su respuesta en el tiempo está dada por:

$$r(t) = \pm \sqrt{-\frac{1}{2(-\mu t + c)}}$$

$$\theta(t) = t$$

De lo cual graficando la respuesta de $r(t)$ con respecto a t , se tiene que es estable para $\mu > 0$ e inestable para $\mu < 0$



El siguiente sistema tiene un punto de equilibrio en el origen. Determinar el tipo.

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (2)$$

con $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$
 $\dot{x}_1 = -\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta$ $\dot{x}_2 = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2$$

sustituyendo $x_1, x_2, \dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ en (1)

$$-r \sin \theta \dot{\theta} + \dot{r} \cos \theta = -r \sin \theta - \mu r \cos \theta r^2$$

despejando $\dot{r}$

$$\dot{r} \cos \theta = -r \sin \theta - \mu r^3 \cos \theta + r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = -r \tan \theta - \mu r^3 + r \tan \theta \dot{\theta} \quad (3)$$

sustituyendo $x_1, x_2, \dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$ en (2)

$$r \cos \theta \dot{\theta} + \dot{r} \sin \theta = r \cos \theta - \mu r \sin \theta r^2$$

despejando $\dot{r}$

$$\dot{r} \sin \theta = r \cos \theta - \mu r^3 \sin \theta - r \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{r} = r \cot \theta - \mu r^3 - r \cot \theta \dot{\theta} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$-r \tan \theta - (\mu r^3) + r \tan \theta \dot{\theta} = r \cot \theta - (\mu r^3) - r \cot \theta \dot{\theta}$$

reacomodando

$$r \tan \theta \dot{\theta} + r \cot \theta \dot{\theta} = r \tan \theta + r \cot \theta$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (5)$$

sustituyendo (5) en (3)

$$\dot{r} = (-r \tan \theta) - \mu r^3 + (r \tan \theta)$$

$$\dot{r} = -\mu r^3$$

De estas trayectorias es fácil ver que se tiene un foco estable cuando $\mu > 0$ y un foco inestable cuando $\mu < 0$

la respuesta en el tiempo para r se obtiene de

$$\dot{r} = -\mu r^3$$

$$\frac{dr}{dt} = -\mu r^3$$

$$\frac{dr}{r^3} = -\mu dt$$

integrando ambos lados

$$\int r^{-3} dr = -\mu \int dt$$

$$-\frac{1}{2r^2} = -\mu t + c$$

$$-\frac{1}{2(-\mu t + c)} = r^2$$

$$r(t) = \sqrt{-\frac{1}{2(-\mu t + c)}}$$

la respuesta en el tiempo para θ

$$\dot{\theta} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

$$d\theta = dt$$

$$\theta(t) = t$$

Graficando la respuesta de r contra $\theta = t$, se tiene que es estable para $\mu > 0$ e inestable para $\mu < 0$

Ejemplo. Analice el comportamiento en los puntos de equilibrio de la red de Hopfield, descrita por:

$$x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{1}{2}\omega^T \phi(x)$$

con $\omega = \omega^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\phi(x_i) = \text{sign}(x_i)$

Sustituyendo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sign}(x_1(k)) \\ \text{sign}(x_2(k)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1(k) \\ \frac{1}{2}x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \\ \frac{1}{2}\text{sign}(x_1(k)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \\ \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}\text{sign}(x_1(k)) \end{bmatrix}$$

para los puntos de equilibrio $x_1(k+1) = x_1(k)$ y $x_2(k+1) = x_2(k) \forall k$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \\ \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}\text{sign}(x_1(k)) \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k) - \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \\ x_1(k) - \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \\ \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}\text{sign}(x_2(k)) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign } x_2(k) \\ \text{sign } x_1(k) \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ o } x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, el sistema tiene dos puntos de equilibrio aislados. Para analizar el comportamiento del sistema cerca de los puntos de equilibrio, linealizamos el sistema. Como la función signo no tiene derivada, se utiliza la siguiente expresión. $\text{sign}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tanh(\alpha x)$ y $\frac{d}{dx} \tanh(\alpha x) = \alpha \text{sech}^2(\alpha x)$ además $\text{sech } \infty = 0$, por lo tanto

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \overbrace{\alpha/2 \text{sech}^2(\alpha x)}^0 \\ \underbrace{\alpha/2 \text{sech}^2(\alpha x_2)}_0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los p. e. son nodos estables dado que los valores propios de A están dentro del círculo unitario $|\lambda_i| < 1$

3.6 Ciclos límite

Uno de los fenómenos más importantes que se presentan en los sistemas dinámicos es la oscilación. Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial.

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t \geq 0$$

Para algún $T > 0$. La denominación «no trivial» se utiliza para excluir las soluciones constantes correspondientes a los puntos de equilibrio. Una solución constante satisface la ecuación anterior, pero no es lo que se está buscando cuando se habla de una solución periódica.

Retrato de fase degenerado

Cuando uno o los dos valores propios de la matriz A son cero, el retrato de fase está en algún sentido degenerado. En este caso, la matriz A tiene un espacio nulo no trivial. Cualquier vector en el espacio nulo de A es un punto de equilibrio del sistema.

Definición:

El espacio nulo de A se compone de todas las soluciones de $Ax = 0$ para $x \neq 0$. Estos vectores de x pertenecen a $\mathbb{R}^n$. El espacio nulo que contiene todas las soluciones de x se designa como $N(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para los puntos de equilibrio

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-2x_1 + x_2 = 0$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto es, el sistema tiene un subespacio de equilibrio más que un punto de equilibrio aislado.

Ejercicio: Determinar los puntos de equilibrio de $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ y graficar su retrato de fase.

En el retrato de fase degenerado, corresponde a cuando se tiene uno de los eigenvalores igual a cero.

En este caso, todas las trayectorias convergen al subespacio de equilibrio si uno de los eigenvalores tiene signo negativo, o divergen las trayectorias en caso contrario.

Cuando los dos eigenvalores son cero, cada punto en el plano es un punto de equilibrio.

Teorema de Poincaré-Bendixson

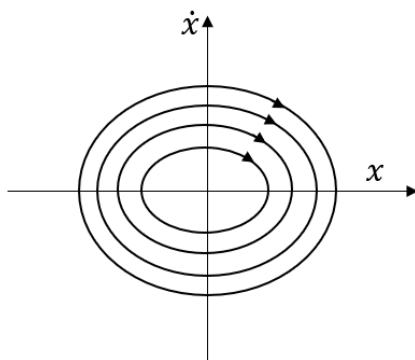
Para un sistema de segundo orden de la forma

$$\dot{x} = f(x, y) \quad \dot{y} = g(x, y)$$

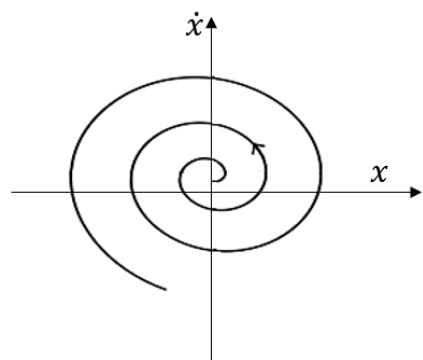
cuyas trayectorias en el espacio de estado no se cruzan y el sistema autónomo no depende explícitamente del tiempo.

El teorema de Poincaré-Bendixson establece que el espacio de estado y la fase de estado pueden tener tres posibles tipos de trayectorias:

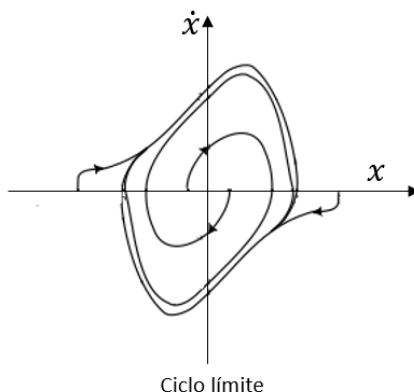
1. Trayectorias cerradas, como trayectorias elípticas para osciladores armónicos no amortiguados.
2. Terminar en un punto de equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$, como un punto de atracción para un oscilador armónico amortiguado.
3. Tender a un ciclo límite conforme $t \rightarrow \infty$.



Trayectoria cerrada



Punto atractor



- **Definición:** Un ciclo límite es una órbita cerrada y aislada.
- Un ciclo límite es necesariamente una órbita cerrada, pero no necesariamente la recíproca (ej. oscilador lineal).
- Los ciclos límites son una característica únicamente presente en los SNL. No se dan para los sistemas lineales.

Desde otro enfoque, cuando se habla de solución periódica no se considera la trivial. La imagen de una solución periódica en el retrato de fase es una trayectoria cerrada, la cual comúnmente es llamada órbita periódica u órbita cerrada.

Ya se han presentado ejemplos de sistemas de segundo orden con valores propios $\pm j\beta$. El origen de dicho sistema es un centro y las trayectorias son órbitas cerradas.

Por lo tanto, un sistema que solamente sostiene una oscilación de amplitud “ r_0 ” es llamado oscilador armónico.

Los osciladores lineales presentan dos problemas

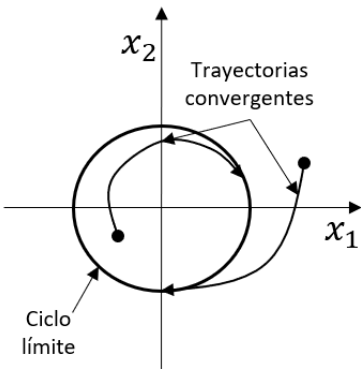
- No son robustos a perturbaciones. Cualquier perturbación puede destruir la oscilación (un oscilador lineal no es estructuralmente estable)
- La amplitud del oscilador depende de las condiciones iniciales.

Estos dos problemas de los osciladores lineales pueden ser eliminados en los osciladores no lineales. Es posible construir osciladores no lineales tales que:

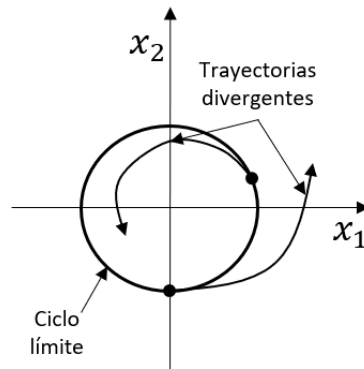
- El oscilador no lineal es estructuralmente estable.
- La amplitud de oscilación es independiente de la condición inicial.

Dependiendo de los patrones de movimiento de las trayectorias se tienen:

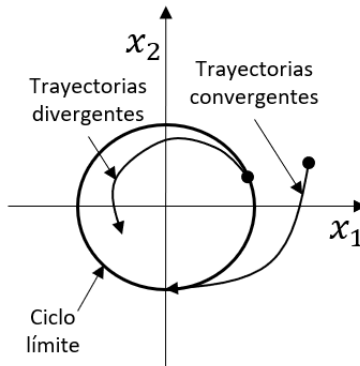
- **Ciclos límite estables:** Todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite convergen a este, conforme $t \rightarrow \infty$.
- **Ciclos límite inestables:** Todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite divergen de este, conforme $t \rightarrow \infty$.
- **Ciclos límite semiestables:** Algunas de las trayectorias en la vecindad convergen a este, mientras otras divergen de este, conforme $t \rightarrow \infty$.



Ciclo límite estable



Ciclo límite inestable

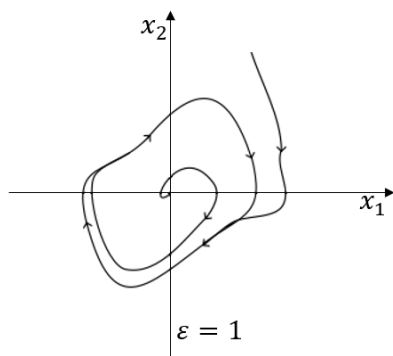
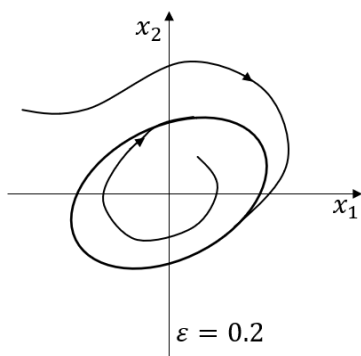


Ciclo límite semi-estable

Ejemplo. Las figuras muestran los retratos de fase de la ecuación de Van der Pol para diferentes valores de ϵ . Analice el comportamiento cualitativo.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 + x_1^2)x_2$$



En ambos casos el retrato de fase muestra que existe una órbita cerrada única que atrae a todas las trayectorias que inician fuera de dicha órbita. Para $\varepsilon = 0.2$, la órbita cerrada es suave, cercana a un círculo de radio 2. Lo cual resulta típico para valores pequeños de ε ($\varepsilon < 0.3$). Para $\varepsilon = 1$, la forma circular está distorsionada y conforme ε aumenta la distorsión es mayor.

Capítulo 4

Controlabilidad y observabilidad

En el capítulo 2, se presentó el concepto de estado y se analizó como el modelo de estado refleja las relaciones entre los tres elementos que describen el comportamiento de un sistema: entrada, estado y salida. En este capítulo se analizará la forma en que la entrada repercute sobre la evolución del estado, así como las posibilidades de obtener un determinado valor para el estado en un instante dado a partir de la elección adecuada de la entrada. Todo esto a partir del concepto de controlabilidad. Después se estudiará la forma en la que las variaciones en el valor del estado se manifiestan sobre la salida, con lo que se cubre la interacción entre el estado y la salida complementando el análisis del comportamiento del sistema mediante el concepto de observabilidad.

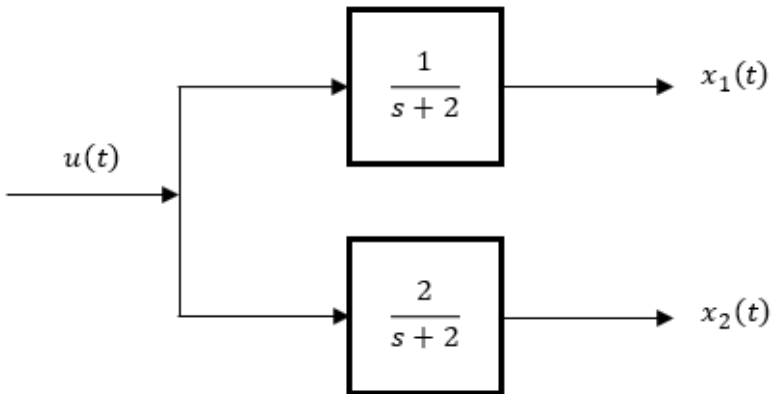
4.1 Controlabilidad

A la vista de la relación existente entre entrada y estado, cabe abordar el estudio de cómo se puede influir en el valor del estado a través de la entrada: así, es pertinente preguntarse si dada una trayectoria arbitraria definida en el espacio de estado, es posible encontrar la entrada que haga que el vector de estado la siga o si, por el contrario, existe alguna restricción en las posibles trayectorias que se puede inducir en el vector de estado mediante la elección de las entradas apropiadas.

El estudio de la controlabilidad en un sistema determina los puntos del espacio de estado que pueden ser alcanzados por un sistema actuando sobre las entradas del sistema; puntos que determinan los denominados variables de estado **controlables**. Este estudio abarca dos aspectos importantes:

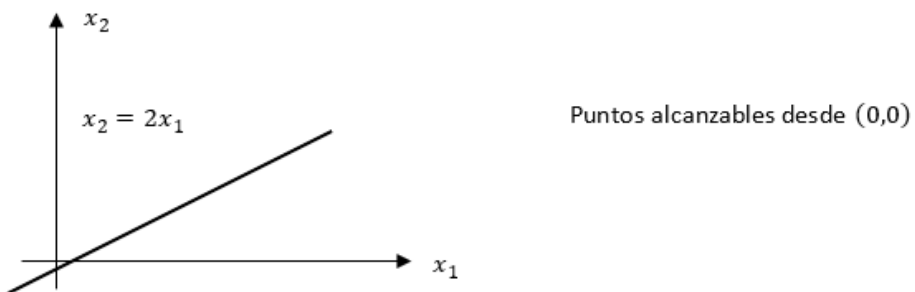
1. Considerando un sistema, un estado inicial y un estado final, se desea determinar la existencia de una entrada que lleve al sistema entre ambas variables de estado en un tiempo finito, en tal caso se dice que el sistema es controlable.
2. Si un sistema no es controlable, es necesario determinar los puntos del espacio de estado que si pueden ser alcanzados a partir de un estado inicial dado.

Ejemplo. Considere el siguiente sistema y analice su controlabilidad.

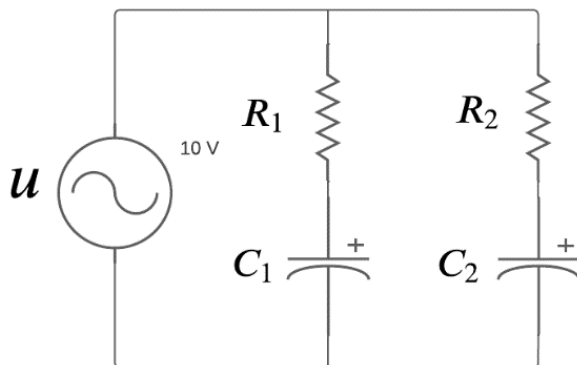


Este sistema no es controlable, debido a que, desde un determinado estado inicial, solo podrán ser alcanzados determinados puntos del espacio de estado, porque los valores de las dos variables de estado están ligados, al estar ambas sometidas a la misma dinámica. Entonces se dice que el sistema no es controlable, porque no puede alcanzar cualquier estado deseado a partir de un estado inicial dado.

El lugar geométrico de los puntos que pueden ser alcanzados por las variables de estado dadas (x_1, x_2) partiendo de condiciones iniciales nulas $(0,0)$ es:

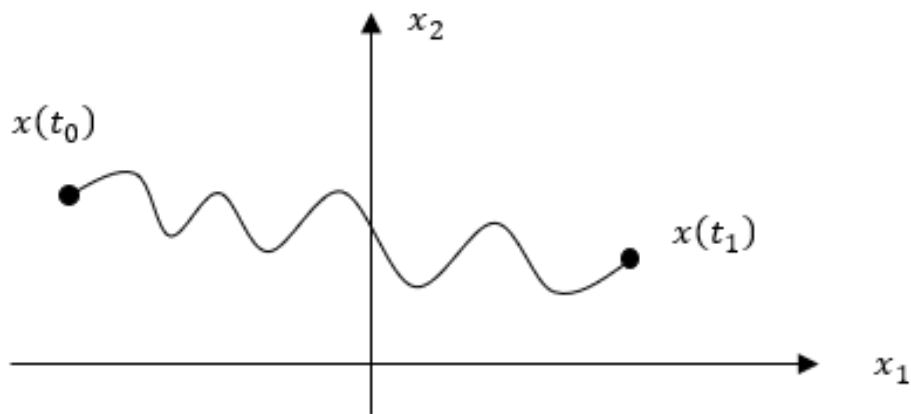


Ejemplo. Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura y analice su controlabilidad.



Si $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ el sistema es controlable, en caso contrario no es controlable.

Definición. Sean $x(t_0)$ y $x(t_1)$ puntos cualesquiera del espacio de estado. Se dice que la realización (A,B,C) del sistema es controlable al tiempo t_0 si existe $u(t)$ que transfiere $x(t_0)$ a $x(t_1)$ al tiempo t_1 .



Nota: Una base es un conjunto de vectores linealmente independientes y que son capaces de generar cualquier vector de dicho espacio.

4.1.1 Controlabilidad de sistemas lineales

Teorema Un sistema lineal variante en el tiempo representado como:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

es controlable en $[t_0, t_1]$ si y solo si su gramiano de controlabilidad, $W(t_0, t_1)$, definido como:

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau$$

es no singular.

Demostración

- Condición suficiente

Se intenta comprobar que existe una entrada que lleva el estado desde cualquier

$x(t_0) = x_0$ hasta cualquier $x(t_1) = x_1$. Dada la expresión de la solución completa de la ecuación de estado para sistemas lineales.

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (1)$$

El estudio de la controlabilidad del sistema es equivalente a plantear si existe una entrada capaz de llevar el sistema desde el estado inicial cero hasta el estado

$$\hat{x}(t_1) = x(t_1) - \Phi(t_1, t_0)x(t_0) \quad (2)$$

sustituyendo (1) en (2)

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3)$$

si se considera como entrada

$$u(\tau) = B^T(\tau)\Phi^T(t_1, \tau)W^{-1}(t_1, t_0)\hat{x}_1$$

sustituyendo (4) en (3)

$$\hat{x}(t_1) = W(t_1, t_0)W^{-1}(t_1, t_0)\hat{x}_1 = \hat{x}_1$$

Si $W(t_1, t_0)$ es no singular, se puede encontrar por lo menos por lo menos una entrada que transfiere el estado desde el origen hasta cualquier estado $\hat{x}_1$. Siendo esta entrada (4)

• Condición necesaria

Si se supone $W(t_1, t_0)$ singular, se demuestra que existen puntos del espacio de estado que no son controlables. Se parte de que $W(t_1, t_0)$ es singular, entonces

$$\det[W(t_1, t_0)] = 0$$

esto implica que $W(t_1, t_0)$ tiene al menos un valor propio cero, considerando el vector propio v , asociado a ese valor propio nulo, se tiene:

$$W(t_1, t_0)v = 0$$

premultiplicando v por la izquierda

$$VW(t_1, t_0)v = 0$$

y sustituyendo el valor de $W(t_1, t_0)$, se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} V^T \Phi(t_1, \tau) B(\tau) \underbrace{B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) V}_{\Sigma(\tau)} d\tau = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum(\tau)^T \sum(\tau) d\tau = 0 = \int_{t_0}^{t_1} \|\sum(\tau)\|^2 d\tau$$

integral de una función siempre positiva que tiene que ser igual a cero. Para que esto se cumpla $\sum(\tau) = 0$ $t_0 \leq \tau \leq t_1$ entonces

$$\sum(\tau) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B^T \Phi^T(t_1, \tau) V = 0 \\ V^T \Phi(t_1, \tau) B(\tau) = 0 \end{cases} \quad t_0 \leq \tau \leq t_1$$

Formando el producto por $u(\tau)$, recordando que:

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \text{ y pre multiplicando por } V^T$$

e integrando se obtiene:

$$V^T \hat{x}(t_1) = V^T \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = 0$$

$$V^T \hat{x}(t_1) = 0$$

siendo $V^T \hat{x}(t_1)$ el estado del sistema en el instante t_1 , partiendo del origen y ante la entrada genérica $u(t)$.

Esto significa que, desde el estado inicial nulo, cualquiera que sea la señal de entrada con la que se excite al sistema, se va a tener un estado que al ser multiplicado por el vector V^T va a resultar cero, por lo que es un vector de estado ortogonal a este. Por lo tanto, no se puede alcanzar cualquier punto del espacio de estado, sino solo aquellos que se encuentren sobre un vector ortogonal al vector propio V^T . Solo se alcanzarán los puntos que verifiquen la condición $V^T \hat{x}(t_1) = 0$. Por consiguiente, el sistema no es controlable en $[t_0, t_1]$

Ejemplo. Determinar la controlabilidad del sistema definido por:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

partiendo del instante inicial $t_0 = 0$ y para cualquier instante t

Para calcular el Grammiano es necesario conocer la matriz de transición:

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

entonces el Grammiano de controlabilidad queda como:

$$\begin{aligned} W(t, 0) &= \int_0^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 - 3e^{-6t} + 3e^{-4t} - e^{-2t}) & \frac{1}{8}(-1 + 2e^{-6t} - e^{-4t}) \\ \frac{1}{8}(-1 + 2e^{-6t} - e^{-4t}) & \frac{1}{6}(1 - e^{-6t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para poder determinar si el sistema es controlable o no, el Grammiano debe ser no singular, por lo tanto, su determinante debe ser distinto de cero.

$$\det[W(t, 0)] = \frac{1}{192} + \frac{1}{192}e^{-8t} - \frac{1}{48}e^{-6t} + \frac{1}{32}e^{-4t} - \frac{1}{48}e^{-2t}$$

entonces el determinante solo es cero para $t = 0$, puesto que los límites de la integral coinciden. Por lo tanto, el sistema es controlable en cualquier intervalo de tiempo que comience en $t = 0$, salvo cuando este sea también el final de dicho intervalo.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -3 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \text{ cof} \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 3 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(sI - A) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s+3 & 3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{3}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{\frac{3}{2}}{s+3} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$w(t, 0) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} d\tau$$

$$2 \times 1 \quad 1 \times 2$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-4t} - \frac{3}{4}e^{-4t} + \frac{9}{4}e^{-6t} & +\frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{3}{2}e^{-6t} & e^{-6t} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{6}{4}e^{-4t} + \frac{9}{4}e^{-6t} & \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{3}{2}e^{-6t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{3}{2}e^{-6t} & e^{-6t} \end{bmatrix} d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{6}{16}e^{-4t} - \frac{9}{24}e^{-6t} & -\frac{1}{8}e^{-4t} + \frac{3}{12}e^{-6t} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} + \frac{3}{12}e^{-6t} & -\frac{1}{6}e^{-6t} \end{array} \right]_0^t \\
&= \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t} - \frac{3}{8}e^{-6t} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{8}e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-6t} - \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} + \frac{1}{4}e^{-6t} - \frac{1}{8} & -\frac{1}{6}e^{-6t} + \frac{1}{6} \end{array} \right] \\
&= \int_0^t \left[\begin{array}{cc} -\frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-4t} + \frac{3}{2}e^{-6t} & -\frac{5}{2}e^{-4t} - e^{-6t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{3}{2}e^{-6t} & e^{-6t} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \frac{25}{4}e^{-2x} - 0.3125e^{-4x} - 0.258333e^{-6x} & \frac{25}{40}e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{-6x} \\ -\frac{1}{8}e^{-4x} + \frac{1}{4}e^{-6x} & -\frac{1}{6}e^{-6x} \end{array} \right]_0^t
\end{aligned}$$

Tarea. Comprobar los cálculos.

4.1.2 Controlabilidad en sistemas lineales invariantes

Dado que el sistema es invariante en el tiempo, ya no es necesario tomar en cuenta la variable de tiempo y se habla sencillamente de controlabilidad. Esto significa que, si un punto es controlable, siempre se puede transferir el estado inicial a cualquier otro en cualquier tiempo finito.

En el caso de sistemas lineales invariantes, existe un método alternativo a la aplicación del Grammiano para el estudio de la controlabilidad, cuya aplicación es más sencilla y se fórmula mediante el siguiente teorema:

Teorema. El sistema de dimensión “ n ” definido por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$, definida como

$$\mathcal{C} = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

con $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times (n \times m)}$ es de rango pleno “ n ”

Demostración:

- Condición necesaria

Si el sistema es controlable, es necesario que existan n columnas de la matriz de controlabilidad linealmente independientes. La solución de la ecuación de estado si se parte de un estado inicial nulo es:

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) Bu(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (5)$$

Aplicando el método de Cayley-Hamilton:

$$e^{A(t_1-\tau)} = IA(t_1 - \tau) + \frac{1}{2!} A^2(t_1 - \tau)^2 + \dots$$

$$= h_0(\tau)I + h_1(\tau)A + \dots + h_{n-1}(\tau)A^{n-1} \quad (6)$$

y sustituyendo (5) en (6)

De tal forma que el estado $\hat{x}(t_1)$ que se pueden alcanzar desde el origen es combinación lineal de las columnas de la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$. Por lo tanto, para que $\hat{x}(t_1)$ pueda ser cualquier punto del espacio de estado, es necesario que de todas las columnas que aparecen

haya “ n ” linealmente independientes para que puedan constituir una base para el espacio de estado.

- Condición suficiente

Se supone que el sistema no es controlable y se desea demostrar que no existen “ n ” columnas de la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ linealmente independientes.

Si el sistema no es controlable, el Grammiano W es singular, por lo tanto, su determinante es nulo y tiene un valor propio nulo (por lo menos), cuyo vector propio correspondiente (asociado) cumple con:

$$V^T \Phi(t_1 \tau) B(\tau) = 0$$

para el caso de sistemas invariantes

$$V^T e^{At} B = 0$$

sí se deriva esta ecuación $n - 1$ veces respecto a t , se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} V^T e^{At} B = 0 \\ V^T e^{At} AB = 0 \\ V^T e^{At} A^2 B = 0 \\ \vdots \\ V^T e^{At} A^{n-1} B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V^T e^{At} \mathcal{C} = 0$$

esto significa que existiría un vector que es ortogonal a los productos AB , por lo tanto, no existen “ n ” columnas linealmente independientes en la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ por lo tanto no se puede formar una base para el espacio de estado y no se podrá abarcar todo el espacio de estado.

Ejemplo. Analice la controlabilidad del siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(C) = 2 \Rightarrow \text{controlable}$$

$$\det C = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango pleno} \Rightarrow \text{controlable}$$

Ejemplo. Analice la controlabilidad del siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 17 & 12 & 62 \\ 0 & 5 & 4 & 15 & 20 & 45 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(C) = 3 \Rightarrow \text{controlable}$$

Ejemplo. Verifique la controlabilidad de un sistema en la forma controlador.

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_c \quad A_c b_c \quad A_c^2 b_c] = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{rango pleno} \\ \Rightarrow \text{controlable}$$

Ejemplo. Verifique la controlabilidad de un sistema en la forma controlabilidad.

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_{co} \quad A_{co} b_{co} \quad A_{co}^2 b_{co}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rango pleno} \Rightarrow \text{controlable} \quad C_{co} = I_n$$

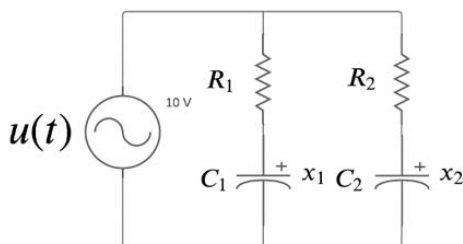
Tarea. Verifique la controlabilidad de los siguientes sistemas:

a) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ no controlable

b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ controlable

c) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ no controlable

d) controlable con $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$



4.1.3 Invarianza de la controlabilidad ante cambio de base

La controlabilidad de un sistema es independiente de la representación de estado que se maneje. Para probarlo lo único que se necesita es construir la representación de estado realizando el cambio:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

con esto se consigue una nueva representación, de la forma

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

la matriz de controlabilidad de la nueva representación será:

$$\hat{\mathcal{C}} = [T^{-1}B : T^{-1}AB : T^{-1}A^2B : \dots : T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}\mathcal{C}$$

puesto que T es no singular, el rango de la matriz de controlabilidad $\hat{\mathcal{C}}$, coincide con el de $\mathcal{C}$, por lo tanto, la controlabilidad es invariante ante transformaciones lineales.

4.1.4 Subespacio controlable

De acuerdo con lo que se ha detallado anteriormente, en un sistema lineal e invariante que sea controlable es posible alcanzar cualquier estado, partiendo desde cualquier estado inicial, eligiendo la entrada adecuada. Sin embargo, si no es controlable, no se va a poder alcanzar cualquier estado. Sin embargo, resulta interesante, en estos casos, caracterizar aquellos puntos que van a ser controlables, es decir, que se van a poder alcanzar. Es decir, para un sistema lineal invariante definido por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

el conjunto de puntos del espacio de estado alcanzables partiendo de un estado inicial nulo forman un subespacio vectorial, al que se le denomina subespacio controlable, X_c , generando por los vectores columna de $\mathcal{C}$.

Estos puntos forman un espacio vectorial, pues el origen pertenece a él, y además cumplen la condición de linealidad.

Dado que los vectores columna de la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$, generan el espacio controlable, entonces es posible establecer una base para dicho espacio a partir de las columnas linealmente independientes de $\mathcal{C}$, siendo la dimensión del espacio generado el rango de $\mathcal{C}$. Para el cálculo de una base del subespacio controlable basta observar en la matriz

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

las r_c columnas linealmente independientes con r_c el rango de $\mathcal{C}$.

El método consiste en ir seleccionando columnas de izquierda a de-

recha y cuando una de ellas, $A^i b_j$, sea linealmente dependiente de las anteriores, entonces se descartan esta y todas las $A^{i+k} b_j$ posteriores.

El proceso termina cuando todas las columnas de un grupo $A^i B$ sean linealmente dependientes, ya que a partir de entonces los restantes grupos $A^{i+k} B_j$ también lo serán.

Ahora bien, a partir de la base para el subespacio controlable, es posible separar el subespacio controlable del subespacio no controlable. Dado el sistema lineal invariante con dimensión del subespacio controlable, $\dim(X_c) = r_e < n$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

existe una matriz de transformación T , tal que si se efectúa dicho cambio de base:

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

la ecuación de estado en el nuevo sistema de referencia puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_a(t) \\ \dot{\tilde{x}}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & \tilde{A}_{ab} \\ 0 & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_a(t) \\ \tilde{x}_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$\tilde{A}_{aa}$ tiene
la forma
Controlabilidad

verificándose que el subsistema formado por las variables $\tilde{x}_a$, cuya dinámica está representada por las matrices $(\tilde{A}_{aa}, \tilde{B}_a)$, coincide con el subespacio controlable, siendo su dimensión r_e ; por lo tanto, la dimensión del subsistema formado por las variables $\tilde{x}_b$ es $n - r_e$. Adicionalmente este subsistema está caracterizado por las matrices $(\tilde{A}_{bb}, 0)$ y tiene un comportamiento independiente de la entrada.

La ecuación de estado de orden reducido de las variables de estado controlables es:

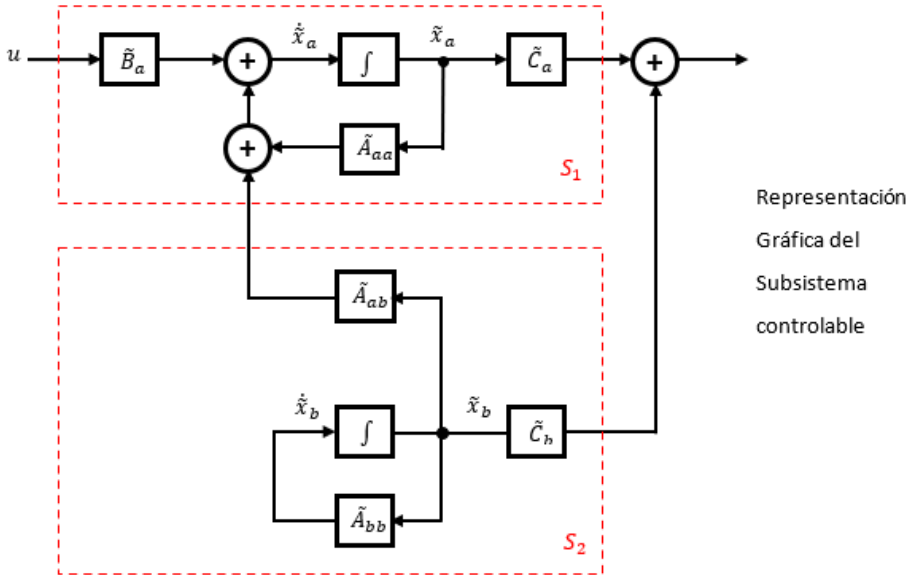
$$\dot{\tilde{x}}_a(t) = \tilde{A}_{aa}\tilde{x}_a(t) + \tilde{B}_a u(t)$$

representa el comportamiento del subsistema controlable y define la misma función de transferencia que la ecuación de estado original es decir son distintas realizaciones del mismo sistema.

La matriz T que realiza esta transformación se construye como:

$$T = [T_a : T_b]$$

donde T_a es una base del subespacio controlable (formada con r_e columnas linealmente independientes de $\mathcal{C}$) y T_b son $n - r_e$ vectores cualesquiera linealmente independientes entre sí y de los de la matriz T_a .



Por medio de la transformación T , el sistema original se descompone en dos subsistemas, el subsistema S_1 es un subsistema controlable y S_2 , está totalmente separado de u por lo que evoluciona totalmente independientemente a la señal de entrada, por lo que no es controlable.

Ejemplo. Analice la controlabilidad del siguiente sistema y si es necesario obtenga una realización en la forma controlable - no controlable.

La base del subespacio controlable se elige como:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 15 \\ -1 & -5 & -13 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(\mathcal{C}) = 2 < 3 \Rightarrow \text{Sistema no controlable}$$

Por lo tanto, las matrices transformadas quedan como:

$$T_a = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad del subsistema controlable es:

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(\tilde{\mathcal{C}}) = 2$$

con lo que se comprueba la existencia de un subsistema de dimensión 2 que es controlable, el cual está formado por $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ que expresados en la base original son:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. Para el siguiente sistema, encuentre una realización controlable – no controlable.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 10 & -4 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

La matriz de controlabilidad queda como:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(C) = 2 \Rightarrow \text{no es controlable}$$

La matriz de transformación se elige tal que:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices transformadas son:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las variables de estado transformados se obtienen como:

$$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Con $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ las variables de estado controlables y $\tilde{x}_3$ la variable de estado no controlable.

4.1.5 Controlabilidad de sistemas no lineales

En 1960 R. E. Kalman definió el concepto de controlabilidad de estado para un sistema lineal invariante en el tiempo. La propiedad de controlabilidad de estado está relacionada con la capacidad que tiene un sistema dinámico para alcanzar un estado final fijo desde cualquier estado inicial. Previo al nacimiento del análisis de sistemas en el espacio de estado, en 1938

Chow considera los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + \dots + f_m(x)u_m$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $f_1(x) \dots f_m(x)$ campos vectoriales analíticamente completos y cada una de las entradas $u_1, u_2, \dots, u_m$ pueden tomar valores en el conjunto $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, en su artículo Chow establece la relación entre la superficie que puede alcanzarse desde x^0 y el conjunto expandido por el conjunto $F = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ y por todos los vectores que pueden expresarse como paréntesis de Lie en F . Es decir, los vectores de F y sus paréntesis de Lie proveen una caracterización completa del espacio alcanzable de x^0 . Sin embargo, debido a la suposición de Chow de que $u_1, \dots, u_m$ solo puede tomar valores en $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ restringe su aplicación a sistemas reversibles, es decir, sistemas afines (lineales al control) sin perturbaciones, etc.

En trabajos posteriores, este concepto se ha generalizado para sistemas dinámicos no lineales, en los cuales se definen otros términos como la accesibilidad y la controlabilidad de estado. Particularmente en el artículo publicado por Sussman and Jurdjevic 1972 analizan la controlabilidad de sistemas no lineales desde el enfoque geométrico. Cuando el análisis se realiza de manera local, se consideran la accesibilidad y la controlabilidad local y cuando el análisis se realiza de manera global se tiene la controlabilidad débil y la controlabilidad total de estado.

En los sistemas lineales estos conceptos son equivalentes, mientras que en los sistemas no lineales la accesibilidad se refiere a que el sistema puede moverse en todas las direcciones y por lo tanto la controlabilidad de estado exige además que el sistema pueda alcanzar cualquier punto del espacio de estado.

En la figura se muestra el caso de un sistema dinámico con dos variables de estado.

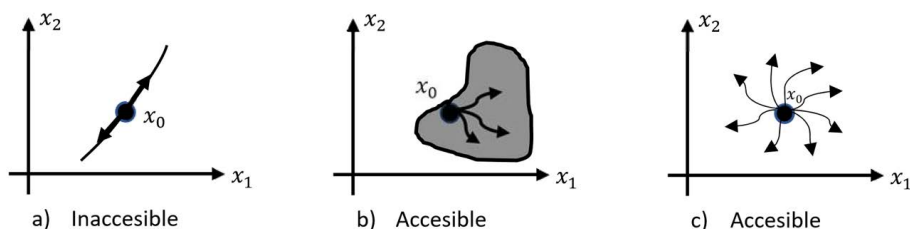


Figura 1. Accesibilidad y controlabilidad.

- a) Se muestra el caso inaccesible, en el cual las trayectorias del sistema solo se pueden mover en una dirección desde la condición inicial.
- b) Muestra un sistema accesible, es decir, las trayectorias se pueden mover en un subespacio de la misma dimensión del espacio de estado desde la condición inicial.
- c) Muestra el caso controlable, en el cual las trayectorias del sistema se pueden mover en todo el espacio de estado desde la condición inicial.

Para evaluar si un sistema dinámico lineal es controlable basta calcular el rango de la matriz de controlabilidad de Kalman y verificar si es igual a la dimensión del espacio de estado, entonces el sistema es controlable.

En el caso de los sistemas dinámicos no lineales no se han desarrollado herramientas que permitan evaluar directamente la controlabilidad de estado, pero es posible evaluar la accesibilidad por medio de una condición de rango de matriz, basada en el álgebra de Lie.

La accesibilidad es una propiedad más débil que la controlabilidad, algunas veces, sin embargo, como en el caso de los sistemas reversibles, la controlabilidad puede ser caracterizada por la condición de rango de accesibilidad.

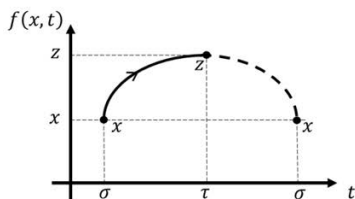
Para garantizar que un sistema dinámico no lineal sea controlable, además de satisfacer la condición de rango, el sistema debe ser reversible. Es decir, aquellos sistemas que su dinámica es invariante al cambio de signo en el tiempo como los LTI o los sistemas afines al control o sistemas oscilatorios, sistemas de Euler.

$$t \rightarrow t$$

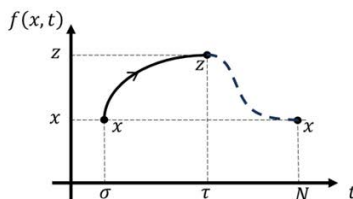
$$x \rightarrow -x$$

$$y \rightarrow -y$$

Mathematical Control Theory. E. Sontag, Springer, 1998.



Sistema fuertemente reversible



Sistema débilmente reversible

Reversibilidad fuerte $\rightarrow$ Reversibilidad débil

Un sistema es débilmente reversible si el estado final z de la trayectoria $z = \phi(t, x, u)$ solución de $\dot{x} = f(x, t, u)$ con estado inicial x y estado final z con función de control u puede recobrar el estado inicial x que generó dicha trayectoria en un tiempo finito con una acción de control admisible, aunque no necesariamente recupere el estado inicial en el orden inverso, es decir puede hacerlo por otra trayectoria. La reversibilidad fuerte exige que el sistema recupere el estado inicial x por la misma trayectoria que este género al llegar al estado final z .

Un sistema dinámico es irreversible si no es reversible.

Ejemplo. Tubo de pasta de dientes (sistema no reversible).

Conjunto alcanzable	Es aquel conjunto conformado por todos aquellos vectores del espacio de estado, que pueden ser alcanzados a partir de la evolución del sistema dinámico bajo el efecto de alguna acción del control admisible.
Conjunto controlable	Es el conformado por todos aquellos vectores del espacio de estado que, bajo la influencia de alguna acción de control admisible, pueden llegar en un tiempo determinado a partir de la evolución del sistema a estar en cualquier punto del espacio de estado.
Conclusión	En sistemas no lineales reversibles alcanzabilidad $\rightarrow$ controlabilidad Un sistema no lineal es controlable si cumple: 1) El sistema es reversible y 2) El sistema satisface la condición de rango

Esto significa que la dimensión del álgebra de Lie asociada al sistema debe de tener la misma dimensión que el espacio de estado. En otras palabras, la dimensión del álgebra de Lie asociada al sistema es la dimensión del conjunto alcanzable o del conjunto controlable.

4.1.5.1 Distribución de controlabilidad

Considere un sistema no lineal afín a la entrada de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j = h_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Para el caso de sistemas no lineales, el conjunto de estados que pueden alcanzarse desde un estado inicial dado, está caracterizado por medio de distribuciones.

Distribución. En el sentido de la geometría diferencial, una distribución es la asignación de un subespacio de vectores tangente a cada punto del espacio de estado.

Δ : distribución diferencial

Campo vectorial. Un campo vectorial arbitrario $f(x)$ suave, perteneciente a C^∞ , representa en cada punto del espacio n -dimensional de coordenada x , una dirección unívocamente especificada por el valor de sus componentes en cada punto. Para el sistema $\dot{x} = f(x)$, $f(x)$ representa entonces en cada punto x del espacio, un vector tangente a trayectoria solución del sistema $x(t)$. Esto permite calcular de manera sencilla la tasa de variación de funciones escalares a lo largo de las soluciones de la ecuación diferencial asociada al campo vectorial.

Definición. Distribución de controlabilidad.

Una distribución Δ_c es llamada de controlabilidad de un sistema no lineal afín a la entrada si posee las siguientes propiedades:

1. Es involutiva

$$\forall (\tau_1, \tau_2 \in \Delta_c) \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta_c$$

Todo corchete de Lie $[\tau_1, \tau_2]$ está en el *span* (expansión de espacio tangencial) de (τ_1, τ_2) es decir $[\tau_1, \tau_2]$ es combinación lineal de la base (τ_1, τ_2)

2. Es invariante bajo los campos vectoriales $(f = g_o, (g_i, i = 1, \dots, m))$

$$\forall (\tau \in \Delta_c) \Rightarrow [g_i, \tau] \in \Delta_c$$

3. Contiene la distribución $\text{span} \{g_1, \dots, g_m\}$

$$\Delta_o = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \subseteq \Delta_c$$

4. Es “mínima” si D es una familia de distribuciones en U , el elemento mínimo o más pequeño está definido como perteneciente a D (si existe) el cual está contenido en cualquier otro elemento de D con las propiedades anteriores.

Lema. Sea Δ distribución suave con $\tau_1, \dots, \tau_q$ un conjunto de campos vectoriales. La familia de todas las distribuciones que son invariantes bajo $\tau_1, \dots, \tau_q$ y contiene Δ tiene un elemento mínimo, lo cual es una distribución suave.

Considérese la distribución más pequeña que contiene Δ y que es invariante bajo los campos vectoriales $g_o, \dots, g_m$ denotada por $\langle g_o, \dots, g_m | \Delta \rangle$, entonces es posible definir el siguiente algoritmo para construir la distribución de controlabilidad.

Analysis and control of Nonlinear Process systems, K. M. Hangos, J. Bokor, G. Szederkényi, Springer, 2004
Mathematical Control Theory. E. Sontag, Springer, 1998.

En 1873, Sophus Lie idea para construir una teoría de grupos continuos para complementar la teoría de grupos discretos, con aplicación directa a ecuaciones diferenciales.

Nomenclatura

$\langle \omega^*, v \rangle = \sum_{i=1}^n \omega_i v_i$: Producto interno de ω^* en v con $\omega^* \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$

$L_f \lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$: Derivada de Lie y se lee derivada de λ a lo largo de f

$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$: Corchete de Lie o producto de Lie

$= L_f g(x) - L_g f(x)$: Derivada de g a lo largo de f menos Derivada de f a lo largo de g

También es posible calcular el corchete o producto de Lie recursivamente de un campo vectorial g con el mismo campo vectorial f

$$[f, [f, \dots, [f, g]]]$$

La derivada de Lie, también llamada derivada direccional $L_f \lambda(x)$ mide en cada punto x del espacio, la velocidad de variación instantánea de la función $\lambda(x)$ con respecto de la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}=f(x)$ que pasa por el punto x .

Algoritmo para construir la distribución de controlabilidad

1. Punto de inicio

$$\Delta_o = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

2. Desarrollo de la distribución de controlabilidad

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + \sum_{i=0}^m [g_i, \Delta_{k-1}]$$

Nótese que $[g_i, \Delta_{k-1}]$ se calcula utilizando funciones $(\phi_1, \dots, \phi_\ell)$ expandiendo la distribución Δ_{k-1} , es decir

$$[g_i, \Delta_{k-1}] = \text{span}\{[g_i, \phi_1], \dots, [g_i, \phi_\ell]\}$$

Está probado que Δ_k tiene la siguiente la siguiente propiedad

$$\Delta_k \subset \langle g_o, \dots, g_m | \Delta_o \rangle$$

3. Criterio de finalización

Si existe k^* tal que $\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$, entonces

$$\Delta_c = \Delta_{k^*} = \langle g_o, \dots, g_m | \Delta_o \rangle$$

Simplificación para el desarrollo de la distribución de controlabilidad.

$$\Delta_0 = \text{span} \{g(x)\}$$

$$\Delta_1 = \text{span} \{g(x), [f(x), g(x)]\}$$

$$\Delta_2 = \text{span} \{g(x), [f(x), g(x)], [f(x), [f(x), g(x)]]\}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_k = \text{span} \{g(x), [f(x), g(x)], \dots [f(x), \dots, [f(x), \dots, g(x)]]\}$$

Ejemplo. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin x$

- Calcule la derivada de g a lo largo de f

$$\begin{aligned} L_f g(x) &= \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) \\ &= \frac{\partial \sin x}{\partial x} x^2 \\ &= +x^2 \sin x \end{aligned}$$

- Calcule el corchete de Lie $[f, g]$

$$\begin{aligned} [f, g](x) &= L_f g(x) - L_g f(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) \\ &= x^2 \cos x - 2x \sin x \end{aligned}$$

- Calcule el corchete de Lie $[g, f]$

$$\begin{aligned} [g, f](x) &= L_g f(x) - L_f g(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) \\ &= 2x \sin x - x^2 \cos x \end{aligned}$$

Conclusión $[f, g](x) \neq [g, f](x)$

Un sistema no lineal es controlable si existe una distribución Δ capaz de generar todo el espacio vectorial del sistema bajo análisis.

Teorema de Frobenius: Una distribución es involutiva si y solo si es completamente integrable.

A partir de cualquier punto de la proyección de la distribución puede regresar al punto en la variedad que le dio origen. El teorema de Frobenius nos permite asegurar que existe solución para el sistema dinámico si y solo si el conjunto de los campos vectoriales es linealmente independiente e involutivo.

Propiedades del algoritmo

El algoritmo inicia con la expansión de las funciones de entrada $g_i(x)$ de la ecuación de estado original.

Es necesario calcular los corchetes de Lie (*i.e.* $[f(x), g_i(x)]$) para las funciones $f(x)$ y $g_i(x)$ respectivamente.

Después es necesario expandir la distribución obtenida en el paso anterior por la distribución expandida por los corchetes de Lie (*i.e.* $[f(x), g_i(x)]$, $i = 1, \dots, m_k$)

Corolario. Una condición suficiente para un sistema no lineal afín a la entrada, en la forma

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad i = 1, \dots, m$$

Sea débilmente controlable es que

$$\dim \Delta_c = n$$

con $\Delta_c = \Delta_k^*$

Nonlinear Control Systems, A. Isidori, Springer-Verlag, 1995

Ejemplo. Distribución de controlabilidad de sistemas lineales invariantes en el tiempo

Construya la distribución de controlabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = Cx$$

Primero hay que construir Δ_o , en este caso $g_o(x) = f(x) = Ax$, y $\sum_{i=1}^m g_i(x) u_i = Bu$

entonces: b_i son las columnas de la matriz B

$$\Delta_o = \text{Im} B = \text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$$

$\Delta_o = \text{Im} B = \text{span}\{b_1, \dots, b_m\}$

por lo tanto, cualquier campo vectorial de Δ_o puede expresarse como:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) b_i$$

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

entonces para Δ_k :

$$\Delta_1 = \Delta_o + \sum_{i=0}^m [g_i, \Delta_o] = I_m B_T \left\{ \overbrace{[b_i, b_j]}^{=0}, \dots, b_m, [f, b_1], \dots, [f, b_m] \right\}$$

dado que

$$[g_i, g_j] = [b_i, b_j] = \underbrace{L_{b_i} b_j - L_{b_j} b_i}_{\text{por ser lineal}} = 0 \quad \frac{\partial b_j}{\partial x} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial x} b_j$$

entonces

$$[f, b_i](x) = [Ax, b_i] = \frac{\partial b_i}{\partial x^T} Ax - \frac{\partial(Ax)}{\partial x^T} b_i = -Ab_i \quad i = 1, \dots, m$$

de lo que se obtiene

$$\Delta_1 = Im[B|AB]$$

similarmente

$$\Delta_k = Im[B|AB| \dots |A^k B]$$

por lo tanto, de la condición de dimensión de la distribución de controlabilidad

$$\dim \Delta_c = n$$

con

$$\Delta_c = \Delta_k^*$$

para que el sistema sea controlable la distribución de controlabilidad debe expandir todo $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= [f, [f, b_i]](k) \\
 &= [A_x, -Ab_i] \\
 &= \frac{\partial(-Ab_i)}{\partial x} A_x \\
 &= -\frac{\partial A_x}{\partial x} (-Ab_i) \\
 &= A^2 b_i
 \end{aligned}$$

Ejemplo. Distribución de controlabilidad para un sistema bidimensional. Calcule la distribución de controlabilidad del siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} - x_1 u \\
 \dot{x}_2 &= 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} - x_2 u \\
 y &= -x_2
 \end{aligned}$$

Primero, del modelo se obtiene

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} \\ 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{pmatrix} \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Para el paso inicial

$$\Delta_o = \text{span}\{g\}$$

Para el siguiente paso

$$\Delta_1 = \text{span}\{g, [f, g]\}$$

donde $[f, g]$ es el producto de Lie de f y g

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} \\ 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\left(\frac{x_1+1}{x_1}\right) e^{-\frac{1}{x_1}} & 3e^{x_2} \\ 5\left(\frac{x_1+1}{x_1}\right) e^{-\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{x_1}} + 3(x_2 - 1)e^{x_2} \\ 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{bmatrix}$$

Entonces la distribución de controlabilidad es

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-\frac{1}{x_1}} + 3(x_2 - 1)e^{x_2} \\ 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que el sistema es controlable si $x_1 \neq 0$

Ejemplo. Fermentador semilote. Analice la controlabilidad del modelo de un sistema fermentador semilote, definido por:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \mu(x_2)x_1 \\ -\frac{1}{\gamma}\mu(x_2)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_3} \\ \frac{sf - x_2}{x_3} \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\text{con } \mu(x_2) = \frac{\mu_m x_2}{k_1 + x_2 + k_2 x_2^2}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \mu(x_2)x_1 \\ -\frac{1}{\gamma}\mu(x_2)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_3} \\ \frac{sf-x_2}{x_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x_1 es la concentración de biomasa, x_2 es la concentración de sustrato, x_3 es el volumen del reactor, u el caudal de alimento, sf es la concentración del sustrato en el fluido de alimentación, μ_m, k_1, k_2 son parámetros cinéticos y γ es un parámetro de rendimiento

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \mu(x_2)x_1 \\ -\frac{1}{\gamma}\mu(x_2)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_3} \\ \frac{sf-x_2}{x_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para el paso inicial $k = 0$

$$\Delta_0 = \text{span}\{g\}$$

Para $k = 1$

$$\Delta_1 = \text{span}\{g, [f, g]\}$$

donde $[f, g]$ se define como

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_3}\mu(x_2)x_1 + \frac{x_1}{x_3}\mu(x_2) - \mu(x_2)x_1 \frac{sf-x_2}{x_3} \\ -\frac{1}{\gamma x_3}\mu(x_2)x_1 - \frac{1}{\gamma}\mu(x_2)\frac{x_1}{x_3} + \frac{1}{\gamma}\mu(x_2)x_1 \frac{sf-x_2}{x_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

es importante notar que hay una dependencia lineal entre el primer y segundo renglón de $[f, g]$, entonces para $k=2$

$$\Delta_2 = \text{span}\{g, [f, g], [f, [f, g]]\}$$

$$[f, [f, g]] = \frac{\partial [f, g]}{\partial x} g(x) - \frac{\partial f}{\partial x} [f, g] = \begin{bmatrix} * \\ ** \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $k^* = 1$ es decir $\Delta_c = \Delta_1$, considerando la dependencia lineal entre el primer y segundo renglón Δ_1 y Δ_2 , se puede apreciar que la dimensión de la distribución de controlabilidad siempre es 2, es decir, para la condición de rango $\dim \Delta_c = 2 \neq n$ ya que $n = 3$ por lo tanto, el sistema no es alcanzable ni localmente controlable.

Ejemplo. Controlabilidad de una red neuronal recurrente. Analice la controlabilidad de una red neuronal recurrente descrita por:

$$x_1(k+1) = \omega_{11}s(x_1) + \omega_{12}s(x_2) + \omega_{13}s(x_3)|_k$$

$$x_2(k+1) = \omega_{21}s(x_1) + \omega_{22}s(x_2) + \omega_{23}s(x_3)|_k$$

$$x_3(k+1) = \omega_{31}s(x_1) + \omega_{32}s(x_2) + \omega_{33}s(x_3) + au|_k$$

De lo que se obtiene

$$f = \begin{bmatrix} \omega_{11}s(x_1) + \omega_{12}s(x_2) + \omega_{13}s(x_3) \\ \omega_{21}s(x_1) + \omega_{22}s(x_2) + \omega_{23}s(x_3) \\ \omega_{31}s(x_1) + \omega_{32}s(x_2) + \omega_{33}s(x_3) \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\Delta_o = \text{span}\{g\} = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \text{span}\{g, [f, g]\}$$

con

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$= 0f(x) - \overbrace{\begin{bmatrix} \omega_{11}S'(x_1) & \omega_{12}S'(x_2) & \omega_{13}S'(x_3) \\ \omega_{21}S'(x_1) & \omega_{22}S'(x_2) & \omega_{23}S'(x_3) \\ \omega_{31}S'(x_1) & \omega_{32}S'(x_2) & \omega_{33}S'(x_3) \end{bmatrix}}^{**} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\omega_{13}S'(x_3) \\ -a\omega_{23}S'(x_3) \\ -a\omega_{33}S'(x_3) \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces, } \Delta_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a\omega_{13}S'(x_3) \\ -a\omega_{23}S'(x_3) \\ -a\omega_{33}S'(x_3) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\omega_{13} \neq 0$$

$$\omega_{23} \neq 0$$

$$a \neq 0$$

por lo que

$$\Delta_2 = \text{span}\{g, [f, g], [f, [f, g]]\}$$

con

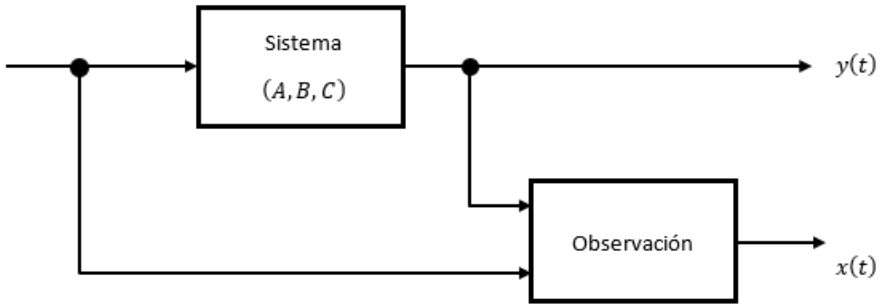
$$\begin{aligned} [f, [f, g]] &= \frac{\partial [f, g]}{\partial x} g(x) - \frac{\partial f}{\partial x} [f, g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a\omega_{13}S''(x_3) \\ 0 & 0 & -a\omega_{23}S''(x_3) \\ 0 & 0 & -a\omega_{33}S''(x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} - [**] \begin{bmatrix} -a\omega_{13}S'(x_3) \\ -a\omega_{23}S'(x_3) \\ -a\omega_{33}S'(x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a\omega_{13}S'(x_3) \\ -a\omega_{23}S'(x_3) \\ -a\omega_{33}S'(x_3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$\dim \Delta_2 = 3 \forall x_1, x_2, x_3$ siempre y cuando $a, \omega_{13} \neq 0$ y $\omega_{23} \neq 0$ además, $\dim \Delta_3 = \dim \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2$ es la distribución de controlabilidad.

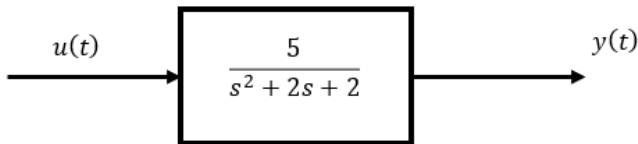
4.2 Observabilidad

La idea de observabilidad se relaciona con la posibilidad de conocer el valor del estado de un sistema, a partir del conocimiento de la evolución de la entrada y de la salida que genera. Una vez conocido el estado en un instante inicial, se puede determinar el estado en cualquier otro instante posterior utilizando la solución de la ecuación de estado.

La observabilidad se presenta conceptualmente como una idea complementaria a la de controlabilidad; si la controlabilidad estudia la relación entrada-estado ahora se va a estudiar la relación estado-salida.

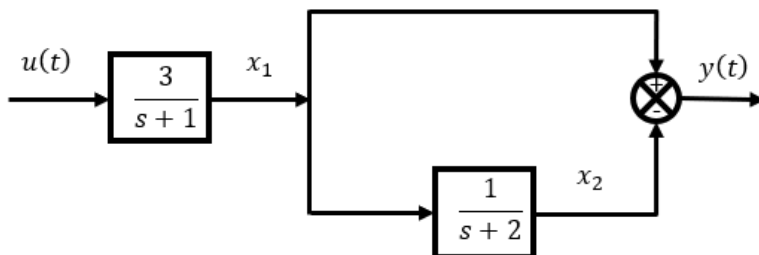


Ejemplo. Para el sistema mostrado en la figura; Si se eligen la salida y su derivada como variables de estado ¿el sistema será observable?



Eligiendo la salida y su derivada, es posible conocer la evolución del estado a partir de la salida por lo tanto el sistema será observable.

Ejemplo. ¿El siguiente sistema es observable?



La función de transferencia de este sistema quedaría como:

$$G(s) = \frac{3}{s+2} \left(1 - \frac{1}{s+2} \right) = \frac{3}{s+1} \frac{s+1}{s+2} = \frac{3}{s+2}$$

es decir, desde el punto de vista entrada-salida el sistema se comporta como uno de primer orden por lo tanto solo se podría conocer una variable de estado a partir de la información de $u(t)$ y $y(t)$. Entonces el sistema no es observable. La observabilidad se impide con la cancelación de polos y ceros.

Definición. Un sistema (A,B,C) es observable al tiempo t_0 sí a partir del conocimiento de $u(t)$ y $y(t)$ en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ se puede determinar el estado x en t_0 .

4.2.1 Observabilidad en sistemas lineales

El objetivo es determinar en qué condiciones se puede obtener el estado inicial $x_0 = x(t_0)$, conociendo $u(\tau)$ y $y(\tau)$ con $t_0 < \tau \leq t$. Si se conocieran $x(t_0)$ y $u(\tau)$ se podría obtener $x(t)$ con la ecuación:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \quad (6)$$

y teniendo en cuenta la ecuación de salida

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (7)$$

sustituyendo ⑥ en ⑦

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

Agrupando términos que dependen de la entrada y la salida, las cuales se suponen conocidas

$$y(t) - \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - D(t)u(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) = \bar{y}(t) \quad (8)$$

donde $\bar{y}(t)$ representa la componente de salida debida solo a la existencia de condiciones iniciales no nulas; es decir, la aportación a la salida dada por la evolución libre del sistema o, lo que es lo mismo, la salida del sistema ante entrada nula.

De esta forma es posible ver que la probabilidad de conocer el estado a partir de la salida y de la entrada depende de $C(t)$ y $\Phi(t, t_0)$ la cual a su vez depende de $A(t)$.

Teorema. Dado un sistema definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Es observable en $[t_0, t_1]$ sí y solo si la matriz $V(t_1, t_0)$ conocida como Grammiano de observabilidad y definida como:

$$\text{es no singular.} \quad V(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau$$

Demostración:

- Condición suficiente

Partiendo de la definición del Grammiano de observabilidad:

$$V(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

multiplicando ambos lados por x_0 por la derecha se tiene

$$V(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(t) \underbrace{C(\tau) \Phi(\tau, t_0) x_0}_{\bar{y}(de(8))} d\tau$$

$$V(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau$$

si $V(t_1, t_0)$ no es singular entonces x_0 quedaría despejada como:

$$x_0 = V^{-1}(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau \quad (9)$$

por lo tanto, se puede obtener el estado del sistema en función de la salida ante entrada nula.

- Condición necesaria

El razonamiento es similar al realizado en la demostración del teorema de controlabilidad. Si V es singular entonces $\det(V(t_1, t_0)) = 0$, existe algún valor propio nulo, considerando el vector propio asociado a dicho valor propio y tomándolo como condición inicial, entonces

$$x_0^T V(t_1, t_0) x_0 = 0$$

Sustituyendo $V(t_1, t_0)$ por su valor, se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} x_0^T \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) x_0 d\tau = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi^T(\tau) \xi(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\xi(\tau)\|^2 d\tau = 0$$

para que pueda cumplirse dicha expresión es necesario que $\xi(\tau) = 0 \forall \tau$, por lo que

$$C(t) \Phi(t, t_0) x_0 = \bar{y}(t) = 0 \text{ con } x_0 \neq 0$$

por lo que se puede concluir que, tanto para este estado x_0 como para el estado nulo, la salida ante entrada nula será la misma $\bar{y}(t) = 0$ por lo cual no va a ser posible distinguirlos. Por lo tanto, el sistema no es observable.

Ejemplo: Para el siguiente sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 3]x$$

determine el estado inicial desde el que comenzó a evolucionar en $t_0 = 0$ sabiendo que la entrada escalón unitario produce la salida

$$y(t) = -4e^{-3t} + 3e^{-2t} + 2e^{-t} + 1$$

hasta el instante $t = 0$.

Primero hay que calcular el Grammiano de observabilidad para saber si el sistema es observable o no.

$$V(t, 0) = \int_0^t \Phi^T(\tau, 0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, 0) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}) & \frac{3}{4}(1 - e^{-4t}) \\ \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}) & 1 - e^{-4t} & \frac{6}{5}(1 - e^{-5t}) \\ \frac{3}{4}(1 - e^{-4t}) & \frac{6}{5}(1 - e^{-5t}) & \frac{3}{2}(1 - e^{-6t}) \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es:

$$\det(V(t, 0)) = \frac{1}{1200} - \frac{e^{-12t}}{1200} + \frac{3e^{-10t}}{100} - \frac{2e^{-9t}}{15} + \frac{21e^{-8t}}{80} - \frac{6e^{-5t}}{25} - \frac{21e^{-4t}}{80} + \frac{2e^{-3t}}{15} - \frac{3e^{-2t}}{100}$$

Se puede comprobar fácilmente que el determinante no se anula salvo para $t = 0$ por lo que se puede afirmar que el sistema es observable para cualquier valor de t final del intervalo y en particular para $t = 2$.

Dado que el sistema si es observable entonces se puede calcular el estado inicial a partir de (9) con $\bar{y}(t)$ cómo se especifica en (8)

$$\bar{y}(t) = y(t) - \int_0^t C(\tau) \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = -3e^{-3t} + 2e^{-2t} + 3e^{-t}$$

entonces de (9)

$$X_0 = V^{-1}(t, 0) \int_0^t \Phi(\tau, 0) C^T(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

resultado que como era de esperarse es independiente del tiempo.
Tarea. Comprobar los cálculos.

4.2.2 Observabilidad para sistemas lineales invariantes

Teorema. Dado un sistema de dimensión n definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

es observable si y solo si la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ definida por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{(p \times n) \times n}$$

es de rango pleno, n .

Demostración:

- Condición necesaria

A partir de la expresión de la salida del sistema ante entrada nula, evolucionando desde un estado inicial genérico x_0 y aplicando el método Cayley Hamilton:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= C e^{A(t-t_0)} x_0 = C \left[I + A(t-t_0) + \frac{A^2}{2!} (t-t_0)^2 + \dots \right] x_0 \\ &= [\alpha_0(t)C + \alpha_1(t)CA + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}] x_0 \end{aligned}$$

sí en la matriz $\mathcal{O}$ no existen n filas linealmente independientes, sino que solo hay $r_o < n$, esto significa que dentro del espacio de dimensión n existe algún vector que es ortogonal a todas las filas de la matriz $\mathcal{O}$. Si a este vector se le llama x_o entonces

$$\bar{y}(t) = [\alpha_0(t)C + \alpha_1(t)CA + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}] x_o = 0$$

es decir, el sistema evoluciona con salida nula a partir del estado x_o .

- Condición suficiente

Se supone que existe un vector x_o , que es considerado como estado inicial y que produce una salida, ante entrada nula, cero:

$$\bar{y}(t) = C e^{A(t-t_o)} x_o = 0 \quad \forall t$$

derivando sucesivamente respecto al tiempo.

$$\left. \begin{array}{l} C e^{A(t-t_o)} x_o = 0 \\ CA e^{A(t-t_o)} x_o = 0 \\ CA^2 e^{A(t-t_o)} x_o = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1} e^{A(t-t_o)} x_o = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma e^{A(t-t_o)} x_o = 0$$

esto significa que $e^{A(t-t_o)} x_o$ es ortogonal a todas las filas de la matriz σ , por lo que no cubre todo el espacio, entonces el rango de σ es menor que n $r_o < n$.

Ejemplo. Analice la observabilidad de un sistema lineal invariante con:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad queda como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 18 & 8 & 24 \\ 0 & 17 & 18 \end{bmatrix} \quad r_o = 3 = 3 \Rightarrow \text{El sistema es observable}$$

Ejemplo. Establezca las condiciones bajo las cuales el sistema no es observable.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \ c_2] x$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & -6c_1 - 11c_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\sigma) = -6c_1^2 - 11c_1c_2 - c_1c_2 = -6c_1^2 - 12c_1c_2$$

para que no sea observable $\det(\sigma) = 0 \Rightarrow -6c_1^2 - 12c_1c_2 = 0$

$$-6c_1(c_1 - 2c_2) = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$c_1 = -2c_2$$

Ejemplo. Analice la observabilidad de una representación en la forma canónica observador.

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad C_o = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \sigma =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ -a_1^2 - a_2 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_o = 3 = n \Rightarrow \text{observable}$$

Ejemplo. Analice la observabilidad de una representación en la forma canónica observabilidad.

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} C_{ob} = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_o = 3 = n \Rightarrow \text{observable}$$

$$\sigma = I_n$$

4.2.3 Invarianza de la observabilidad cambio de base en sistemas LTI

Es importante destacar que la propiedad de observabilidad de un sistema (A, B, C, D) es independiente de la representación del estado, por lo que si se realiza un cambio $x = T\tilde{x}$, el rango de la nueva matriz σ es idéntico al de la matriz σ . Considere un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

con un cambio de base $x = T\tilde{x}$ se tiene

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$y(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t)$$

entonces

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = \sigma T$$

dado que la matriz T no es singular, el rango de $\mathcal{O}$ coincide con el de $\mathcal{O}$, por lo que la observabilidad se hereda del sistema original.

4.2.4 Subespacio no observable en sistemas LTI

De forma análoga a la controlabilidad, en el caso de que un sistema sea no observable es posible determinar el subespacio que si es observable y el subespacio que no es observable, de tal forma que dado un sistema lineal invariante definido por las ecuaciones de estado y de salida dadas por (A, B, C, D) el conjunto de puntos del espacio de estado tales que tomados como estado inicial ante entrada nula, la salida del sistema es permanentemente nula y denominados no observables, forman un subespacio vectorial que se denomina subespacio no observable.

Dado el sistema lineal invariante definido por las ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

con un subespacio no observable $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ de dimensión $n - r_{\bar{o}}$, siendo $r_{\bar{o}}(o) = r_{\mathcal{O}} < n$, existe una matriz de cambio de base T no singular con la que se puede hacer la transformación del vector de estado según la ecuación

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

de modo que el modelo de estado en el nuevo sistema de referencia es:

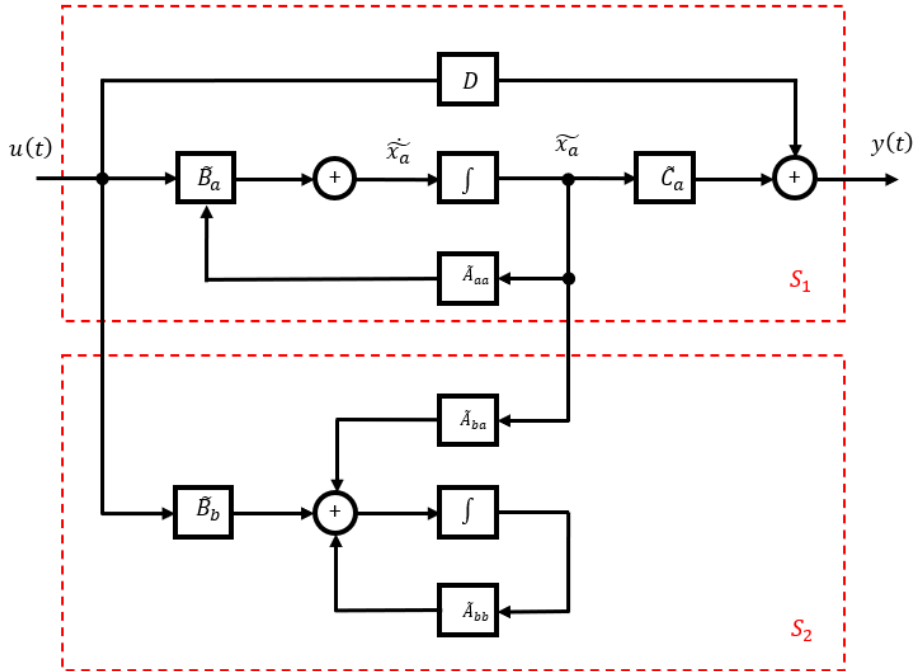
$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_a \\ \dot{\tilde{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\tilde{C}_a \quad 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}$$

de lo cual se puede verificar que el subsistema formado por las variables $\tilde{x}_a$, caracterizado por las matrices $(\tilde{A}_{aa}, \tilde{C}_a)$ es observable y de dimensión

r_o , mientras que el subsistema formado por las variables $\tilde{x}_0$ caracterizado por las matrices $(\tilde{A}_{aa}, 0)$ presenta una evolución del estado desacoplado de la salida del sistema por lo cual no es observable.

Es importante señalar que el modelo de estado que describe el comportamiento de las variables de estado observables genera la misma función de transferencia que el sistema original, es decir ante la misma entrada generan la misma salida.



La matriz de cambio de base que consigue esta separación se construye como

$$T = [T_a \quad T_b]$$

donde T_b esta formada por una base del subespacio no observable y T_a esta formada por r_o vectores cualesquiera que sean linealmente independientes entre sí y con los de la matriz T_b . Igualmente se puede construir otra matriz T a partir de

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

estando v_a formada por las primeras r_o filas linealmente independientes de σ y v_b por $n-r_p$ filas linealmente independientes entre si y con las de v_a .

Ejemplo. Para un sistema definido por las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad C = [4 \quad -2 \quad 2]$$

separar el sistema en la forma observable-no observable
Primero hay que determinar la matriz de observabilidad

$$\sigma = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 10 & -8 & 10 \\ 40 & -38 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(\sigma) = 2 \Rightarrow \text{no es observable}$$

usando las primeras dos filas linealmente independientes de σ y agregando otro

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 10 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que las matrices transformadas quedan como:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{C} = CT = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Ejemplo. Para el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Separar el sistema en la forma observable - no observable.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad r_\sigma = 2 \Rightarrow \text{no observable}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [1 \quad 0 \quad 0]$$

4.2.5 Observabilidad de sistemas no lineales

El problema de observabilidad de sistemas no lineales puede plantearse de la siguiente manera: *¿En qué condiciones es posible distinguir los estados iniciales de un sistema no lineal por medio de observar sus salidas?* Para lo cual es necesario establecer las definiciones de variables de estado no distinguibles o no detectables y observabilidad.

Sea y la salida de un sistema no lineal afín a la entrada u con estado inicial $x(0) = x_0$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

$$y_j = h_j(x) \quad j = 1, \dots, p$$

con $f, g_1, \dots, g_m$ son campos vectoriales suaves y $h_1, \dots, h_p$ son funciones reales.

Definición. Variables de estado no distinguibles o no detectables y sistema observable

Dos variables de estado $x_1, x_2 \in x$ se llaman no distinguibles (denotado por $x_1 I x_2$) para el sistema no lineal en la forma afín si para cada entrada admisible u , las salidas y en $t \geq 0$ son idénticas.

El sistema es observable si $x_1 I x_2$ implica que $x_1 = x_2$

Definición. Variables de estado v no distinguibles y estabilidad local

Sea $v \subset x$ un conjunto abierto con $x_1, x_2 \in v$. Las variables de estado x_1 y x_2 se dicen v no distinguibles (denotado por $x_1 I_v x_2$) si para cualquier control admisible constante u con las soluciones $x(t, 0, x_1, u)$ y $x(t, 0, x_2, u)$ permanecen en v para $t \leq T$ y sus salidas son iguales para $t \leq T$

El sistema no lineal en la forma afín se dice localmente observable en x_0 si existe una vecindad w de x_0 tal que para cualquier vecindad $v \in w$ de x_0 la relación $x_0 I_v x_1$ implica que $x_1 = x_0$. Si el sistema es localmente observable para cada x_0 entonces es localmente observable.

Definición. Espacio de observabilidad

El espacio de observabilidad θ del sistema no lineal en la forma afín es el espacio lineal de funciones en x que contiene $h_1, \dots, h_p$ y todas sus derivadas de Lie

$$L_{\tau_1} L_{\tau_2} \dots L_{\tau_k} h_j \quad j = 1, \dots, p \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $\tau_i \in \{g_0, g_1, \dots, g_m\} \quad i = 1, \dots, k$

Es importante remarcar que el espacio de observabilidad tiene la interpretación de que contiene las funciones de salida y todas sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema.

R. Hermann and A. Krener, Nonlinear Controllability and observability, IEEE TAC, 1977

Teorema. Considere el sistema no lineal en la forma afín con $\dim x = n$ y suponiendo que $\dim d\theta(x_0) = n$ donde

$$d\theta = \text{span}\{dH(x) | H \in \theta\} \quad x \in X$$

Entonces el sistema es localmente observable en x_0 .

Corolario. Una condición suficiente para un sistema en la forma no lineal en la forma afín sea localmente observable es que

$$\dim d\theta(x) = n \quad \forall \quad x \in X$$

Definición. Codistribución de observabilidad

La codistribución de observabilidad $d\theta$ de un sistema afín no lineal con un espacio de observabilidad θ se define como:

$$d\theta = \text{span}\{dH(x) | H \in \theta\} \quad x \in X$$

El rango de la codistribución de observabilidad puede determinarse usando un algoritmo similar al presentado para generar la distribución de controlabilidad $\Omega = \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$ la codistribución más pequeña invariante a $g_0, \dots, g_m$.

Algoritmo para construir la codistribución de controlabilidad.

1. Punto de inicio

$$\Omega_0 = \text{span}\{dh_1, \dots, dh_p\}$$

2. Desarrollando la codistribución de observabilidad

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \sum_{i=0}^m L_{g_i} \Omega_{k-1} \quad \text{con } g_0 = f$$

3. Criterio de finalización

Si existe un entero k^* tal que $\Omega_{k^*} = \Omega_{(k^*+1)}$ entonces

$$\Omega_{k^*} = \Omega_{k^*+1} = \langle g_0, \dots, g_m | \Omega_0 \rangle$$

La dimensión de la codistribución no singular Ω_{k^*} en x_0 es igual a la dimensión de la codistribución de observabilidad en x_0 .

Si la dimensión de la codistribución de observabilidad es estridentemente menor que n , entonces, es posible encontrar una transformación de coordenadas local que muestre las combinaciones no lineales no observables de las variables de estado.

*Es una operación definida entre un covector Ω y un campo vectorial f

$$L_{g_i} \Omega_{k-1} = g_i^T(x) \left(\frac{\partial \Omega_{k-1}^T(x)}{\partial x} \right)^T + \Omega_{k-1} \frac{\partial g_i}{\partial x}$$

Ejemplo. Para un sistema en la forma

$$\dot{\xi}_1 = f_1(\xi_1, \xi_2) + \sum_{i=1}^m g_{1i}(\xi_1, \xi_2) u_i$$

$$\dot{\xi}_2 = f_2(\xi_2) + \sum_{i=1}^m g_{2i}(\xi_2) u_i$$

$$y_i = h_i(\xi_2)$$

donde $\xi_1 = (z_1, \dots, z_d)$ y $\xi_2 = (z_{d+1}, \dots, z_n)$

Es evidente que la salida depende únicamente de ξ_1 y ξ_2 es indepen-

diente de ξ_1 . Por lo tanto, iniciando de un punto fijo inicial de ξ_2 y de cualquier punto arbitrario de ξ_1 y para cualquier entrada arbitraria u , el sistema produce exactamente la misma salida y por lo tanto no puede ser observable.

Ejemplo. Sistema LTI.

Analice la observabilidad de un sistema en la forma

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$y = Cx \quad y \in \mathbb{R}^p$$

Entonces $\Omega_0(x) = \text{span}\{d_{h_1}, \dots, d_{h_p}\} = \text{span}\left\{\frac{d}{dx}c_i x, \dots, \frac{d}{dx}c_p x\right\}$

donde

$c_1, \dots, c_p$ denota los renglones de C ; el primer paso del algoritmo

$$\Omega_1 = \Omega_0 + L_f \Omega_0 = \text{span}\{c_1, \dots, c_p, L_f c_1, \dots, L_f c_p\}$$

dado que

$$L_f c_i(x) = L_{Ax} c_i = c_i \frac{\partial Ax}{\partial x} = c_i A \quad \frac{\partial c_i}{\partial x} A x + \frac{\partial A_x}{\partial x} c_i$$

entonces

$$\Omega_1 = \text{span}\{c_1, \dots, c_p, c_1 A, \dots, c_p A\}$$

continuando de la misma manera, para $k \geq 1$

$$\Omega_k(x) = \text{span}\{c_1, \dots, c_p, c_1 A, \dots, c_p A, \dots, c_1 A^k, \dots, c_p A^k\}$$

$$\Omega_k(x) = I_m[C : CA : \dots : CA^k]$$

por lo tanto, de la condición de dimensión de la codistribución de observabilidad

$$\dim \Omega_k = \dim d\theta = n$$

entonces para que el sistema sea observable, la codistribución de observabilidad debe expandir todo $\mathbb{R}_n$

Ejemplo. Codistribución de observabilidad para un sistema bidimensional. Calcule la codistribución de observabilidad del siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} - x_1 u \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} - x_2 u \\ y &= -x_2\end{aligned}$$

Primero, del modelo se tiene

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} \\ 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{bmatrix} g(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad h(x) = [-x_2]$$

Para el paso inicial

$$\Omega_0(x) = \text{span}\{dh(x)\} = \text{span}[0 \quad -1]$$

para $g_0 = f$ y con Ω_0 hay que calcular $L_f \Omega_0(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
L_f \Omega_0(x) &= f^T(x) \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \right)^T + \Omega_0(x) \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} + 3e^{x_2} & 5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{x_1}} & 3e^{x_2} \\ +\frac{5}{x_1} e^{-\frac{1}{x_1}} + 5e^{-\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{5}{x_1} e^{-\frac{1}{x_1}} - 5e^{-\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -5x_1 e^{-\frac{1}{x_1}} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{d\theta}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{(5x_1+5)e^{-\frac{1}{x_1}}}{x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

para $x_1 \neq -1$

$$\dim \theta = 2 = n$$

$\Rightarrow$ el sistema es observable

continuando

$$\Omega_1(x) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{x_1} e^{-\frac{1}{x_1}} - 5e^{-\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\Omega_2(x)$ hay que calcular

$$\begin{aligned}
L_g \Omega_0(x) &= g^T(x) \frac{\partial \Omega_0(x)}{\partial x} + \Omega_0(x) \frac{\partial g}{\partial x} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Omega_2 = \text{span} \{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \}
\end{aligned}$$

$\dim \Omega_2 = \Omega_1$ entonces $\Omega_1 = \theta = 2 = n \Rightarrow$ es observable

4.2.6 Simplificación del criterio de observabilidad para sistemas autónomos

Considérese un sistema no lineal sin entradas como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

Diferenciando la salida

$$y(t) = h(x(t))$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial}{\partial t} h(x(t)) = \frac{\partial h(t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) \triangleq L_f h(x)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x) \triangleq L_f^2 h(x)$$

⋮

$$y^{(k)}(t) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x} f(x) \triangleq L_f^k h(x)$$

donde $L_f^k h(x)$ son las derivadas de Lie de la función $h(\cdot)$ a lo largo de las trayectorias del campo vectorial $f(\cdot)$

Entonces el espacio de observabilidad del sistema autónomo al tiempo t , equivale a:

$$\theta = \begin{bmatrix} h(t) \\ L_f h(t) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(t) \end{bmatrix}$$

el cual deberá separar los puntos de cualquier subconjunto físico $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tal que para cualquier $x_1, x_2 \in \Omega$ exista el índice $i \in (0, \dots, n-1)$ tal que

$$L_f^i h(x_1) \neq L_f^i h(x_2)$$

En otras palabras, las variables de estado del sistema autónomo son observables, si la matriz de observabilidad correspondiente

$$\sigma = \frac{d\theta}{dx}$$

es no singular para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $t \geq 0$, es decirse satisface la condición de rango

$$\dim \sigma = n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo. Sistema LTI

Analice la observabilidad, mediante el método simplificado para un sistema en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^p$

Del sistema $f(\cdot) = Ax$ y $h(\cdot) = Cx$ Para obtener el espacio de observabilidad

$$\theta = \begin{bmatrix} h(t) \\ L_f h(t) \\ L_f^2 h(t) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(t)}{\partial x} f(x) \\ \frac{\partial L_f h(t)}{\partial x} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h(t)}{\partial x} f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Cx}{\partial x} Ax \\ \frac{\partial Cx}{\partial x} Ax \\ \frac{\partial CAx}{\partial x} Ax \\ \vdots \\ \frac{\partial CA^{n-2}x}{\partial x} Ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ CAx \\ CA^2x \\ \vdots \\ CA^{n-1}x \end{bmatrix}$$

entonces para obtener la matriz de observabilidad

$$\sigma = \frac{d\theta}{dx} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, el sistema será observable si $\dim \sigma = n$

Ejemplo. Analice la observabilidad, mediante el método simplificado para un sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1^3\end{aligned}$$

del sistema $f = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $h = x_1^3$ por lo tanto el espacio de observabilidad es:

$$\theta = \begin{bmatrix} h(x, t) \\ L_f h(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\cdot) \\ \frac{\partial h}{\partial x} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 3x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3x_1^2 x_2$$

$$\frac{dh}{dx} f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3x_1^2 x_2$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{d\theta}{dx} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 6x_1 x_2 & 3x_1^2 \end{bmatrix}$$

entonces el sistema es observable $\forall x_1 \neq 0$

Ejemplo. Analice controlabilidad y observabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x}_1 = x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$h(x) = x_1$$

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = [f, g]$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 \\ 0 & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } x_2 \neq 0 \quad \text{el sistema es controlable}$$

Observabilidad

$$\theta = \begin{bmatrix} h(t) \\ L_f h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$L_f h(t) = \frac{\partial h(t)}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2^2$$

$$\sigma = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix} \quad \text{con } x_2 \neq 0 \quad \text{el sistema es observable}$$

Ejemplo. Analice controlabilidad y observabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^2}{2} + e^{x_2} + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + au$$

$$y = bx_1$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{2} + e^{x_2} + x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \quad h(x) = x_1$$

Controlabilidad

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

$$= 0 - \begin{bmatrix} x_1 & e^{x_2} + 1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{x_2} - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -e^{x_2} - 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \quad \dim \Delta_1 = 2 = n \quad \Rightarrow \quad \text{controlable para } a \neq 0$$

Observabilidad

$$\theta = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx_1 \\ \left(\frac{x_1^2}{2} + e^{x_2} + x_2\right)b \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{d\theta}{dx} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ bx_1 & be^{x_2} + b \end{bmatrix}$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$$

$$= [b \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{2} + e^{x_2} + x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{x_1^2}{2} + e^{x_2} + x_2\right)b$$

$$\dim \sigma = 2 = n \quad \Rightarrow \quad \text{observable para } b \neq 0$$

4.3 Descomposición general de sistemas no controlables no observables en sistemas LTI

Para el caso de sistemas no controlables y no observables es posible realizar de forma simultánea la separación de la parte observable de la no observable y la parte controlable de la no controlable.

Dada la expresión del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

existe una matriz T no singular con la que se puede hacer un cambio de base $x(t) = T\tilde{x}(t)$, de modo que el sistema en las nuevas variables de estado $\tilde{x}$ quede definido por las matrices:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 & \tilde{A}_{ac} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} & \tilde{A}_{bc} & \tilde{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{dc} & \tilde{A}_{dd} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [\tilde{C}_a \quad 0 \quad \tilde{C}_c \quad 0]$$

de lo cual se verifica que:

1. El subsistema formado por las variables $\tilde{x}_a$ y caracterizado por las matrices $(\tilde{A}_{aa}, \tilde{B}_a, \tilde{C}_a)$ es un subsistema controlable y observable.
2. El subsistema formado por las variables $(\tilde{x}_a, \tilde{x}_b)$ y caracterizado por las matrices

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & 0 \\ \tilde{A}_{ba} & \tilde{A}_{bb} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix}, [\tilde{C}_a \quad 0] \right)$$

es un subsistema controlable, formando el resto de las variables $(\tilde{x}_b, \tilde{x}_d)$ un subsistema con comportamiento desacoplado de las salidas.

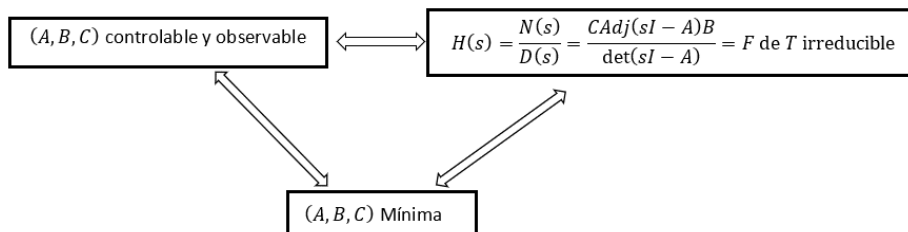
3. El subsistema formado por las variables $(\tilde{x}_a, \tilde{x}_b)$ y caracterizado por las matrices

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{A}_{aa} & \tilde{A}_{ac} \\ 0 & \tilde{A}_{cc} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, [\tilde{C}_a \quad \tilde{C}_c] \right)$$

es un subsistema observable, formando el resto de las variables $(\tilde{x}_b, \tilde{x}_d)$ un subsistema con comportamiento desacoplado de las salidas.

Estos tres subsistemas generan la misma función de transferencia que el sistema original, es decir son tres realizaciones diferentes de un mismo sistema en términos entrada-salida.

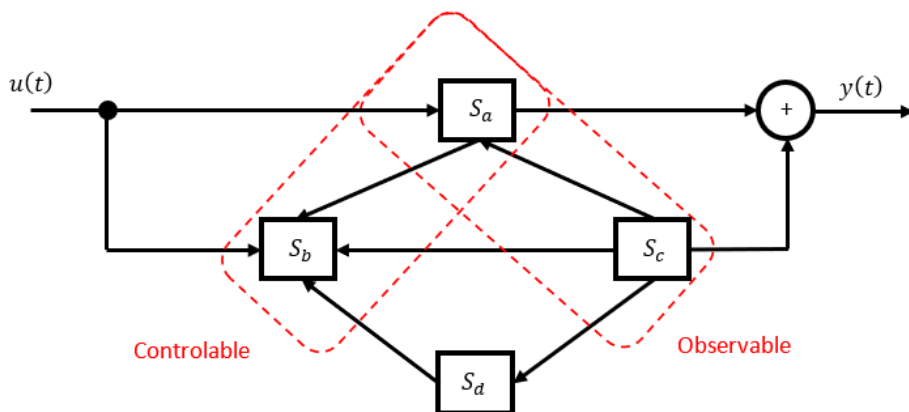
En resumen, los subsistemas descritos en los puntos 2 y 3 respectivamente, son los estudiados anteriormente. En cuanto al subsistema descrito en el punto 1 presenta una particularidad; este subsistema es el de mínima dimensión que puede modelar la relación entre la entrada y la salida del sistema, por lo que se le conoce como realización mínima del sistema.

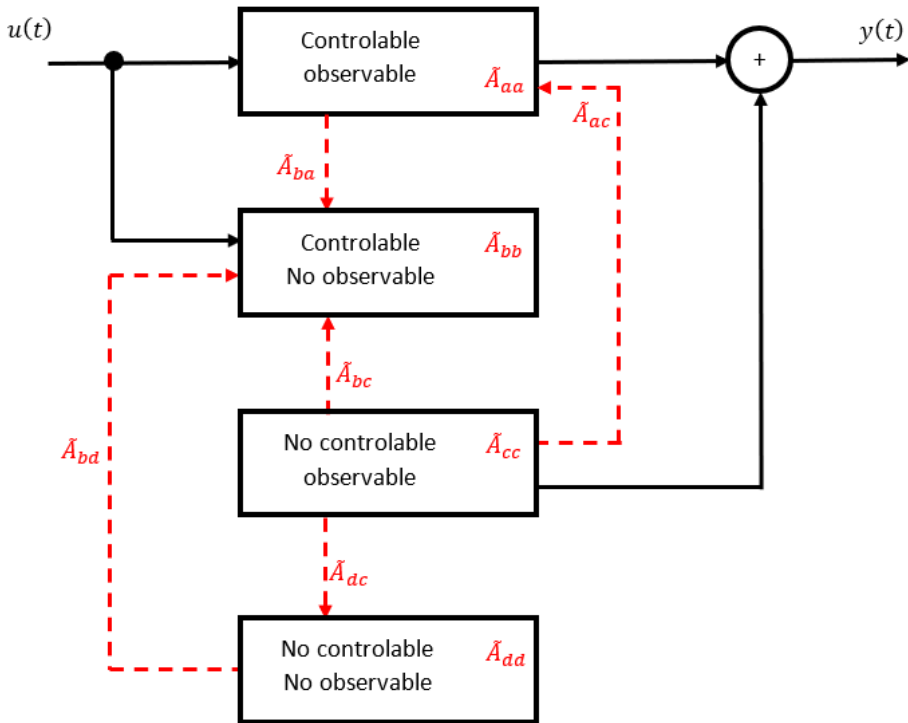


Existe un teorema, debido a Kalman, que caracteriza la realización mínima de un sistema en términos de controlabilidad y observabilidad:

Una realización dada por (A, B, C, D) es mínima si y solo si es controlable y observable.

En general y como ya se ha comentado anteriormente, un sistema lineal e invariante no posee una única realización en el espacio de estado. Sin embargo, las representaciones mínimas son únicas salvo por un cambio de base; en otras palabras, cualquier par de realizaciones mínimas están relacionadas por una transformación lineal.





Dado un sistema $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ o $\dot{x} = Ax + Bu$ se desea:

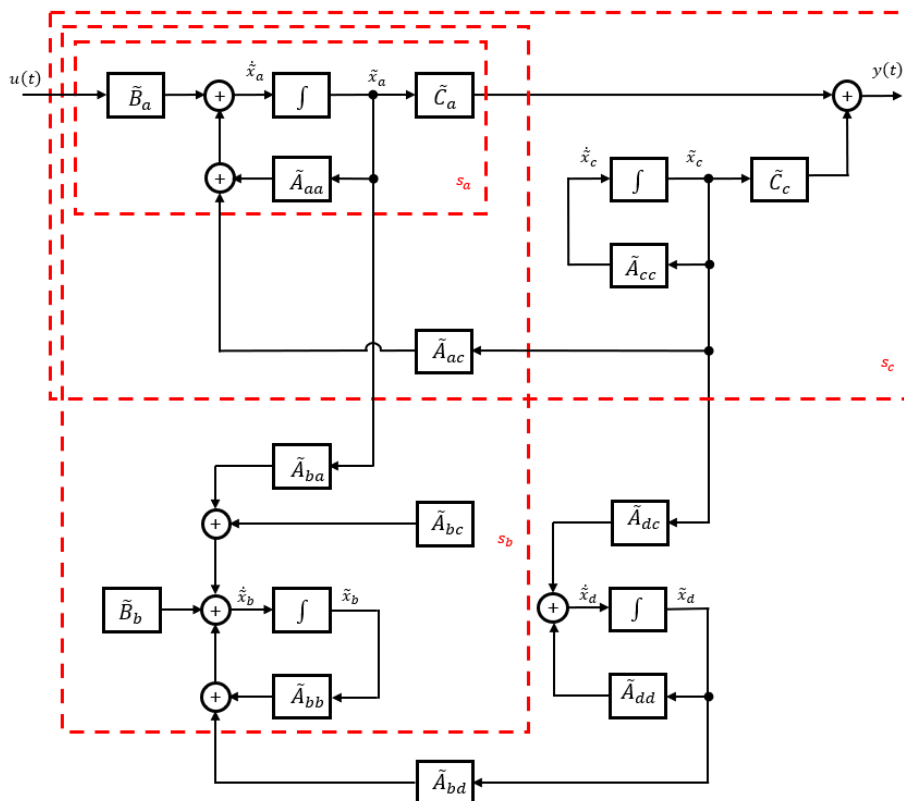
- Calcular qué estados pueden ser “alcanzados” desde el origen con una cierta energía u , $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2}$ o $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u_k^T u_k}$
Los estados que no pueden ser alcanzados

Los estados que no pueden ser alcanzados $\begin{cases} \text{¿ Pueden eliminarse (reducción de orden)?} \\ \text{¿ Deben modificarse los actuadores para ser alcanzables?} \end{cases}$

Dados los sensores $y = Cx$ para el sistema:

- ¿Qué estados x_n producen más variación en la salida
 $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2}$ o $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y_k^T y_k}$?

Los estados cuyo efecto sobre la salida sea muy pequeño $\begin{cases} \text{¿ Pueden eliminarse (reducción de orden)?} \\ \text{¿ Deben modificarse los sensores para poder observarlos?} \end{cases}$



Analizando los esquemas anteriores se tiene que:

- Existe un subsistema que es controlable y observable S_a , que describe la realización mínima del sistema.
- Existe un subsistema que junto al anterior forma un subsistema controlable, pero separado del anterior porque es no observable S_b (desconectado de la salida)
- Existe un subsistema que junto al primero es observable, está desconectado de la entrada y en consecuencia no es controlable S_c .
- Finalmente, existe un subsistema que no es observable ni controlable ya que está desconectado tanto de la entrada como de la salida S_d .

4.3.1 Cálculo de la matriz de cambio de base en sistemas LTI

La matriz de cambio de base que realiza la separación en subsistemas anteriormente descrita está formada por cuatro sub matrices:

$$T = [T_a \quad T_b \quad T_c \quad T_d]$$

Desde el punto de vista práctico, las distintas submatrices que componen la matriz T se calculan en el siguiente orden:

- 1) T_b : base del subespacio de intersección entre el subsistema no observable y el subsistema controlable.
- 2) T_a : conjunto de vectores columna tales que juntamente con T_b forman una base del subespacio controlable.
- 3) T_d : conjunto de vectores columna tales que conjuntamente con T_b forman una base del subespacio no observable.
- 4) T_c : conjunto de vectores columna tales que juntamente con T_a , T_b y T_c , forman una base del espacio de estado.

Por lo que resulta evidente que la dimensión del subsistema controlable y observable coincide con el número de vectores columna de T_a , la dimensión del subsistema controlable r_c coincide con el número de vectores columna de $[T_a : T_b]$ y la dimensión del subsistema observable r_o , coincide con el número de vectores columna de $[T_a : T_c]$

Ejemplo. Separar en sus partes controlable y observable el sistema dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = [-3 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 5]$$

Primero es necesario conocer las dimensiones de los subespacios controlable y observable, para lo cual se requiere el cálculo de las matrices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente:

$$C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 9 & -15 \\ 3 & -4 & 6 & -10 & 18 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & -11 & 17 \\ -2 & 5 & -5 & 11 & -17 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(C) = 3$$

como $r_c = 3$ solo hay tres vectores columna linealmente independiente, sirviendo estos como base del espacio controlable.

$$B_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

en cuanto a la observabilidad

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ -6 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ -12 & 6 & 8 & 0 & 14 \\ -24 & -6 & 32 & 0 & 26 \\ -48 & 18 & 32 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{rango}(\sigma) = 3$$

como $r_\sigma = 3$, la dimensión del subespacio no observable es 2. Para calcular la base del subespacio no observable se recurre a obtener el núcleo de la transformación lineal definida por la matriz de observabilidad obteniéndose así la base del subespacio no-observable.

$$B_{\bar{o}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{null}(\sigma)$$

para calcular la matriz de separación de la parte observable y controlable es necesario calcular la intersección entre los subespacios controlable y no

observable, por lo que hay que calcular la dimensión de dicha intersección

$$\text{rango}[T_a : T_b] = \text{rango} \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 4 \Rightarrow \text{Intersección de dimensión 1}$$

y sabiendo que la dimensión es 1, se plantea la ecuación

$$\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{c_1} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}}_{c_2} + \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}}_{c_3} + \mu \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{c_4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{-c_5}$$

$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = -\mu c_4 - c_5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de lo que resulta $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = -\frac{1}{4}$ $\gamma = -\frac{1}{4}$ y $\mu = -1$ por lo que una base del espacio de intersección entre la parte controlable y la parte no observable es:

$$B_c \cap B_{\bar{o}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{Multiplicar las cuatro columnas linealmente independientes por el vector de los coeficientes encontrados}$$

con toda esta información, ya se pueden identificar las distintas sub matrices que componen la matriz de transformación que realiza la separación:

$$1) T_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{Intersección del espacio controlable y no observable}$$

$$2) T_a = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 2 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Junto a } T_b \text{ es base del subespacio controlable}$$

$$3) T_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Junto a } T_b \text{ es base del subespacio no observable}$$

$$4) T_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Resto de la base del espacio de estado}$$

Lo que da como resultado la matriz de transformación

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & \frac{7}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta matriz se realiza la separación en los distintos subsistemas, quedando:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = CT = [3 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 0]$$

Tomando la realización controlable-observable se puede calcular $G(s)$ como

$$G(s) = C_a(sI - A_{aa})^{-1}B_a = \frac{3(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$

y tomando la realización original

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{3(s+1)(s-2)(s+1)^2}{(s+2)(s-1)(s+1)^2(s-2)} = \frac{3(s+1)}{(s+2)(s-1)}$$


Ejemplo. Para el siguiente sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

realice la descomposición general

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_c = 1 \Rightarrow \text{base del subespacio controlable} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad r_o = 2 \Rightarrow \text{base del subespacio no observable} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con esta información ya se puede calcular la matriz $T = [T_a : T_b : T_c : T_d]$

1) T_b : intersección del subespacio controlable con el no observable $T_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) T_a : junto con T_b forma una base del subespacio controlable (no existe)

3) T_d : junto con T_b forma una base del subespacio no observable (no existe)

4) T_c : completa la base del espacio de estado $T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

entonces

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

- Controlable y observable: no existe
- Controlable $[-1][1][0]$
- No observable $[-1][1][0]$
- No controlable $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1]$
- Observable $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1]$

4.4 Principio de dualidad

Sea el sistema $\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ y su sistema dual definido por $\Sigma_1 \begin{cases} \dot{x} = A^T x + C^T u \\ y = B^T \end{cases}$

1. El sistema Σ_1 es controlable si y solo si Σ_2 es observable

2. El sistema Σ_2 es observable si y solo si Σ_1 es controlable

$$\mathcal{C}(\Sigma_1) = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

$$\sigma(\Sigma_2) = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Es decir, las propiedades de controlabilidad y observabilidad son duales.

Capítulo 5

Estabilidad

Los sistemas son diseñados para realizar alguna tarea o para procesar señales. Si un sistema no es estable, puede quemarse, desintegrarse o saturarse cuando una señal, no importa que tan pequeña, sea aplicada. Por lo tanto, un sistema inestable es inútil en la práctica y por lo tanto la estabilidad es un requerimiento básico para todos los sistemas. Además de la estabilidad, los sistemas deben poseer otros requerimientos, tal como seguir trayectorias deseadas, eliminar ruidos, etc., para poder ser realmente útiles en la práctica.

La respuesta de los sistemas lineales siempre puede descomponerse en respuesta a estado-cero. Por lo que, el estudio de la estabilidad de estos dos tipos de respuesta también se puede realizar por separado. De tal forma que la estabilidad tipo BIBO (Bounded Input Bounded Output) es para la respuesta estado-cero. Comúnmente se les conoce como estabilidad externa e interna, respectivamente.

Estabilidad interna $\rightarrow$ Estabilidad externa

5.1 Estabilidad externa (entrada-salida)

Considere un sistema SISO, lineal invariante en el tiempo descrito por:

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

donde $g(t)$ es la respuesta al impulso o la salida del sistema ante una entrada tipo impulso aplicada en $t = 0$. Además de ser lineal, invariante en el tiempo se considera que el sistema es causal e inicialmente relajado en $t = 0$.

Por otra parte, se dice BIBO estable (estable entrada acotada salida acotada) si cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Esta estabilidad está definida por la respuesta estado-cero y es aplicable si el sistema está inicialmente relajado.

Teorema. Un sistema SISO descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

es BIBO estable si y solo si $g(t)$ es absolutamente integrable en $[0, \infty]$ o

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \leq M < \infty$$

Para alguna constante M

Demostración “SI”

Primero se mostrará que si $g(t)$ es absolutamente integrable entonces toda entrada acotada produce una salida acotada. Sea $u(t)$ una entrada arbitraria con $|u(t)| \leq U_m < \infty \forall t \geq 0$. Entonces

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty g(\tau)u(t - \tau)d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)||u(t - \tau)|d\tau \leq U_m \int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \leq U_m M$$

Entonces la salida está acotada

“SOLO SI”

Ahora mostraremos que si $g(t)$ no es absolutamente integrable, entonces el sistema no es BIBO estable. Si $g(t)$ no es absolutamente integrable, entonces para algún valor arbitrariamente grande N , existe un t_1 tal que

$$\int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau \geq N$$

Suponiendo que

$$U(t_1 - \tau) = \text{sign}(g(\tau)) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\tau) \geq 0 \\ -1 & \text{si } g(\tau) < 0 \end{cases}$$

claramente $u(t_1 - \tau)$ es acotada. La salida producida por esta entrada es:

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau)u(t_1 - \tau)d\tau = \int_0^{t_1} |g(\tau)|d\tau \geq N$$

debido a que $y(t_1)$ puede ser arbitrariamente grande, por lo tanto, una entrada acotada produce una salida no acotada si el sistema no es absolutamente integrable.

Teorema. Un sistema SISO con función de transferencia racional y propia $G(s)$ es BIBO estable si y solo si cualquier polo de $G(s)$ tiene una parte real negativa, o equivalentemente, se encuentra dentro de la mitad izquierda del plano s .

Si $G(s)$ tiene un polo p_i con multiplicidad m_i , entonces su expansión en fracciones parciales contiene los siguientes factores

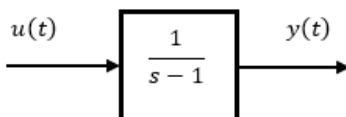
$$\frac{1}{s-p_i}, \quad \frac{1}{(s-p_i)^2}, \dots, \quad \frac{1}{(s-p_i)^{m_i}}$$

entonces la transformada inversa de Laplace de $G(s)$ o la respuesta al impulso contiene los factores

$$e^{p_i t}, te^{p_i t}, \dots, t^{m_i-1}e^{p_i t}$$

por lo tanto, se puede verificar que cada uno de estos términos es absolutamente integrable si y solo si p_i tiene una parte real negativa. Por lo cual es posible establecer este teorema.

Ejemplo. Considere el sistema.



con $u(t)=3e^{-2t} - 2e^{-t}$ analice su estabilidad entrada-salida

$$u(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)u(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}\right)\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$p_1 = -1 \quad p_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Estable}$$

5.2 Estabilidad interna

La estabilidad tipo BIBO se define para la respuesta estado-cero. Ahora se definirá la estabilidad interna para la respuesta entrada-cero.

Definición. El sistema (A,B,C) se dice internamente estable o asintóticamente estable si la solución de $\dot{x}(t)=Ax(t), x(0) = x_0$, tiende a cero, conforme $t \rightarrow \infty$ para cualquier condición inicial x_0

Es importante señalar que:

Estabilidad interna $\rightarrow$ Estabilidad externa

Teorema. El sistema (A,B,C) es internamente estable si y solo si la parte de los valores propios de A es negativa.

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}x_0$$

$$\Rightarrow \text{Expansión en términos del tipo } \frac{a}{(s-\lambda)} \rightarrow ae^{\lambda t}$$

$$\text{o del tipo } \frac{a}{(s-\lambda)^k} \rightarrow at^{k-1}e^{\lambda t}$$

con λ los valores propios de A

en ambos casos la respuesta en el tiempo tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$ sí y solo si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Nota: Cualquier polo del sistema es un valor propio de A pero no al revés

Polos= Raíces del sistema

Modos= Valores propios de la matriz A

Para sistemas en representación mínima (controlables y observables)

Estabilidad interna = Estabilidad externa

Definición. Un sistema no controlable se dice estabilizable si además de no controlable es estable.

Definición. Un sistema no observable se dice detectable si la parte no observable es estable.

5.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

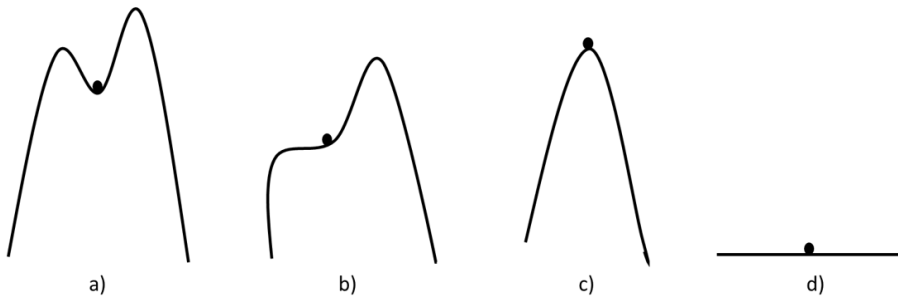
La teoría de estabilidad juega un papel central en la teoría de sistemas e ingeniería. Existen diferentes problemas de estabilidad que surgen del estudio de sistemas dinámicos. En esta sección se hablará exclusivamente de la estabilidad de puntos de equilibrio, la cual típicamente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, un matemático ruso e ingeniero a quien se le atribuyen las bases de la teoría que lleva su nombre.

Un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que inician en su vecindad permanecen en su vecindad, en otro caso es inestable. Es asintóticamente estable si todas las soluciones que inician en su vecindad no solo permanecen en la misma, sino que se aproximan al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito.

Los teoremas de estabilidad de Lyapunov, proveen de condiciones suficientes de estabilidad y estabilidad asintótica. Sin embargo, no establecen las condiciones que son necesarias. El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov puede ser utilizado para mostrar la acotación de una solución aun cuando el sistema no tenga puntos de equilibrio.

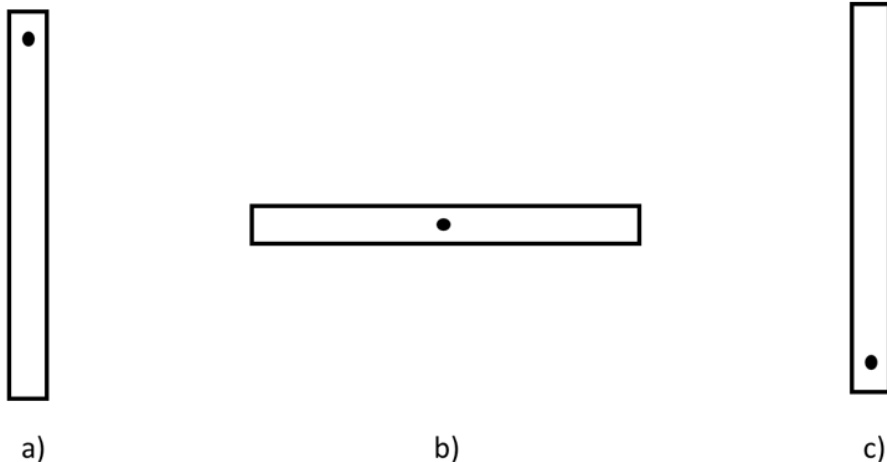
Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están presentes en la vida cotidiana. Es de uso común decir: “el euro es estable, el peso mexicano es inestable”, “el estado de salud de determinada persona es estable”, etc. Incluso en muchas áreas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva, es común escuchar a un ingeniero civil, decir que una estructura es estable o no lo es, a un químico decir que una reacción se ha estabilizado, un economista suele mencionar que el precio de determinado producto es estable, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable, etc. Por lo que un concepto que aparece frecuentemente en todas las ciencias, merece ser definido en términos precisos.

Ejemplo. Una canica que se mueve bajo la acción de la gravedad sobre las siguientes superficies.



- a) Asintóticamente estable, se mantiene en su posición a pesar de pequeñas perturbaciones.
- b) Asintóticamente estable, se mantiene en su posición a pesar de pequeñas perturbaciones.
- c) Inestable, cualquier perturbación por pequeña que sea la saca del punto de equilibrio.
- d) Estable (no asintóticamente), cualquier perturbación la aleja de su posición original, permanece cerca pero no trata de regresar.

Ejemplo. Considere el caso de una regla clavada a la pared en diferentes posiciones



- a) Estabilidad asintótica
b) Estabilidad no asintótica
c) Inestabilidad

5.3.1 Sistemas autónomos continuos en el tiempo

Considérese el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Supóngase $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio, es decir $f(\bar{x}) = 0$. El objetivo es caracterizar y analizar la estabilidad de $\bar{x}$. Por conveniencia y sin pérdida de generalidad se considera que el punto de equilibrio se localiza en el origen de $\mathbb{R}^n$, es decir $\bar{x} = 0$, por lo tanto $f(x)$ satisface que $f(0) = 0$ y se analizará la estabilidad en el origen.

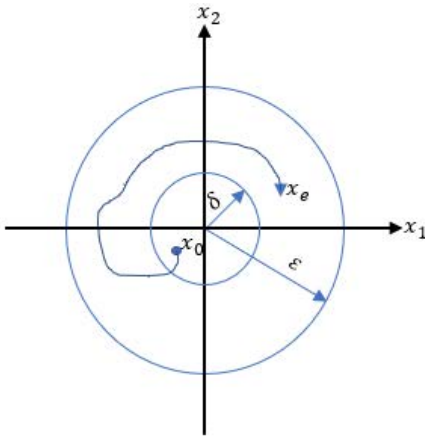
Definición. El punto de equilibrio $x = 0$ de (1) es:

- Estable, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

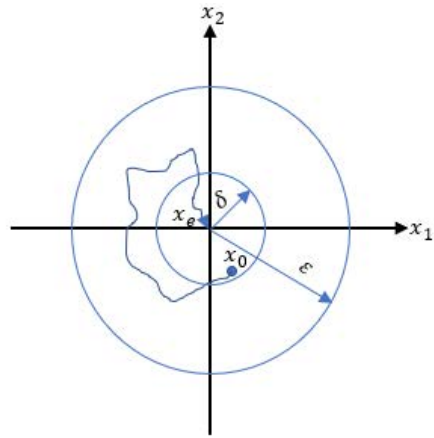
$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

- Inestable, si no es estable
- Asintóticamente estable, si es estable y δ puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$



Punto de equilibrio estable



Punto de equilibrio asintóticamente estable

Hassan K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, Second edition, 1996

Teorema. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (1) y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene $x = 0$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (3)$$

Entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (4)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable

Una función continuamente diferenciable $V(x)$ que satisface (2) y (3) es llamada función de Lyapunov.

La superficie $V(x) = c$ para algún $c > 0$ se le llama superficie de Lyapunov o una superficie de nivel.

Es posible replantear el teorema de Lyapunov de la siguiente manera: El origen es estable si existe una función continuamente diferenciable definida positiva $V(x)$ tal que su derivada $\dot{V}(x)$ es semi definida negativa y es asintóticamente estable si su derivada $\dot{V}(x)$ es negativa definida.

El teorema de Lyapunov solo establece condiciones suficientes. El hecho de que falle la función candidata de Lyapunov, no significa que el punto de equilibrio no sea estable, solo significa que no se puede probar esa característica con esa función candidata de Lyapunov.

5.3.2 Sistemas autónomos discretos en el tiempo

Considérese el sistema autónomo

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (5)$$

donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con $f(0)=0$

Definición. El punto de equilibrio $x = 0$ de (5) es:

- Estable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \varepsilon \quad \forall k \geq 0$$

- Inestable, si no es estable.
- Asintóticamente estable, si es estable y δ puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

Teorema. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para (5) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene $x = 0$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (6)$$

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (7)$$

Entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$\Delta V(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (8)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

En este caso el teorema de Lyapunov para sistemas discretos se puede replantear como: El origen es estable si existe una función $V(x)$ definida positiva tal que su primera diferencia $\Delta V(x)$ es semi definida negativa y es asintóticamente estable si su primera diferencia $\Delta V(x)$ es definida negativa.

Ejemplo. Para el siguiente sistema analice la estabilidad del origen.

$$\dot{x} = Ax$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x \quad \text{entonces}$$

$$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} = x^T Ax$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{con} \quad \lambda_A \leq 0$$

$$\text{con } \lambda_A < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sistema asintóticamente estable}$$

$$\text{con } \lambda_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sistema marginalmente estable}$$

Ejemplo. Considere un sistema lineal de la forma

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Analice la estabilidad de $x = 0$ como punto de equilibrio

$$V(k) = x^T(k)Px(k) \text{ con } P = P^T > 0$$

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k)\end{aligned}$$

Evaluando en las trayectorias de $x(k+1)$

$$\begin{aligned}\Delta V(k) &= [Ax(k)]^T P[Ax(k)] - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)A^T P A x(k) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)[A^T P A - P]x(k)\end{aligned}$$

Si $P = P^T = I$ entonces $\Delta V(k) = x^T(k)[A^T A - I]x(k)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^T A - I &\leq 0 \Rightarrow \lambda_A^2 \leq 1 \\ \Rightarrow \lambda_A &\leq \|1\|\end{aligned}$$

o bien

sea $A^T P A - P = -Q$, entonces

$\Delta V(k) = -x^T(k)Qx(k) \Rightarrow \Delta V(k) \leq 0 \forall Q \geq 0 \Rightarrow$ El sistema es estable.

Ejemplo. Para el siguiente sistema analice la estabilidad del origen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

Considerando

$$\begin{aligned}V(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\end{aligned}$$

evaluando las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1(-x_1 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_2^3) \\
&= -2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^4 \\
&= -2x_1^2 - 2x_2^4 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo cual el origen es asintóticamente estable.

Ejemplo. Para el siguiente sistema analice la estabilidad del origen.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_2
\end{aligned}$$

Considerando una función cuadrática como candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V &= x_1^2 + x_2^2 \\
\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2
\end{aligned}$$

evaluando en las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1(-x_1 + x_1x_2) + 2x_2(-x_2) \\
&= -2x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 2x_2^2 \\
&= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^2x_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2x_2
\end{aligned}$$

cerca del origen el término $-2(x_1^2 + x_2^2)$ domina por lo cual, el origen es localmente asintóticamente estable.

Ejemplo. Considere el sistema

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k)x_2^2(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k)x_1^2(k)
\end{aligned}$$

donde el estado satisface $(x_1(k) \ x_2(k))^2 < 1$

Seleccionando la función candidata de Lyapunov como

$$V(k) = x_1^2(k) + x_2^2(k)$$

lo que es una realización directa de una función de energía con

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$

evaluando a lo largo de las trayectorias de $x_1(k+1)$ y $x_2(k+1)$

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= x_1^2(k)x_2^4(k) + x_2^2(k)x_1^4(k) - x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= x_2^2(x_1^2x_2^2 - 1) + x_1^2(x_1^2x_2^2 - 1) \\ &= -(-x_1^2x_2^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Aplicando la restricción de las variables de estado $(x_1(k) \ x_2(k))^2 < 1$ el sistema es localmente estable.

Ejemplo. Considere el sistema

$$\dot{x} = -g(x)$$

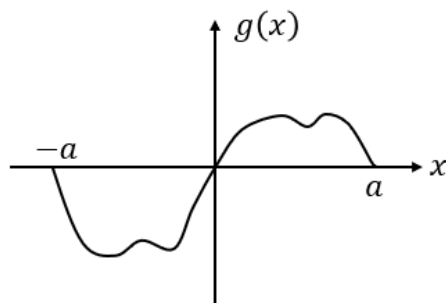
donde $g(x)$ es localmente Lipschitz en $(-a, a)$ y satisface

$$g(0) = 0: \ xg(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0 \quad x \in (-a, a)$$

Condición Lipschitz

$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\| \quad \forall (t, x), (t, y) \text{ con } L \in \mathbb{R}^+ \text{ constante de Lipschitz}$

$g(x)$ puede tener una forma como:



dado que $g(0) = 0 \Rightarrow$ el sistema tiene un solo punto de equilibrio estable en el origen

Considere la función

$$V(x) = \int_0^x g(y)dy \quad \forall \quad x \in (-a, a) \quad \text{con } V(0) = 0 \quad \text{y } V(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$$

es una función candidata de Lyapunov válida. Calculando su primera derivada

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = g(x)(-g(x)) = -g^2(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (-a, a) \quad \text{con } x \neq 0$$

entonces por el teorema de Lyapunov, el origen es asintóticamente estable.

Ejemplo. Para el siguiente sistema, use una función cuadrática candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del origen.

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

considere

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$= -x_1^2 - x_1 x_2^2 - x_2^2$$

alrededor del origen el término $-x_1^2 - x_2^2$ domina entonces el origen es localmente asintóticamente estable.

Ejemplo

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

considere

$$V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 \quad a > 0 \quad b > 0 \quad V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) = 2ax_1\dot{x}_1 + 2bx_2\dot{x}_2$$

$$= 2ax_1(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2bx_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$= 2[ax_1(x_1 - x_2) + bx_2(x_1 + x_2)](x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

con $a = b$

$$\dot{V}(x) = -2a(x_1^2 + x_2^2) \left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right)$$

para $x_1^2 + x_2^2 < 1$ $\dot{V}(x)$ es definido negativo, entonces el origen es localmente asintóticamente estable.

Ejemplo. Considere el sistema

$$x_1(k+1) = x_1(k) \left(\sqrt{x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2} \right)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) \left(\sqrt{x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2} \right)$$

Considerando la función candidata de Lyapunov

$$V(k) = x_1^2(k) + x_2^2(k)$$

su primera deferencia está dada por

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$

evaluándola a lo largo de las trayectorias de x_1 y x_2

$$\Delta V(k) = (x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2)x_1^2(k) + x_2^2(k)(x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$

$$\Delta V(k) = (x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2)(x_1^2(k) + x_2^2(k)) - (x_1^2(k) + x_2^2(k))$$

$$= -(x_1^2(k) + x_2^2(k))[1 - x_1^2(k) - x_2^2(k) + 2]$$

$$= -(x_1^2(k) + x_2^2(k))(3 - x_1^2(k) - x_2^2(k))$$

La cual es negativa a lo largo de

$$\|x(k)\| = x_1^2(k) + x_2^2(k) < 3$$

Lo que prueba estabilidad local.

Ejemplo. Considere la ecuación del péndulo sin fricción

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1$$

Sea $V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ la función candidata de Lyapunov seleccionada con $V(x) > 0$ y $V(0) = 0$ para $-2\pi < x_1 < 2\pi$

Entonces la primera derivada de $V(x)$ está definida por:

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 + \frac{g}{l} x_2 \sin x_1$$

$$\dot{V}(x) = 0$$

por lo que se puede concluir que el origen es estable, dado $\dot{V}(x) = 0$ no es posible concluir que el origen sea asintóticamente estable. Todas las trayectorias que inician en una superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se mantienen en dicha superficie y esto coincide con el retrato de fase.

Ejemplo. Considere la ecuación del péndulo con fricción.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2\end{aligned}$$

Tomando la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{g}{l} (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 \quad \text{con } V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \forall \quad -2\pi < x_1 < 2\pi$$

su primera derivada es

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{k}{m} x_2^2 < 0 \quad \text{nota } \dot{V}(x) \text{ no depende de todas las variables de estado}$$

$\dot{V}(x)$ es semidefinido negativa, no es definida negativa ya que $\dot{V}(x) = 0$ para $x_2 = 0$ independientemente del valor de x_1 , es decir $\dot{V}(x) = 0$ a lo largo del eje x_1 por lo que solo se puede concluir que el origen es estable lo que no coincide con el diagrama de fase que indica que el origen es asintóticamente estable.

Cuando $\dot{V}(x)$ no depende de todas las variables de estado se requiere hacer uso del teorema de | ya que en esos casos falla la función de energía de Lyapunov.

5.3.3 Método indirecto de Lyapunov

El siguiente teorema, da condiciones para determinar la estabilidad del origen de un sistema no lineal, por medio del estudio de la estabilidad del sistema linealizado.

Teorema (Método indirecto de Lyapunov)

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f:D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

Entonces

1. El origen es AE si todos los valores propios de A tienen parte real negativa $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$
2. El origen es inestable si uno o más valores propios de A tienen parte real positiva $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} > 0$

Ejemplo. Considere el siguiente sistema:

$$\dot{x} = ax^3$$

Analice la estabilidad del origen por medio del método indirecto de Lyapunov
Linealizando el origen

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} = 3ax^2|_{x=0} = 0$$

Dado que los valores propios tienen parte real igual a cero, no es posible concluir sobre su estabilidad mediante el método indirecto de Lyapunov. Además, esta conclusión es genuina debido a que la estabilidad de este sistema depende del valor de a .

Caso 1. Si $a < 0$ el origen es AE. Considere

$$V(x) = x^4 \Rightarrow \dot{V}(x) = 4ax^3 \text{ para } a < 0$$

$$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es AE}$$

Caso 2. Si $a > 0$ el origen es inestable. Considere

$$V(x) = x^4 \Rightarrow \dot{V}(x) = 4ax^6 \text{ para } a > 0$$

$$\dot{V}(x) > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es inestable}$$

Caso 3. Para $a = 0$, el sistema es lineal y el origen es estable.

5.3.4 Principio de invarianza, teorema de LaSalle, criterio LaSalle-Krasovskii o LaSalle- Barbashin-Krasovskii

Conceptos previos

Conjunto compacto. Conjunto cerrado y acotado.

Conjunto invariante. Una vez que las trayectorias entran a este conjunto ya no pueden salir del $\forall t$, si inicia en este conjunto permanece siempre en este conjunto $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \forall t$ posterior (M es el conjunto invariante).

Función radialmente no acotada. Para $V(x)$ una función que mapea en los reales y que es continuamente diferenciable tal que $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$.

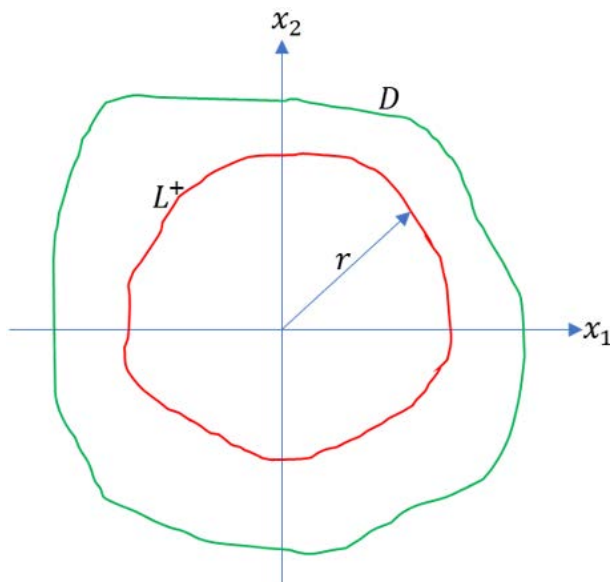
Conjunto límite positivo L^+ . Un punto p se dice que es un punto límite positivo de $x(n)$ si existe una secuencia $[t_n]$, con $t_n \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$, tal que $x(t_n) \rightarrow p$ conforme $n \rightarrow \infty$. El conjunto de todos los puntos límite positivos de $x(t)$ son llamados el conjunto límite positivo de $x(t)$. Para un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{con} \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x(0) = x_0$$

Lema. Si la solución $x(t)$ del sistema no lineal es acotada y pertenece a D para $t \geq 0$, entonces su conjunto límite positivo L^+ es un conjunto no vacío, compacto e invariante. Además

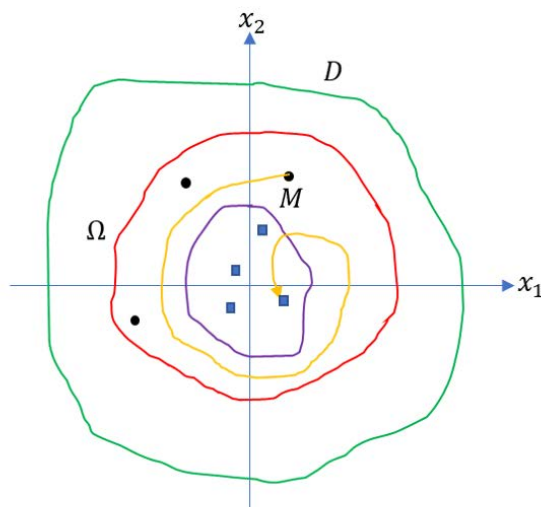
$$x(t) \rightarrow L^+ \text{ con } t \rightarrow \infty$$



Teorema de LaSalle

Sea $\Omega \subset D$ un conjunto compacto, invariante respecto al sistema no lineal. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V} < 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω tales que $\dot{V} = 0$. Sea M el conjunto invariante más grande en E . Entonces, toda solución comenzando en Ω converge a M , conforme $t \rightarrow \infty$.

Conjunto límite positivo



- $\in E$ conjunto de puntos $\subseteq \Omega$ donde $\dot{V} \leq 0$
- $\in M$ conjunto de puntos $\subseteq E$ donde $\dot{V} = 0$
- D : dominio de V
- Ω : conjunto compacto invariante tal que $\dot{V} \leq 0$

Notas

- Este teorema es para conjuntos
- $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- V no necesariamente es una función de Lyapunov no se requiere que $V(x) > 0$ y $V(0) = 0$ ni $\dot{V} < 0$
- D es el conjunto dominio de V
- Ω es una variante de V $\Omega \subseteq D$
- E es el conjunto donde $\dot{V} = 0$ $E \subseteq \Omega$
- La derivada de V es cero, pero la trayectoria no necesariamente permanece en ese conjunto
- M es el conjunto invariante más grande en E
- La derivada de V es cero y además se queda $M \subseteq E$ en ese conjunto
- Como resultado cualquier solución que inicie en Ω tiende a M conforme $t \rightarrow \infty$
- $L^+ \subseteq M \subseteq E \subseteq \Omega \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$

Ejemplo. Analice la estabilidad del siguiente sistema.

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = a x_1$$

$$\text{con } a, b > 0 \text{ usando } V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2a} (x_2 - b)^2 \quad V(0) = \frac{b^2}{2a}$$

Nótese que $V(x)$ no es una función candidata de Lyapunov dado que $V(0) \neq 0$ por lo cual no es posible aplicar Lyapunov, pero si es posible aplicar *LaSalle*.

Calculando la primera derivada

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{a} \dot{x}_2 (x_2 - b)$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 x_2 + x_1^2 (x_2 - b) = -x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 - b x_1^2$$

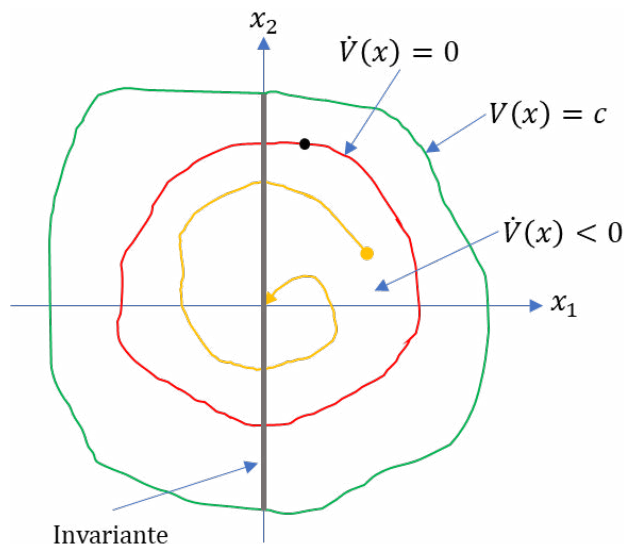
$$\dot{V}(x) = -b x_1^2 \text{ con } b > 0 \quad \dot{V}(x) \leq 0$$

Pero no depende de todas las variables de estado por lo cual no definida negativa ya que

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ con } x_2 \in \mathbb{R}$$

Para determinar un conjunto invariante, se analizan las siguientes condiciones

- $V(x)$ sea radialmente no acotado, condición de Barbashin.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ para alguna $V(x) \leq c$ (curva de nivel) como su derivada es semidefinida negativa la trayectoria nunca va a salir de la curva de nivel, se va a mantener en ella o va a disminuir



- Falta mostrar que el conjunto definido por la curva de nivel arbitraria de la función $V(x)$ es compacto (cerrado y acotado) en este caso $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow 0$ por lo que es radialmente no acotado entonces con estas condiciones podemos definir que el conjunto definido por la curva de nivel $V(x) = c$ es compacto.

Ahora podemos definir

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2\}$$

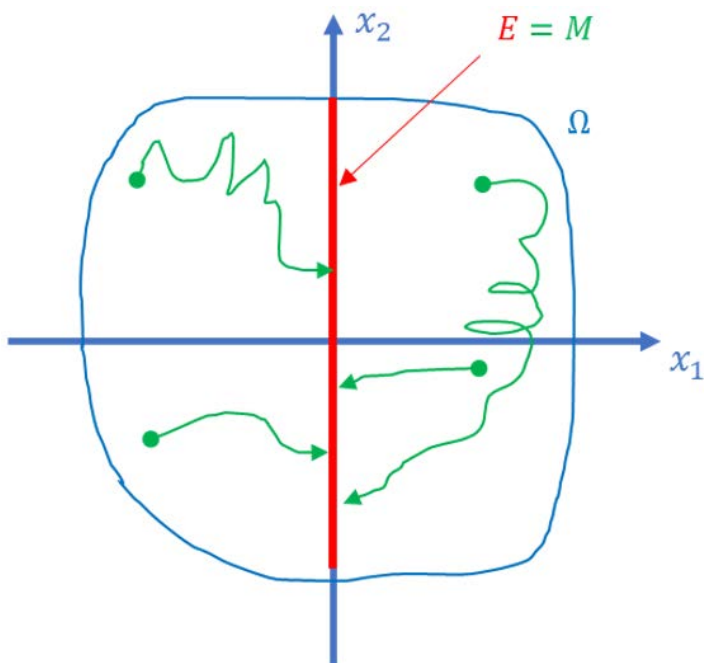
$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq c\} \text{ esto es válido ya que } \dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } \Omega$$

$$E := \{x \in \Omega : x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Para definir M hay que analizar los puntos que pertenecen al conjunto invariante M evaluando los puntos de equilibrio del sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2$$

$\dot{x}_2 = a x_1^2 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se tiene un continuo de puntos de equilibrio



En este caso los puntos de equilibrio tienen coincidencia con E de tal forma que $M = E$ de tal forma que cualquier condición inicial que pertenece a Ω siempre converge a M y si se inicia en M pertenece en M por lo tanto los puntos de equilibrio $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es asintóticamente estable. el conjunto es asintóticamente estable (AE).

Nuevamente el teorema de LaSalle es un teorema de existencia, pero no define la forma de $V(x)$ condición suficiente.

Conectando los teoremas de Lyapunov y LaSalle

A estos corolarios también se les conoce como Teoremas de Barbashin y Krasovskii quienes los probaron antes de la existencia del principio de invariancia de LaSalle por lo cual muchos autores los definen como el criterio de estabilidad de LaSalle-Krasovskii para relajar Lyapunov.

Corolario

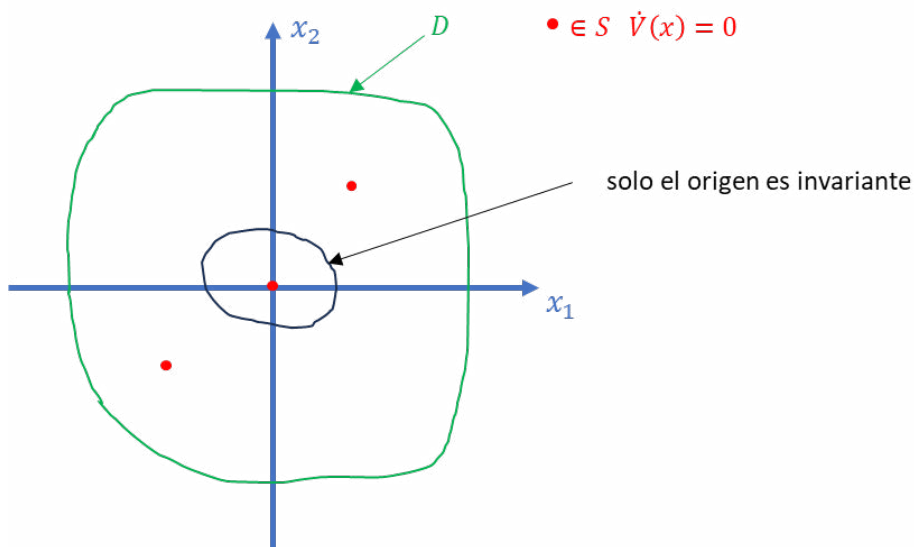
Sea $x^* = 0 \in D$ un punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida positiva en el dominio D con $V(0) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \neq 0$. Sea $S = \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$.

Si ninguna solución diferente a $x(t) = x^*$ se mantiene idénticamente en S . Entonces $x^* = 0$ es asintóticamente estable en D .

Si además $D = \mathbb{R}^n$ y $V(x)$ es radialmente no acotada, entonces $x^* = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Notas

- Este corolario puede presentarse como dos, uno para asintóticamente estable en D y otro para globalmente asintóticamente estable.
- Aquí la derivada de V puede tener varios puntos diferentes al origen donde su valor es cero y dichos puntos definen el conjunto S , pero solo el origen es invariante entonces el origen es asintóticamente estable



- Este corolario es una condición suficiente
- Si $\dot{V}(x)$ es definida negativa con $S = \{0\}$ entonces coincide en el Teorema de Lyapunov.

Ejemplo. Considere la ecuación del péndulo con fricción.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

utilice la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{g}{l} (1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 \text{ con } V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \forall -\pi < x < \pi$$

Los puntos de equilibrio del sistema están en $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ para $x \in D$

La primera derivada de $V(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} & + \frac{g}{l} \sin x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ & = x_2 \frac{g}{l} \sin x_1 - x_2 \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2^2 \\ \dot{V}(x) & = -\frac{k}{m} x_2^2 \end{aligned}$$

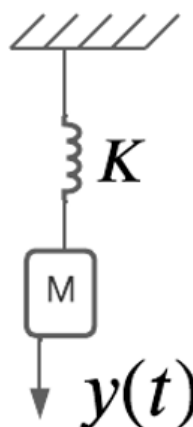
Esta derivada es semidefinida negativa ya que si $x_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = 0 \forall x_1 \in D$ es decir, en todo el eje de x_1 por lo tanto no es posible concluir la estabilidad asintótica del origen mediante el teorema de Lyapunov es necesario aplicar el criterio LaSalle-Krasovskii.

Considérese el conjunto $S: \{\dot{V}(x) = 0 \mid x_2 = 0\}$ este es un conjunto invariante ya que una vez que una trayectoria entra en él permanece en el mismo, ya que:

$$x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \sin(x_1) = 0$$

esto solo se puede cumplir para $x_1 = 0$ dada la restricción del dominio. Por lo tanto, se puede concluir que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Dado que $D \neq \mathbb{R}^n$ no es GAS.

Ejemplo. Considere la ecuación del sistema masa-resorte.



$$M\ddot{y} = Mg - \underbrace{Ky}_{\text{resorte lineal}} - \underbrace{c\dot{y} - c\dot{y}|\dot{y}|}_{\substack{\text{recuperacion} \\ \text{del resorte} \\ \text{o} \\ \text{amortiguamiento}}}$$

considerando $x_1 = y - \frac{Mg}{K}$ y $x_2 = \dot{y}$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{c_1}{M}x_2 - \frac{c_1}{M}x_2|x_2|$$

Tomando $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$ con $a, b > 0$ $V(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^2$ y $V(0) = 0$ su primera derivada queda como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2ax_1\dot{x}_1 + 2bx_2\dot{x}_2 \\ &= 2ax_1x_2 - 2b\frac{K}{M}x_1x_2 - 2b\frac{c_1}{M}x_2^2 - 2b\frac{c_2}{M}x_2^2|x_2| \\ &= 2\left(a - \frac{bK}{M}\right)x_1x_2 - 2\frac{bc_1}{M}x_2^2 - 2\frac{bc_2}{M}x_2^2|x_2|\end{aligned}$$

tomando $a = \frac{K}{2}$ y $b = \frac{M}{2}$ se tiene

$$\dot{V}(x) = -c_1x_2^2 - c_2x_2^2|x_2| \leq 0 \quad \text{para } \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es semidefinida negativa ya que solo depende de x_2 .

Este sistema tiene un punto de equilibrio en $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ por lo tanto con

$S: \{\dot{V}(x) = 0 \mid x_2 = 0\}$ es el invariante por lo que $x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ además $D = \mathbb{R}^2$ por lo tanto se puede concluir que el origen es globalmente asintóticamente estable GAS.

Ejemplo. Considere el siguiente sistema:

$$\dot{y} = ay + u$$

con una ley de control adaptable de la forma

$$u = -Ky \quad \text{con} \quad \dot{K} = \gamma y^2 \quad \text{tal que } K_1 \gamma > 0$$

se desea probar que las trayectorias del sistema convergen al equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$, tal que el control regula y a cero

Como hay dos ecuaciones diferenciales, se requieren dos variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= K \end{aligned}$$

entonces el sistema en lazo cerrado queda definido como:

p. e.

$$\dot{x}_1 = ax_1 + \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ -\tilde{K} & \tilde{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x}_1 = -(x_2 - a)x_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \gamma x_1^2 \quad \dot{x}_2 = \gamma x_1^2 \quad x_1 = 0 \text{ es un conjunto de equilibrio}$$

considerando la función de

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2\gamma} (x_2 - b)^2 \quad \text{con } b > a \quad V(0) = \frac{b^2}{2\gamma} \quad V(x) > 0$$

su primera derivada

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma} (x_2 - b) \dot{x}_2$$

$$\dot{V} = -x_1^2 (x_2 - a) + x_1^2 (x_2 - b)$$

$$= x_1^2 (x_2 - b - x_2 + a)$$

$$= -x_1^2 (b - a) \quad \text{para} \quad a, b > c | b > a$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \Omega: \{x \in \mathbb{R}^2 | V(x) \leq c\}$$

además $V(x)$ es radialmente no acotada por lo que

$$S: \{x \in D | \dot{V}(x) = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\}$$

como $D = \mathbb{R}^2$ el sistema es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo. Considere el sistema

$$x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \sqrt{2x_1(k)x_2(k) - x_1^2(k)}$$

Seleccionando la función candidata de Lyapunov

$$V(k) = x_1^2(k) + x_2^2(k)$$

que corresponde a una realización directa de una función de energía, cuya primera diferencia está dada por:

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$

$$\Delta V(k) = x_1^2(k) + x_2^2(k) - 2x_1(k)x_2(k) + 2x_1(k)x_2(k) - x_1^2(k) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$

$$\Delta V(k) = -x_1^2(k) \text{ s: } \left\{ x \in D \left| \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \right. \right\}$$

La cual solo es semidefinida negativa ya que puede ser cero cuando $x_2(k) \neq 0$. Por lo tanto $V(k)$ es una función de Lyapunov, pero el **sistema** solo puede concluirse que es estable y no asintóticamente estable.

$$* \left\{ \begin{array}{l} \text{De los p. e. del sistema} \\ x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \sqrt{2x_1x_2 - x_1^2} = 0 \\ 2x_1x_2 - x_1^2 = 0 \\ 2x_1^2 - x_1^2 = 0 \\ x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ D: \{x \in \mathbb{R}^2 | 2x_1x_2 > x_1^2\} \end{array} \right.$$

*por lo tanto por *LaSalle-Krasovski*, el sistema es $A E$

Ejemplo. Analice la estabilidad de un péndulo simple con fricción con un modelo definido como

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha \sin x_1 - \beta x_2$$

con $\alpha = g/l$ y $\beta = b/m$, g = gravedad, l = longitud,

b = coeficiente de fricción y m = masa

Caso 1. Considere la función

$$V = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2\alpha x_2 \sin x_1 - 2\beta x_2^2$$

con esta función no es posible concluir sobre la estabilidad del sistema.

Caso 2. Considere la función

$$V = \alpha(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \forall \quad -\pi < x_1 < \pi$$

$$\dot{V} = \alpha \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V} = \alpha x_2 \sin x_1 - \alpha x_2 \sin x_1 - \beta x_2^2$$

$$\dot{V} = -\beta x_2^2 < 0$$

no se puede concluir estabilidad asintótica ya que $\dot{V}(x) = 0$ para $x_2 = 0$ independientemente del valor de x_1 , es decir tanto en V como en $\dot{V}(x)$ debe aparecer todo el estado.

Se requiere LaSalle

sí No tenemos fricción $\Rightarrow \dot{V}(x) = 0 \Rightarrow$ origen es estable

Caso 3. Considere una función

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P_x + \alpha(1 - \cos x_1)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha(1 - \cos x_1)$$

$$\text{para que } P > 0 \quad \Rightarrow \quad p_{11} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = (p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \alpha \sin x_1)x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)(-\alpha \sin x_1 - \beta x_2)$$

$$= \alpha(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \alpha p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}\beta)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}\beta)x_2^2$$

con $p_{22} = 1$ y $p_{11} = \beta p_{12}$ y $0 < p_{12} < \beta$ y $p_{12} = \beta/2$, entonces

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\alpha\beta x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}\beta x_2^2$$

el término

$$x_1 \sin x_1 > 0 \quad \forall \quad 0 < |x_1| < \pi \quad \text{con } D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$$

$$V(x) > 0 \quad \text{y} \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall \quad x \in D \Rightarrow \text{el origen es asintóticamente estable.}$$

5.4 Sistemas no autónomos

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\text{con } u = g(x)$$

$\dot{x} = f(x, g(x)) = f(x)$ sistema a lazo cerrado se analiza como un sistema autónomo (caso anterior) para un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{o} \quad \dot{x} = f(x, u, t) \quad \text{con } u = g(x)$$

$$\dot{x} = f(x, t)$$

depende del tiempo por lo cual $V(x)$ también depende del tiempo es decir $V(x, t)$ y no es posible aplicar el principio de invariancia por lo tanto se requiere otro criterio.

Propiedades asintóticas de funciones y sus derivadas

Caso 1 Si $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ no implica que f converge cuando $t \rightarrow \infty$. Ejemplo $f(t) = \sin(\log(t))$ donde $\dot{f}(t) = \cos(\log(t))/t$ que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$; sin embargo, f no converge.

Caso 2 Si f converge no implica que $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Ejemplo $f(t) = e^{-t} \sin(e^{2t})$ que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$; sin embargo $\dot{f}(t) = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + e^{-t} \cos(e^{2t})(2e^{2t}) = -e^{-t} \sin(e^{2t}) + 2e^t \cos(e^{2t})$ no es acotada.

Caso 3 Si f es acotada inferiormente y decreciente ($\dot{f}(t) \leq 0$) entonces f converge a un límite.

Teorema

Si una función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito cuando $t \rightarrow \infty$ y $\dot{f}(t)$ es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Notas

- Una función $g(t)$ es continua en $[0, \infty]$ si:

$$\forall t_1 \geq 0 \forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0 \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \\ \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

- Una función $g(t)$ es uniformemente continua en $[0, \infty]$ si:

$$\forall R > 0, \exists \eta(R) > 0, \forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

Una definición alternativa es: Una función es uniformemente continua si la derivada de la función es continua.

Corolario. Si la función diferenciable $f(t)$ tiene límite finito cuando $t \rightarrow \infty$ y es tal que $\dot{f}(t)$ existe y es acotada, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Lema de Barbalat

Si una función $V(x, t)$ satisface

- $V(x, t)$ es acotada inferiormente.
- $\dot{V}(x, t)$ es semidefinida negativa.
- $\dot{V}(x, t)$ es uniformemente continua en el tiempo.

entonces $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

Este lema implica que $V(x, t) \rightarrow V_\infty$ tal que $V_\infty \leq V(x(0), 0)$

Ejemplo. Determine la estabilidad del sistema dado por:

$$\dot{e} = -e + \theta\omega(t)$$

$$\dot{\theta} = -e\omega(t)$$

considerando que $\omega(t)$ es desconocido pero acotado
Para los puntos de equilibrio

$$\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

$$\dot{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad -0 + \theta\omega(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

el sistema tiene un punto de equilibrio en $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Considerando la función candidata de Lyapunov

$$V = e^2 + \theta^2 \quad V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$$

su primera derivada

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{V} = -2e^2 + 2e\theta\omega(t) - 2\theta e\omega(t)$$

$\dot{V} = -2e^2 \leq 0$ por lo que $\dot{V}$ es semidefinida negativa, dado que el sistema es no autónomo, ya que ω varia con el tiempo no es posible aplicar el principio de invarianza, por lo que es necesario aplicar el Lema de Barbalat.

- $V(x,t)$ es acotada inferiormente $V(x,t) > 0 \quad \forall \quad x \neq 0$ y $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x,t)$ es semidefinida negativa $\dot{V}(x) = -2e^2 \leq 0$
- $\dot{V}(x,t)$ es uniformemente continua $\dot{V} = -2e^2$ es continua y $\ddot{V} = -4e\dot{e}$
 $\ddot{V} = -4e(-e + \theta\omega(t))$ también es continua
 $\Rightarrow \dot{V}$ es uniformemente continua

Se cumple el Lema de Barbalat, entonces $\dot{V} = -2e^2 \rightarrow 0$ por lo que $e \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y el sistema tiene estabilidad asintóticamente al punto de equilibrio.

5.5 Método del gradiente variable

El método del gradiente variable se utiliza para construir funciones de Lyapunov. Sea $V(x)$ una función escalar de x tal que $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

La idea central de este método es determinar $g(x)$ tal que $V(x)$ y $\dot{V}(x)$ cumplan con las características de la función de Lyapunov, es decir $V(x) \geq 0$ y $\dot{V}(x) \leq 0$. Además $g(x)$ tiene la característica de ser el gradiente de una función escalar y es simétrico

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

Bajo esta restricción, se elige $g(x)$ tal que $g^T(x) f(x)$ sea definida negativa. Por lo tanto $V(x)$ se obtiene con la siguiente integral

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$$

Como la integral de un gradiente no depende del camino, es posible integrar a lo largo de cada una de las variables de estado (ejes)

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(y_2) dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(y_n) dy_n$$

Ejemplo. Considere el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2$$

donde $a > 0$, h es localmente Lipschitz con $h(0) = 0$ y $h(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$ con $y \in (-b, c)$ para $b, c > 0$

para que sea simétrico $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$

$$\dot{V}(x) = g_1(x)\dot{x}_1 + g_2(x)\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = g_1(x)x_2 - g_2[h(x_1) + ax_2] < 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$V(x) = \int_0^x g^\top(y)dy > 0 \quad \forall x \neq 0$$

probando con

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \zeta(x)x_2 \end{bmatrix}$$

con α, β, γ y ζ a determinar
calculando el valor de $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 + a\gamma(x)x_1x_2 - a\zeta(x)x_2^2 - \zeta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

para cancelar los términos cruzados (signo no definido) se elige

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \zeta(x)h(x_1) = 0$$

de tal manera que

$$\dot{V}(x) = -[a\zeta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

es posible seleccionar ζ, γ y β como constantes para simplificar, solo $\alpha(x_1)$
y para asegurar la simetría $\beta = \gamma$ por lo que $g(x)$ se simplifica

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \zeta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \zeta x_2 \end{bmatrix}$$

integrando para obtener $V(x)$

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \zeta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \zeta y_2) dy_2 \\
&= \frac{1}{2} a\gamma x_1^2 + \zeta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2} \zeta x_2^2 \\
&= \frac{1}{2} x^\top P x + \zeta \int_0^{x_2} h(y) dy
\end{aligned}$$

donde $P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \zeta \end{bmatrix}$

eligiendo $\zeta > 0$ y $0 < \gamma < a\zeta$ se asegura que $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es definida negativa. Por ejemplo, con $\gamma = Ka\zeta$ y $0 < K < 1$

$$V(x) = \frac{\zeta}{2} x^\top \begin{bmatrix} Ka^2 & Ka \\ Ka & 1 \end{bmatrix} x + \zeta \int_0^{x_2} h(y) dy$$

Se tiene que $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$ con $\dot{V}(x) \leq 0$ en D con $D : \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -b < x_1 < c\}$ por lo que se concluye que el origen es AE.

Ejemplo. Usando el método del gradiente variable, encuentre una función de Lyapunov $V(x)$ para mostrar la estabilidad asintótica del origen para el siguiente sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2) - \sin(x_1 + x_2)$$

Considere la función

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \zeta x_2 \end{bmatrix}$$

para cumplir con la condición de simetría $\gamma = \beta$, por lo tanto

$$\dot{V}(x) = (\alpha x_1 + \beta x_2)x_2 - (\beta x_1 + \zeta x_2)[(x_1 + x_2) + \sin(x_1 + x_2)]$$

tomando $\zeta = \beta$

$$\dot{V}(x) = -\beta x_1^2 + (\alpha - 2\beta)x_1x_2 - \beta(x_1 + x_2)\sin(x_1 + x_2)$$

tomando $\alpha = 2\beta$ y $\beta > 0$, se tiene $x \sin(x) > 0$

$$\dot{V}(x) = -\beta x_1^2 - \beta(x_1 + x_2)\sin(x_1 + x_2) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad -\pi < x < \pi$$

lo que es definido negativo $\forall x \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto

$$g(x) = \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = Px \Rightarrow V(x) = \int_0^x g^\top(y) dy = \frac{1}{2} x^\top Px$$

donde $P > 0$ (definida positiva). Entonces $V(x)$ es radialmente no acotada, por lo que el origen es localmente asintóticamente estable.

Capítulo 6

Retroalimentación de estado

En este capítulo se va a estudiar el control de un sistema mediante la realimentación de sus variables de estado, poniendo de manifiesto la potencia de esta estructura de control para fijar las características del comportamiento dinámico de un sistema. Para la aplicación de un control por retroalimentación del estado, se parte, en primera instancia, del conocimiento de las variables de estado del sistema, que se suponen directamente medibles, después se abordará el caso en que las variables de estado no sean directamente medibles. Es importante notar que solo se podrá modificar el comportamiento de sistemas controlables, los sistemas y/o subsistemas no controlables no pueden modificarse mediante retroalimentación.

6.1 Asignación del polinomio característico del sistema

Sea el sistema escalar LTI

$$(A, B, C) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

cuyo polinomio característico es:

$$a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n$$

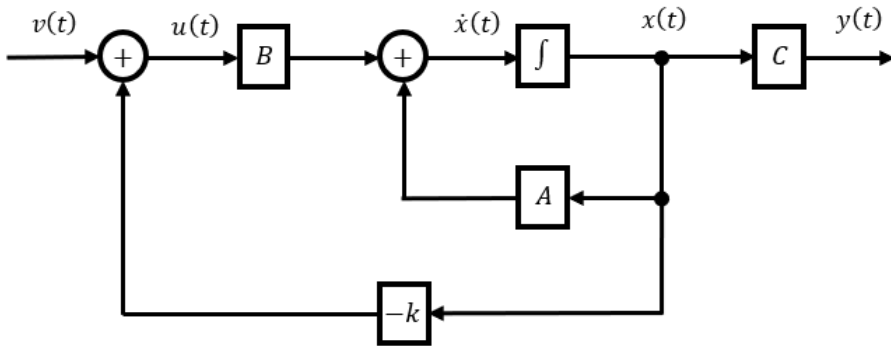
se desea modificar el comportamiento del sistema (A, B, C) por medio de una retroalimentación de estado, de la forma

$$u(t) = -kx(t) + v(t)$$

donde $k = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n]$ es un vector renglón y $v(t)$ es una nueva entrada, a fin de obtener un sistema en lazo cerrado con un polinomio característico deseado, de la forma

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

Esto significa que el objetivo es reubicar los modos del sistema y, por consiguiente, los polos del mismo, mediante retroalimentación del estado.



Aplicando la retroalimentación de estado $u(t) = -kx(t) + v(t)$ al sistema (A, B, C) , se obtiene el siguiente sistema a lazo cerrado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(-kx(t) + v(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - Bk)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

cuyo polinomio característico es

$$a_k(s) = \det(sI - A + Bk)$$

entonces el problema se reduce a determinar en qué condiciones existe $u(t) = -kx(t) + v(t)$ tal que $\alpha(s) = a_k(s)$ y como calcular el vector k . Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= a_k(s) = \det(sI - A + Bk) \\
&= \det\{(sI - A)[I_n + (sI - A)^{-1}Bk]\} \quad \text{por propiedades de determinantes} \\
&= \det(sI - A) \det[I_n + (sI - A)^{-1}Bk]
\end{aligned}$$

Lema. Sean L y N matrices de dimensiones $n \times m$ y $m \times n$ respectivamente entonces

$$\det(I_n - LN) = \det(I_m - NL)$$

utilizando el *Lema* anterior con $L = (-sI - A)^{-1}B$, $N = k$ y $m = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\det[I_n + (sI - A)^{-1}Bk] &= \det \underbrace{[1 + k(sI - A)^{-1}B]}_{\substack{\text{escalar} \\ \downarrow \\ \det(\text{escalar}) = \text{escalar}}} = 1 + k(sI - A)^{-1}B
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha(s) = a(s)[1 + k(sI - A)^{-1}B]$$

de donde

$$\alpha(s) - a(s) = a(s)k(sI - A)^{-1}B$$

cómo se tiene en la ecuación anterior polinomios en s , el vector k puede obtenerse igualando los coeficientes correspondientes de las potencias de s .

Para ello se utiliza la siguiente expresión

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}[Is^{n-1} + (A + a_1I)s^{n-2} + (A^2 + a_1A + a_2I)s^{n-1} + \dots + (A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I)]$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 & (s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n) - (s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n) \\
 & = k[Is^{n-1} + (A + a_1 I)s^{n-2} + (A^2 + a_1 A + a_2 I)s^{n-3} + \dots]B
 \end{aligned}$$

Analizando por potencias de s , se tiene

$$\alpha_1 - a_1 = kB$$

$$\alpha_2 - a_2 = kAB + a_1 kB$$

$$\alpha_3 - a_3 = kA^2B + a_1 kAB + a_2 kB$$

$$\vdots$$

Finalmente, las relaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\alpha - a = kCT$$

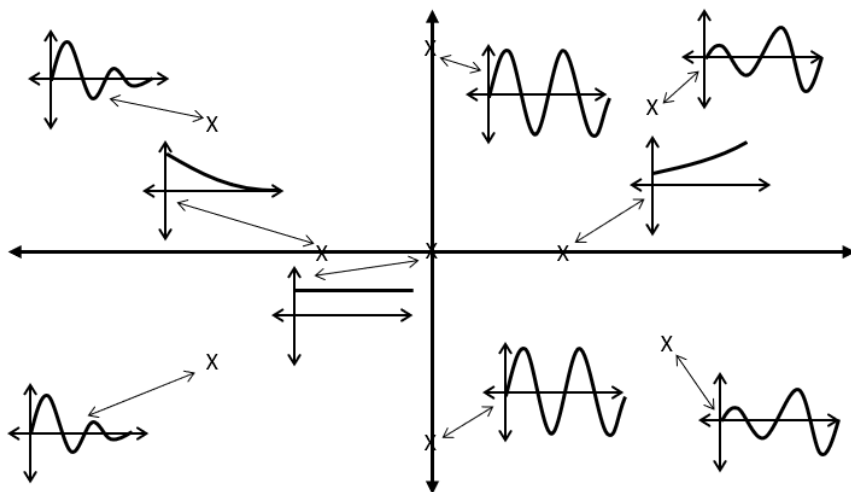
donde

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]$$

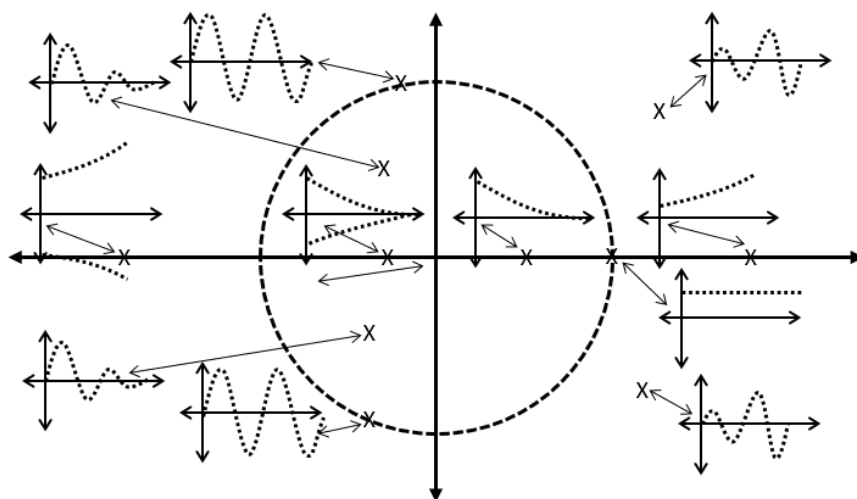
$$a = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de Toeplitz}$$



Funciones continuas según la ubicación de sus polos en el plano s



Funciones discretas según la ubicación de sus polos en el plano z

De la ecuación $\alpha - a = kCT$, puede notarse que un polinomio cualquiera $\alpha(s)$ puede ser asignado mediante retroalimentación de estado como polinomio característico del sistema en lazo cerrado si y solo si la matriz de controlabilidad del sistema es no singular, es decir, si y solo si el sistema es controlable.

Si el sistema es controlable, el vector de retroalimentación k , que asigna el polinomio $\alpha(s)$ está dado por:

$$k = (\alpha - a)T^{-1}C^{-1}$$

la cual se conoce como fórmula de Bass-Gura.

Ejemplo. Para el siguiente sistema, encontrar el vector de retroalimentación para ubicar los polos en $s=-2$ y $s=-3$, respectivamente

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$a(s) = \det(sI - A) = (s+1)(s-1) = s^2 - 1 \Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = -1$$

los polos del sistema están en $s = 1$ y $s = -1$ es internamente inestable

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ es controlable}$$

Los polos deseados son $s = -2$ y $s = -3$, por lo tanto

$$\alpha(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6 \Rightarrow \alpha_1 = 5 \text{ y } \alpha_2 = 6$$

$$k = (\alpha - a)T^{-1}C = ([\alpha_1 \quad \alpha_2] - [a_1 \quad a_2]) \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$k = [5 \quad 6] - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [5 \quad 7] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = [5 \quad 12]$$

Tarea. Comprobar la asignación de polos y en simulación con $v = 0$ y con $v \neq 0$.

Tarea. Para el siguiente sistema, encuentre una retroalimentación para ubicar los polos en

$$s = -1 \pm j2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

6.2 Efecto de la retroalimentación sobre ceros del sistema, controlabilidad y observabilidad

Efecto de retroalimentación sobre ceros del sistema

Sea la función de transferencia del sistema (A, B, C)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{N(s)}{D(s)}$$

suponiendo que $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos, los ceros del sistema son las raíces de $N(s)$ y los polos del sistema son las raíces de $D(s)$. Para la retroalimentación de estado.

$$u(t) = -kx(t) + v(t)$$

se tiene que bajo condiciones iniciales iguales a cero

$$U(s) = -kX(s) + V(s) = -k(sI - A)^{-1}BU(s) + V(s)$$

de donde

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \frac{1}{1 + k(sI - A)^{-1}B}$$

Entonces la función de transferencia del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\begin{aligned} C(sI - A + kk)^{-1}B &= \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \left[\frac{1}{1 + k(sI - A)^{-1}B} \right] \\ &= \frac{N(s)}{D(s)} \left[\frac{D(s)}{D(s) + G(s)} \right] = \frac{N(s)}{D(s) + G(s)} \end{aligned}$$

donde $G(s) = kAdj(sI - A)B$

Por lo tanto

1. El polinomio característico del sistema en lazo cerrado es

$$D(s) + G(s) = \alpha(s)$$

2. Los ceros del sistema no son afectados por la retroalimentación en el sentido de que no se pueden reubicar. Sin embargo, los ceros se pueden cancelar si $\alpha(s)$ y $N(s)$ tienen raíces comunes.

6.3 Efecto de la retroalimentación sobre la controlabilidad

Sea un sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Con una acción de control de la forma $u(t) = -kx(t) + v(t)$

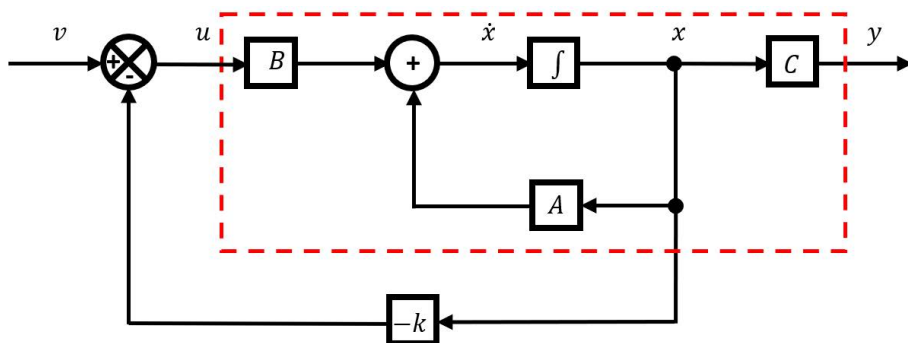
La matriz de controlabilidad del sistema original está dada por:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots]$$

Entonces es posible verificar la siguiente relación

$$\mathcal{C}_r = \mathcal{C} \underbrace{\begin{bmatrix} I & -KB & -K(A - BK)B & \dots \\ 0 & I & -KB & \dots \\ 0 & 0 & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}}_*$$

como la matriz (*) es no singular ya que es triangular superior, entonces no afecta el rango de $\mathcal{C}$ lo que implica que $\mathcal{C}_r$ es del mismo rango de $\mathcal{C}$ por lo cual el sistema retroalimentado es controlable si y solo si el sistema original es controlable.



De la figura, la entrada $v(t)$ no controla directamente al estado x , solo genera $u(t)$ para controlar $x(t)$. Por lo tanto, si $u(t)$ no puede controlar $x(t)$ tampoco lo hará $r(t)$

Efecto de la retroalimentación sobre controlabilidad

Considérese que se tiene un sistema controlable, en la forma canónica

controlador (A_c, B_c, C_c) . Se puede comprobar que con la retroalimentación de estado $u(t) = -kx(t) + v(t)$, el sistema retroalimentado $(A_c - kB_c, B_c, C_c)$ sigue estando en la forma canónica controlador y por lo tanto sigue siendo controlable. Si el sistema no es controlable, el sistema retroalimentado tampoco lo será. Entonces, la retroalimentación de estado No afecta la controlabilidad del sistema.

Efecto de la retroalimentación sobre observabilidad

Para analizar el efecto de la retroalimentación sobre la observabilidad, supóngase que el sistema (A, B, C) es controlable y observable. Como se vio anteriormente, la función de transferencia del sistema retroalimentado es:

Entonces el sistema $(A - BK, B, C)$ el cual sigue siendo controlable, será observable si y solo si $N(s)$ y $\alpha(s)$ son coprimos, esto es si y solo si los modos del sistema en lazo cerrado NO coinciden con los ceros del sistema. Por lo tanto, la observabilidad puede ser afectada por la retroalimentación de estado.

Ejemplo. Para el siguiente sistema analice la controlabilidad y observabilidad en lazo abierto y en lazo cerrado con $u(t) = -kx(t) + v(t)$ donde

$$\begin{aligned} k &= [5 \quad 12] \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \end{aligned} \quad A - Bk = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema en lazo abierto (A, B, C)

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Controlable}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{No observable}$$

Sistema en lazo cerrado ($A - Bk, B, C$)

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Controlable}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Observable}$$

Tarea. Analice la controlabilidad y observabilidad del siguiente sistema en lazo abierto y bajo retroalimentación con:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2]x \quad u = -[3 \quad 1]x + v$$

6.4 Linealización exacta por realimentación

- En este capítulo introducimos elementos de la teoría moderna de control geométrico de sistemas no lineales de control.
- Esta teoría se inició alrededor de los años setenta con intentos de extender resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales; resultados tales como los que se refieren a controlabilidad y observabilidad del sistema.
- Más tarde, Isidori en 1981 mostró que no solo estas extensiones eran posibles, sino también gran parte de la teoría de control geométrico de sistemas lineales al estilo Wonham (1985).
- El artículo de Isidori et al. fue seguido durante los años ochenta por un gran número de resultados que generaron un fantástico “juego de herramientas” para sistemas no lineales (Isidori, 1995; Isidori, 1999).
- Una herramienta central en este “juego de herramientas” es la linealización exacta por realimentación, que presentamos en este capítulo.

Consideramos sistemas no lineales afines en la entrada de control, es decir, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

y planteamos qué condiciones se necesitan para que exista una realimentación de estado

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y un cambio de variables

$$z = T(x)$$

que transformen al sistema no lineal a una forma lineal equivalente. Esta linealización no se refiere a la linealización (Jacobiana) aproximada del sistema, vista anteriormente, sino que convierte exactamente al sistema en lineal.

Comenzaremos con linealización entrada-estado, en la que la ecuación de estado completa se linealiza exactamente. Luego introduciremos la linealización entrada-salida, en la que solo la respuesta entrada-salida se linealiza, mientras que una parte del sistema permanece no lineal. Finalmente, presentamos la estabilización de sistemas por medio de linealización exacta por realimentación.

- La relación puede verse como una transformación de la coordenada del control u en la nueva entrada v , la cual depende de las componentes del estado.
- Mediante una redefinición de la variable de control u , en términos de las variables originales y de operaciones no lineales sobre las componentes del estado, obtenemos un nuevo canal de control v , desde el cual el sistema luce perfectamente lineal.
- Esto nos dice que hemos encontrado una nueva forma de representar la acción de control, representada por v , desde donde el sistema exhibe un comportamiento perfectamente lineal sin aproximaciones.

- Tal transformación tiene entonces la enorme virtud de eliminar las no linealidades presentes en el sistema de una manera limpia y tajante, sin acudir a aproximaciones de género alguno.

6.4.1 Linealización entrada-estado

Vamos a introducir la idea de linealización exacta por realimentación a través del Ejemplo de estabilización del péndulo.

Ejemplo (Linealización exacta del péndulo). La inspección del modelo de estado del péndulo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu,\end{aligned}$$

muestra que podemos elegir

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{v}{c}$$

para cancelar el término no lineal de la segunda ecuación y obtener el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v\end{aligned}$$

De esta manera, el problema de estabilización del sistema no lineal se transforma en el problema de estabilización de un sistema lineal controlable.

$$v = k_1x_1 + k_2x_2$$

Podemos elegir, por ejemplo, tal que los autovalores del sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + (k_2 - b)x_2\end{aligned}$$

tengan parte real negativa. Finalmente, el control completo —no lineal— que convierte al sistema en lineal y estabiliza su equilibrio es entonces

$$u = \frac{a}{c} [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{1}{c} k_1 x_1 + k_2 x_2$$

Vamos a ver ahora cuán general es este procedimiento. Es claro que no podemos esperar cancelar alinealidades en cualquier sistema no lineal; debe haber ciertas propiedades estructurales que permiten tal cancelación. Del ejemplo podemos ver que

- Para cancelar un término no lineal $\alpha(x)$ por sustracción, el control u y el término $\alpha(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de suma $u + \alpha(x)$;
- Para cancelar un término no lineal $\gamma(x)$ por división, el control u y el término $\gamma(x)$ siempre deben aparecer juntos en forma de producto $\gamma(x)u$; si $\gamma(x)$ es no singular en el dominio de interés, puede cancelarse con $u = \beta(x)v$, con $\alpha(x) = \gamma^{-1}(x)$.

Es decir que la probabilidad de convertir una ecuación de estado no lineal en una lineal controlable cancelando alinealidades requiere que la ecuación no lineal tenga la estructura

$$\dot{x} = Ax + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \quad (1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, el par (A, B) es controlable, y las alinealidades $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$, están definidas en un dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen.

Asumimos que la matriz $\beta(x)$ es no singular $\forall x \in D_x$. Si el sistema tiene la estructura (1), entonces podemos usar el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

para obtener la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

Ahora para estabilizar el sistema podemos simplemente calcular $v = kx$ tal que $A + Bk$ sea Hurwitz. El control estabilizante completo es no lineal y tiene la forma

$$v = \alpha(x) + \beta(x)kx$$

Y si el sistema no tiene la estructura (1); ¿quiere decir que no es posible linealizarlo por realimentación? La respuesta es no. Recordemos que la representación en espacio de estado de un sistema no es única; depende de la elección de las variables de estado. Aun cuando el sistema no tenga inicialmente la estructura (1) es posible que un cambio de variables lo lleve a la forma (1) en otras coordenadas, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. (Sistema exactamente linealizabile después de cambio de coordenadas). Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = a \sin x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

Si elegimos $u = x_1^2 + v$ para cancelar el término no lineal, la primera ecuación sigue siendo no lineal. Sin embargo, si hacemos el cambio de variables

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = a \sin x_2 = \dot{x}_1 \quad (2)$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2 (-x_1^2 u)\end{aligned}$$

que tiene la forma (1), válida en la región $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$.

Usando

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

el sistema queda linealizado en las nuevas variables. La ecuación de estado en las nuevas variables se obtiene invirtiendo la transformación (2), es decir,

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \arcsin \frac{z_2}{a}\end{aligned}$$

que está bien definida para $-a < z_2 < a$. La ecuación de estado transformada es

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos \left(\arcsin \frac{z_2}{a} \right) (-z_1^2 + u)\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores nos dan una idea intuitiva de cómo proceder a generalizar, a sistemas de mayor dimensión, la posibilidad de diseñar una ley de control linealizante:

- En primer lugar, el sistema deberá exhibir en forma natural la estructura inherente a una cadena de integración pura sin intervenciones de la variable de control;
- Además, las no linealidades del sistema deberán estar circunscritas a la última ecuación diferencial, donde de paso, deberá encontrarse, por supuesto, la variable de control.

Diremos que aquellos sistemas que posean la estructura mencionada están representados en la forma canónica controlable. En tales sistemas será posible mediante comparación pura y simple calcular una ley de control que obliga al sistema a exhibir una estructura perfectamente lineal. A tal procedimiento de cálculo del control también se le conoce con el nombre de inversión del sistema.

Cadena de integradores: Diseño mediante inversión del sistema no lineal.

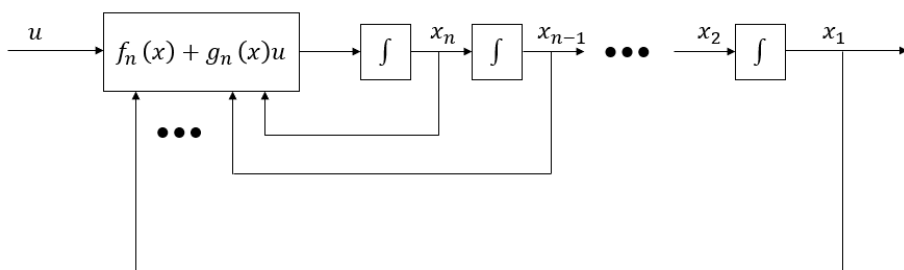


Diagrama de bloques del sistema en forma canónica controlable

a partir de las consideraciones anteriores, podemos establecer que la clase de sistemas no lineales representables en la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u g_n(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{3}$$

son exactamente linealizables mediante una redefinición de la variable de control en términos del estado y una entrada auxiliar externa. Incluso, esta redefinición puede ser interpretada de dos maneras, tanto como un proceso de realimentación no lineal como un proceso de transformación de la coordenada de la variable de control.

Forma canónica controlable: Linealización exacta de la forma canónica controlable.

Definamos la variable de entrada auxiliar v como:

$$v = f_n(x_1, \dots, x_n) + u g_n(x_1, \dots, x_n) \quad (4)$$

Evidentemente, la expresión (4) produce un sistema perfectamente lineal que exhibe una estructura de cadena de integración pura:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= v \end{aligned} \quad (5)$$

El sistema (5), tal como lo hemos vislumbrado, exhibe una cadena de integración pura y, además, todas sus no linealidades, así como la variable de control, están adscritas a la última ecuación diferencial. Un sistema con tal estructura es llamado sistema no lineal en Forma Canónica Controlable o Forma Canónica de Brunovsky.

La variable auxiliar v puede entonces sintetizarse como una ley de control que realimenta linealmente las variables de estado:

$$v = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_{n-1} x_{n-1} - a_n x_n \quad (6)$$

De esta manera, el sistema lineal n -dimensional en lazo cerrado está dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_1x_1 - \cdots - a_nx_n
\end{aligned} \tag{7}$$

La comparación de (6) con (7) nos lleva inmediatamente a establecer la relación siguiente:

$$f_n(x_1, \dots, x_n) + u g_n(x_1, \dots, x_n) = v = -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots a_nx_n \tag{8}$$

A partir de (8), la ley de control no lineal que linealiza en forma exacta al sistema no lineal (3) resulta finalmente:

$$u = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n + f_n(x_1, \dots, x_n)}{g_n(x_1, \dots, x_n)}$$

Definición (Difeomorfismo). Un difeomorfismo es un cambio de variable T tal que $z = T(x)$ está definido en un dominio D_x , su transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ está definida en $D_z = T(D_x)$, y ambos T y T^{-1} son continuamente diferenciables en D_x y D_z , respectivamente.

Tenemos ya todos los elementos para hacer la siguiente definición.

Definición (Sistema linealizabale entrada-estado). Un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{9}$$

con f, g definidas en un dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ y suficientemente suaves (con derivadas continuas hasta el orden que sea necesario), es linealizabale entrada-estado si existe un difeomorfismo $T: D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D_x)$ contiene al origen y el cambio de variables $z = T(x)$ transformada a (9) en

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \quad (10)$$

con (A,B) controlable y $\beta(x)$ no singular en D_x .

En resumen, a existencia de T , α , β , A y B que satisfagan las ecuaciones en derivadas parciales (5) es una condición necesaria y suficiente para que $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ sea linealizabe entrada-estado.

6.5 Sistemas no lineales reducibles a la forma canónica controlable

Un sistema en forma canónica controlable (3) es linealizabe en forma exacta. Esta forma canónica tiene la ventaja de que nos permite calcular de manera directa la señal de control que logra que el sistema no lineal adopte una estructura perfectamente lineal en lazo cerrado. Sin embargo, esta clase de sistemas luce restringida a solo algunos ejemplos que pudieran incluso carecer de significación física. En general, los modelos representativos de los sistemas dinámicos no se presentan en esta forma. Esto nos plantea la necesidad de buscar mecanismos que permitan transformar la representación dinámica de un sistema a la forma canónica controlable. Debemos, por lo tanto, buscar la manera de extender la posibilidad de lograr linealizaciones exactas a una clase más amplia de sistemas dinámicos no lineales.

Estamos interesados en determinar en qué condiciones un sistema, de naturaleza un tanto más general a los vistos hasta ahora puede ser transformado (o reducido) a la forma canónica controlable anterior.

Un modelo suficientemente general de un sistema no lineal puede ser descrito por ecuaciones diferenciales controladas de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) + u g_1(x_1, \dots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) + u g_2(x_1, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) + u g_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u g_n(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{11}$$

Clase de sistemas no lineales afines en el control
 En forma más sucinta, el sistema (11) de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + u g(x) \tag{12}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, y

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{13}$$

La clase de sistemas representada por (12) recibe el nombre de sistemas afines en el control (note que el conjunto de ecuaciones diferenciales presentadas en (12) son precisamente “lineales” en el control).

Las funciones vectoriales $f(x)$ y $g(x)$ reciben el nombre de campos vectoriales. Supondremos de una vez y con el objeto de no tener que contar a cada paso el orden de diferenciabilidad de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, que tales campos vectoriales son diferenciables, respecto de las componentes de x , un número ilimitado de veces, es decir, un número infinito de veces: diremos entonces que $f(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales infinitamente diferenciables. Una expresión equivalente, que también utilizaremos con mucha frecuencia, es la de afirmar que $f(x)$ y $g(x)$ son campos *suaves*. Representaremos esta clase de campos vectoriales escribiendo $f(x) \in C^\infty$.

Con el objeto de ganar la intuición necesaria que nos permita abordar este problema en toda generalidad, comenzaremos haciendo algunos ejemplos sencillos donde podremos transformar el sistema a la forma canónica

controlable mediante simple inspección. De estos ejemplos trataremos de derivar reglas generales que nos permitirán abordar cualquier caso.

Podemos resumir nuestra experiencia postulando las siguientes condiciones, las cuales garantizan que exista la posibilidad de linealizar exactamente un sistema no lineal de dimensión n .

1. Debemos poder hallar una función $h(x)$ de las variables de estado cuyas $n-1$ primeras derivadas, respecto del tiempo, sean funcionalmente independientes entre sí e independientes de la variable de control. Esto es equivalente a que el gradiente de $h(x)$ y el de todas sus derivadas hasta la $n-1$ ésima (inclusive) deben ser linealmente independientes.
2. La n -ésima derivada de $h(x)$, respecto del tiempo, debe depender explícitamente de la variable de control.

La última condición es clara: al expresar el sistema dinámico en las variables transformadas, *todas las no linealidades de las ecuaciones dinámicas, así como la dependencia del control, deben quedar relegadas a la última ecuación*, como ha sido el caso en los ejemplos que hemos desarrollado en esta parte.

La primera condición posiblemente requiere de alguna explicación adicional, sobre todo en lo referente a la *independencia funcional* de las derivadas sucesivas de la función candidata $h(x)$.

La condición necesaria y suficiente para que exista una transformación del vector de estado que lleve a un sistema no lineal de la forma (12) es que exista una función escalar diferenciable $h(x)$ tal que:

1.

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial h^{(n-1)}(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = n$$

2.

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial u} = \dots = \frac{\partial h^{(n-1)}(x)}{\partial u} = 0$$

3.

$$\frac{\partial h^{(n)}(x, u)}{\partial u} \neq 0$$

Definición (grado relativo). El sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x),$$

donde f, g y h definidas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, son suficientemente suaves, tiene grado relativo r , con $1 \leq r \leq n$, en una región $D_0 \subset D$ si

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial r} g(x) \neq 0$$

para todo $x \in D_0$, donde $\psi_1(x) = h(x)$ y $\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$

Si el sistema tiene grado relativo (GR) r , entonces es linealizable entrada-salida; si tiene GR n , entonces es linealizable tanto entrada-salida como entrada-estado.

Ejemplo. (Ecuación de Van der Pol). Consideremos la ecuación de Van der Pol controlada

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

con salida $y = x_1$. Calculemos las derivadas de la salida:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

Por lo tanto, el sistema tiene GR 2 en $\mathbb{R}^2$.

Si la salida es $y = x_2$, entonces

$$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

Y el sistema tiene GR 1 en $\mathbb{R}^2$.

Si la salida es $y = x_1 + x_2^2$, entonces

$$\dot{y} = x_2 + x_2[-x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u]$$

y el sistema tiene GR 1 en $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$.

Ejemplo. (Sistema sin grado relativo bien definido). Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u$$

$$y = x_1$$

Las derivadas de la salida son

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y \Rightarrow y^{(n)} = y = x_1, \quad \forall n \geq 1$$

Vemos que en ninguna derivada de la salida aparece la entrada u . En este caso el sistema no tiene un GR bien definido porque la salida $y(t) = x_1(t) = e^t x_1(0)$ es independiente de la entrada.

Caso no lineal

Busquemos una versión no lineal del modelo (11). Las variables ξ se toman igual que en el caso lineal, ya que la transformación de entrada-salida va a seguir siendo una cadena de r integradores. Para elegir las variables η , va a ser importante respetar la característica fundamental del modelo (11), que es que la entrada u no aparece en la ecuación de η . Tomamos entonces

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_r(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}$$

donde $\psi_1(x) = h(x)$ y $\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$, y las ϕ_i se eligen tales que $T(x)$ sea un difeomorfismo en un dominio $D_x \in D_0$ y $\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) \neq 0$, $1 \leq i \leq n-r, \forall x \in D_x$.

Esto siempre es posible para sistemas mono-entrada con grado relativo r . Por la definición de grado relativo se asegura que $\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$ no depende de u .

En las nuevas variables el sistema queda en la forma normal

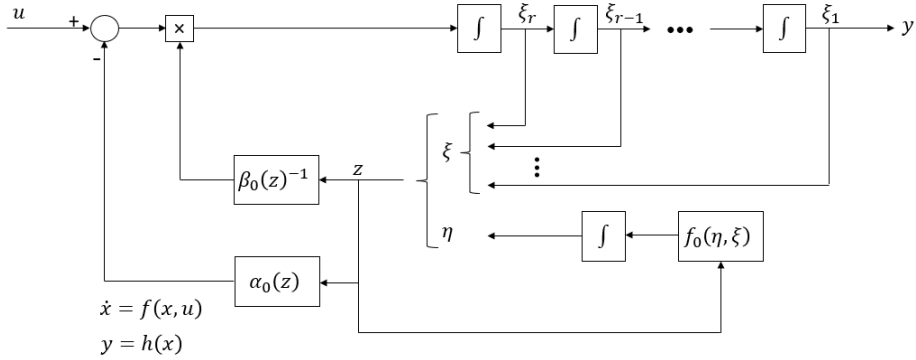
$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \beta(x)^{-1} [u - \alpha(x)] \\ y &= C_c \xi \end{aligned}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^r$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, (A_c, B_c, C_c) son la forma canónica de una cadena de r integradores y

$$f_0(\eta, \xi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \Big|_{x=T^{-1}(z)}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{(\frac{\partial \psi_r}{\partial x})g(x)} \quad \alpha(x) = -\frac{(\frac{\partial \psi_r}{\partial x})f(x)}{(\frac{\partial \psi_r}{\partial x})g(x)}$$

Notar que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ no dependen de la elección de ϕ . La estructura del sistema en forma normal se representa (en coordenadas z) en el diagrama de bloques de la Figura



Sistema en forma normal

Dinámica de los ceros

La forma normal tiene una parte “externa”, representada por las variables ξ , y una parte “interna”, representada por las variables η . El control $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ linealiza la parte externa y hace inobservable la parte interna. Haciendo $\xi = 0$ en la primera ecuación tenemos la dinámica de los ceros

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

En resumen, considere un sistema SISO no lineal de forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

Se dice que tiene grado relativo r en el punto x^* , si:

- I) $L_g^k L_f^k h(x) = 0$ para todo x en un entorno de x^0 y todo $k < r - 1$
- II) $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$

Proposición 4.1.3. Supongamos que el sistema tiene un grado relativo r en x^0 . Luego $r \leq n$. Colocar

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= h(x) \\ \phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}$$

Si r es estrictamente menor que n , siempre es posible encontrar $n-r$ más funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ tales que el mapeo

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$$

tiene una matriz Jacobiana que no es singular en x^o y por lo tanto califica como una transformación de coordenadas locales en una vecindad de x^o . El valor en x^o de estas funciones adicionales se puede fijar arbitrariamente. Además, siempre es posible elegir $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ de tal manera que

$$L_g \phi_i(x) = 0 \text{ para todo } r+1 \leq i \leq n \text{ y todo } x \text{ alrededor de } x^o$$

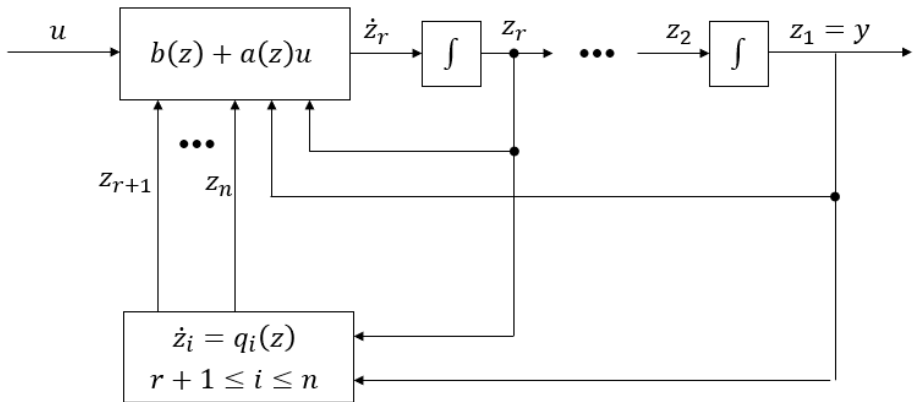
Así, en resumen, la descripción del espacio de estado del sistema en las nuevas coordenadas será la siguiente

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z)\end{aligned}$$

Además de estas ecuaciones, se debe especificar cómo se relaciona la salida del sistema con las nuevas variables de estado. Pero, siendo $y=h(x)$, inmediatamente se ve que

$$y = z_1$$

La estructura de estas ecuaciones se ilustra mejor en el diagrama de bloques de la siguiente figura. Se dice que las ecuaciones así definidas están en forma normal. Los encontraremos útiles para comprender cómo se pueden resolver ciertos problemas de control.



Observación. Nótese que a veces no es fácil construir $n-r$ funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ tales que $L_g \phi_i(x)$, porque esto, como se muestra en la demostración de la Proposición anterior, equivale a resolver un sistema de $n-r$ ecuaciones diferenciales parciales. Por lo general, es mucho más sencillo encontrar funciones $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_n(x)$ con la única propiedad de que la matriz Jacobiana de $\Phi(x)$ no es singular en x^0 , y esto es suficiente para definir una transformación de coordenadas. Usando una transformación construida de esta manera, se obtiene la misma estructura para las primeras r ecuaciones, i. e.

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = z_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{r-1} = z_r$$

$$\dot{z}_r = b(z) + a(z)u$$

pero no es posible obtener nada especial para los últimos $n-r$, que por lo tanto aparecerán en una forma como

$$\dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = q_n(z) + p_n(z)u$$

con la entrada u explícitamente presente.

Ejemplo. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_3$$

Para este sistema tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = (0 \quad 0 \quad 1), \quad L_g h(x) = 0, \quad L_f h(x) = x_2$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} = (0 \quad 1 \quad 0), \quad L_g L_f h(x) = 1$$

Para encontrar la forma normal, establecemos

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

y buscamos una función $\phi_3(x)$ tal que

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \exp(x_2) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = 0$$

Se ve fácilmente que la función

$$\phi_3(x) = 1 + x_1 - \exp(x_2)$$

satisface esta condición. Esta y las dos funciones anteriores definen una transformación $z = \Phi(x)$ cuya matriz jacobiana

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\exp(x_2) & 0 \end{pmatrix}$$

es no singular para todo x . La transformación inversa está dada por

$$x_1 = -1 + z_3 + \exp(z_2)$$

$$x_2 = z_2$$

$$x_3 = z_1$$

tenga en cuenta también que $\Phi(0) = 0$. En las nuevas coordenadas el sistema está descrito por

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = (-1 + z_3 + \exp(z_2))z_2 + u$$

$$\dot{z}_3 = (1 - z_3 - \exp(z_2))(1 + z_2 \exp(z_2))$$

Estas ecuaciones son globalmente válidas porque la transformación que consideramos fue una transformación de coordenadas globales.

Ejemplo. Considere el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = x_3$$

Para este sistema tenemos

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= 0, & L_f h(x) &= x_1 - x_2, \\ L_g L_f h(x) &= 0, & L_f^2 h(x) &= -x_1 - x_2^2, \\ L_g L_f^2 h(x) &= -1(1 + 2x_2)\exp(x_2), \\ L_f^3 h(x) &= -2x_2(x_1 + x_2^2) \end{aligned}$$

Así, vemos que el sistema tiene grado relativo 3 (i. e. igual a n) en cada punto tal que $1 + 2x_2 \neq 0$. Alrededor de cualquiera de estos puntos, por ejemplo, alrededor de $x = 0$, el sistema puede transformarse en un sistema lineal y controlable por medio del control de retroalimentación.

$$u = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} v$$

y el cambio de coordenadas

$$z_1 = h(x) = x_3$$

$$z_2 = L_f h(x) = x_1 - x_2$$

$$z_3 = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$$

Tenga en cuenta que tanto la retroalimentación como el cambio de coordenadas se definen solo localmente alrededor de $x = 0$. En particular, la retroalimentación u no está definida en los puntos x tales que $1 + 2x_2 = 0$ y la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas es singular en estos puntos.

En las nuevas coordenadas, el sistema aparece como

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

que es lineal y controlable.

Concluimos esta sección discutiendo una limitación de la linealización exacta por realimentación. Básicamente, esta técnica de linealización se basa en la cancelación de los terminos no lineales del sistema. Sin embargo, no siempre es buena idea cancelar alinealidades, dado que puede haber alinealidades “convenientes” desde el punto de vista de desempeño del sistema. Ilustramos la idea con un ejemplo.

Ejemplo. (No siempre es bueno cancelar alinealidades). Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

donde a y b son constantes positivas. Podemos tomar el control linealizante y estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x + bx^3, \quad \gamma > 0,$$

que resulta en el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = \gamma x$. Este control cancela el término $-bx^3$, que provee “amortiguamiento no lineal” al sistema. De hecho, este término garantiza que las soluciones del sistema sean acotadas, sin control, y a pesar de que el origen sea inestable. ¿Por qué cancelarlo entonces? Alternativamente, usando el control lineal

$$u = -(\gamma + a)x, \quad \gamma > 0,$$

obtendríamos el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3,$$

cuyo origen es globalmente asintóticamente estable y sus trayectorias se aproximan al origen más rápido que las de $\dot{x} = -\gamma x$. Además, el control lineal es más simple de implementar y usa menos esfuerzo de control.

La idea del ejemplo anterior es ilustrar que la teoría de linealización por realimentación da una herramienta muy valiosa para representar al sistema en una forma en la que todos los términos alineales entran a la ecuación de estado en el mismo punto en que entra el control.

Ejemplo: Considere el modelo del péndulo, definido por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin(\delta)] - bx_2 + cu\end{aligned}$$

diseñe un controlador que estabilice el sistema en el punto de equilibrio por retroalimentación del estado.

El sistema ya se encuentra en la forma controlable, por lo tanto, es posible seleccionar u tal que:

$$u = \frac{a}{c} [\sin(x_1 + \delta) - \sin(\delta)] + \frac{v}{c}$$

Con esta ley de control, el sistema a lazo cerrado queda como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v\end{aligned}$$

Para establecer la dinámica deseada en lazo cerrado, se selecciona

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2$$

Con k_1 y k_2 tal que el polinomio característico sea Hurwitz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2\end{aligned}$$

La ley de control completa queda definida como:

$$u = \frac{a}{c} [\sin(x_1 + \delta) - \sin(\delta)] - \frac{1}{c} [k_1x_1 + k_2x_2]$$

Ejemplo: Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a\sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

diseñe un controlador tal que estabilice al sistema alrededor del punto de equilibrio.

Este sistema no se encuentra en la forma normal, por lo que es necesario hacer una transformación, considerando $y = x_1$

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ a\sin(x_2) \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = z_1 \quad x_2 = \arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \operatorname{acos}(x_2)(-x_1^2 + u)\end{aligned}$$

Lo que equivale a

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \operatorname{acos}\left(\operatorname{arcsin}\left(\frac{z_2}{a}\right)\right)(-z_1^2 + u)\end{aligned}$$

Ya en la forma normal, simplemente se selecciona u tal que

$$u = x_1^2 + \frac{1}{\operatorname{acos}(x_2)} v$$

con $v = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ y $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$

Ejemplo: Considere el modelo del péndulo controlado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2 + cu \\ y &= x_1\end{aligned}$$

diseñe un controlador para que el sistema siga una referencia y_R con derivadas acotadas $\dot{y}_R$ y $\ddot{y}_R$

Considere el error de seguimiento como:

$$\begin{aligned}e_1 &= y - y_R = x_1 - y_R \\ e_2 &= \dot{y} - \dot{y}_R = \dot{x}_1 - \dot{y}_R\end{aligned}$$

Por lo que sus dinámicas están definidas por:

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$e_2 = x_2 - \ddot{y}_R = -a \sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{y}_R$$

Para que el sistema definido por las dinámicas del error se estabilice en cero, considérese el siguiente sistema:

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$e_2 = -a \sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{y}_R$$

El cual en las coordenadas del error se describe como

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$e_2 = -a \sin(e_1 + y_R) - b(e_2 + \dot{y}_R) + cu - \ddot{y}_R$$

El cual ya está en forma normal y es posible despejar u como:

$$u = \frac{1}{c} [a \sin x_1 + bx_2 + \ddot{y}_R + k_1 e_1 + k_2 e_2]$$

donde k_1 y k_2 se selecciona de tal forma que el polinomio sea Hurwitz ($a = b = c = 1$), ($k_1 = 1600$ y $k_2 = 40$)

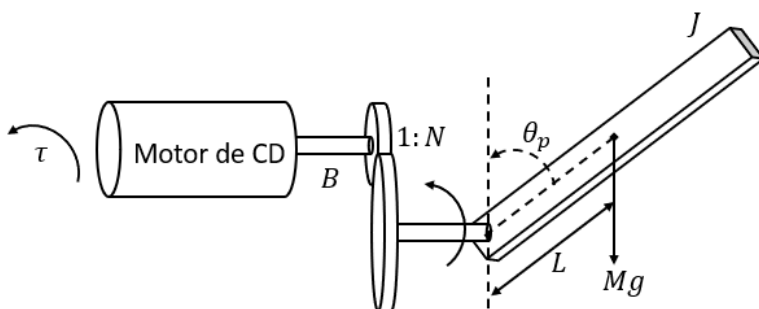
Ejemplo: Diseñe un controlador para estabilizar un manipulador robótico de una sola unión rígida en cualquier punto de referencia $[x_{1R} \ 0]^T$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{B}{J}x_2 - \frac{C}{J}\sin\left(\frac{x_1}{N}\right) + \frac{1}{J}u$$

Considerando como variables de estado posición y velocidad angular, respectivamente. El torque aplicado es la acción de control, N corres-

ponde al factor de reducción angular del juego de engranes que acopla el eje del motor con el eje del brazo manipulador. B es el coeficiente de fricción viscosa y J es el momento de inercia con $C = MgL$ siendo M la masa del brazo, L la longitud del eje al centro de masas del brazo manipulador y g la gravedad.



En este caso, el modelo del sistema ya está en forma normal por lo que es posible determinar directamente u para estabilizar el péndulo en una posición de referencia deseada mediante un cambio a las coordenadas del error de estabilización, definido como:

$$e_1 = x_1 - x_{1R}$$

$$e_2 = x_2 - x_{2R}$$

Y sus dinámicas están definidas por:

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1R} = \dot{x}_1$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2R} = \dot{x}_2$$

Por lo tanto, el sistema a estabilizar queda como:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= x_2 \\ \dot{e}_2 &= -\frac{B}{J}x_2 - \frac{C}{J}\sin\left(\frac{x_1}{N}\right) + \frac{1}{J}u\end{aligned}$$

En las nuevas coordenadas $x_2 = e_2$, dado que $x_{2R} = 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\frac{B}{J}e_2 - \frac{C}{J}\sin\left(\frac{e_1 + x_{1R}}{N}\right) + \frac{1}{J}u\end{aligned}$$

De donde se puede despejar u , tal que

$$u = Be_2 + c \sin\left(\frac{e_1 + x_{1R}}{N}\right) + v$$

Considerando $v = -k_1 e_1 - k_2 e_2$

$$u = Be_2 + c \sin\left(\frac{e_1 + x_{1R}}{N}\right) - k_1 e_1 - k_2 e_2$$

Regresando a las variables originales

$$u = Bx_2 + c \sin\left(\frac{x_1}{N}\right) - k_1(x_1 - x_{1R}) - k_2 x_2$$

Ejemplo: Para el siguiente sistema, diseñe un controlador que garantice la estabilidad del sistema ante perturbaciones variantes en el tiempo, desconocidas pero acotadas

$$\dot{x} = x^3 + u + x\delta_0(t)$$

Considerando una función candidata de Lyapunov $V(x) = x^2$, se tiene:

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = 2x(x^3 + u + x\delta_0(t))$$

$$\dot{V}(x) = 2x^4 + 2xu + 2x^2\delta_0(t)$$

Seleccionando $u = -x^3 - x$

$$\dot{V}(x) = 2x^4 - 2x^4 - 2x^2 + 2x^2\delta_0(t)$$

$$\dot{V}(x) = -2x^2 + 2x^2\delta_0(t)$$

$$\dot{V}(x) = -2x^2(1 - \delta_0(t))$$

con $\delta_0(t) < 1$ se asegura la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado

Capítulo 7

Observadores de estado

En el capítulo anterior se estudió la estructura de la retroalimentación del estado de un sistema, en el que se supuso que todas las variables de estado de la parte controlable eran medibles y cuyos valores podían utilizarse de forma inmediata en dicha estructura de control. Las variables de estado son, sin embargo, en el caso más genérico, variables internas de funcionamiento del sistema cuyos valores no pueden medirse directamente sobre magnitudes físicas de este. En este caso general, los valores de las variables de estado que se requieren conocer para efectuar la retroalimentación han de ser calculados a partir de la evolución de las señales conocidas del sistema, que son sus salidas y sus entradas. El cálculo de las variables de estado se realiza en el sistema denominado **observador**.

7.1 Diseño del observador para sistemas lineales

Si un sistema es controlable, entonces por retroalimentación del estado se puede asignar cualquier polinomio característico en lazo cerrado. Supóngase, que por alguna razón las variables de estado del sistema no son accesibles. Entonces es necesario estimarlos, para lo cual se utiliza lo que se conoce como observador o estimador de estado.

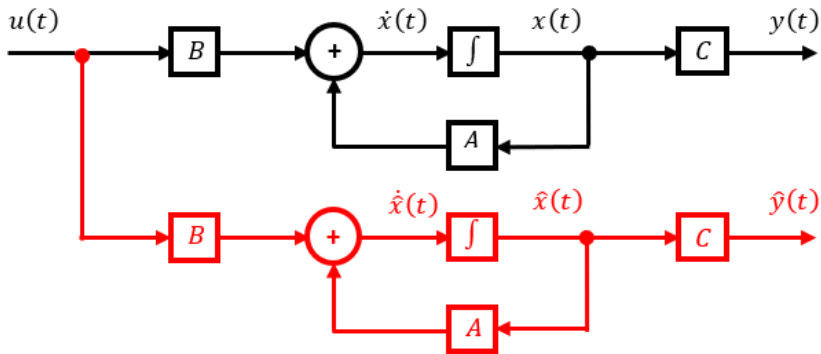
El problema entonces, se reduce a ¿Cómo determinar el estado $x(t)$, $t > 0$ del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y de la salida $y(t)$?

a) Observador en lazo abierto

Se construye una copia del sistema, cuyas variables de estado SI son accesibles, evidentemente si conocemos x_0 (si el sistema es observable entonces se puede determinar x_0), entonces este nuevo sistema puede estimar el estado



Problemas:

- 1) Perturbaciones
- 2) Errores

Si la condición inicial no es exacta

$$\hat{x}(0) = x_0 + \varepsilon \quad \|\varepsilon\| \ll \|x_0\|$$

entonces el estado estimado no corresponde con $x(t)$
sino $\hat{x}(t)$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t); \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = x_0 + \varepsilon$$

entonces el error será

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

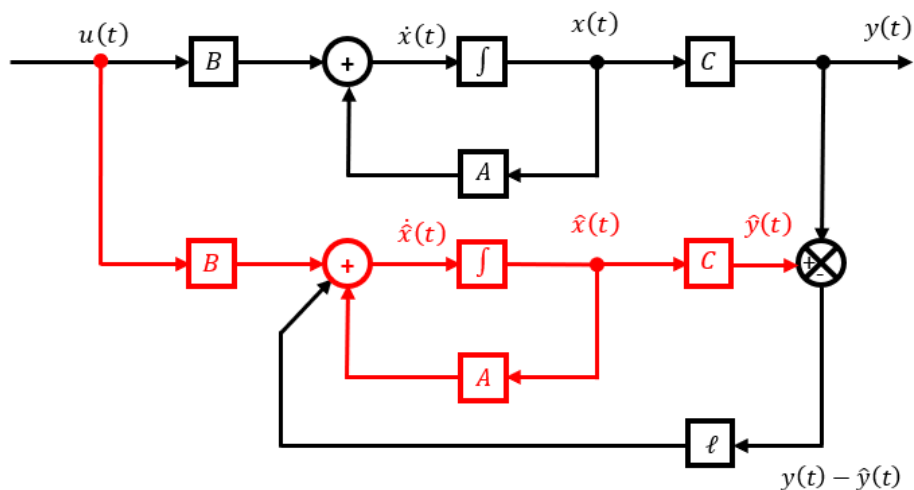
cuya dinámica

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t); \quad \tilde{x}(0) = \varepsilon$$

por lo tanto, dependiendo de los valores propios de A , el error puede ser

estable o inestable. Una forma de resolver estos problemas es usando retroalimentación.

b) Observador en lazo cerrado



La señal de error será

$$y(t) - \hat{y}(t) = Cx(t) - C\hat{x}(t) = C\tilde{x}(t)$$

entonces

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + \ell[Cx(t) - C\hat{x}(t)]$$

con $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$

donde $\hat{x}_0$ es el vector de condiciones iniciales del observador y ℓ es el vector de retroalimentación que sirve para “controlar” el error $\tilde{x}(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + \ell Cx(t) - \ell C\hat{x}(t)] \\ &= A\tilde{x}(t) - \ell C\tilde{x}(t) = (A - \ell C)\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

Entonces el problema se reduce a asignar el vector ℓ de manera tal que el error $\tilde{x}(t)$ tienda a cero tan rápido como se considere necesario (debido a esto se le conoce como observador asintótico). Esto equivale a decir que debe existir ℓ tal que los valores propios de la matriz $(A - \ell C)$ puedan ser arbitrariamente asignados.

Teorema. Existe un vector ℓ tal que

$$\det(sI - A + \ell C) = \alpha(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n$$

donde $\alpha(s)$ es un polinomio cualquiera si y solo si el sistema es observable, el vector ℓ estará dado por

$$\ell = \sigma^{-1}(T^{-1})^T(\alpha - a)^T$$

donde

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_n]$$

$$a = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

y $a(s)$ es el polinomio característico del sistema $a(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$

Nota: Se recomienda que los polos del observador sean de 2 a 5 veces más rápidos que los polos del sistema.

Ejemplo. Diseñar un observador de estado para el siguiente sistema con polos en

$$s = -3 \text{ y } s = -3$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \alpha(s) = (s+3)(s+3) = s^2 + 6s + 9$$

$$y(t) = [1 \quad -1]x(t) \quad a(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 2s + 1$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ OBSERVABLE}$$

$$\ell = \sigma^{-1}(T^{-1})^T(\alpha - a)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T ([6 \quad 9] - [2 \quad 1])^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Tarea. Comprobar la asignación de polos y en simulación.

7.2 Esquema controlador-observador para sistemas lineales

Ahora se analizará el comportamiento del sistema (A, B, C) cuando es retroalimentado, no con el estado $x(t)$ (que no es accesible), sino con el estado estimado $\hat{x}(t)$ del observador, es decir la ley de control queda como:

$$u(t) = -k\hat{x}(t) + v(t)$$

Las ecuaciones que describen al sistema compuesto son:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bk\hat{x}(t) + Bv(t)$$

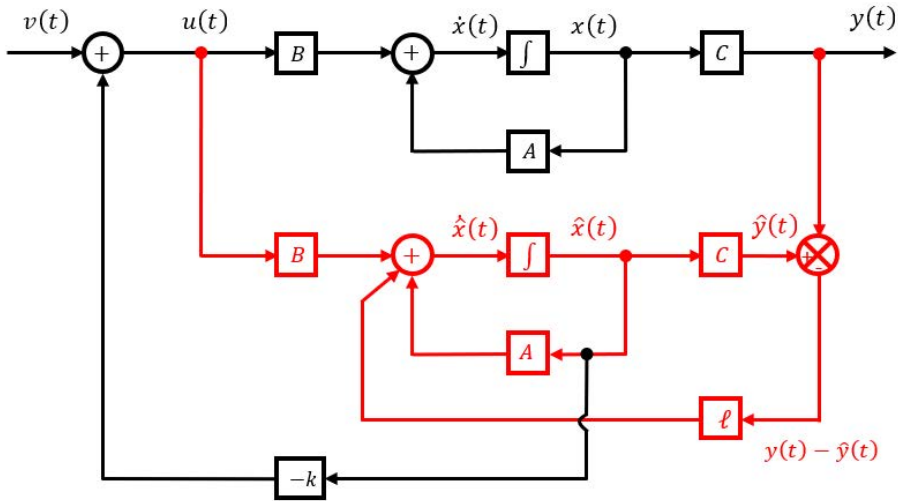
$$x(0) = x_0$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \ell Cx(t) + (A - \ell C - Bk)\hat{x}(t) + Bv(t)$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Las cuales pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -Bk \\ \ell C & A - \ell C - Bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v(t)$$



En primer lugar, es necesario obtener la función de transferencia del sistema compuesto para lo cual se obtiene la transformada de Laplace de ambos sistemas

$$sX(s) = AX(s) + Bk\hat{X}(s) + BV(s) \quad (1)$$

$$s\hat{X}(s) = \ell CX(s) + (A - \ell C - Bk)\hat{X}(s) + BV(s) \quad (2)$$

despejando $\hat{x}(s)$ de (2) se tiene

$$\hat{X}(s) = (sI - A + \ell C + Bk)^{-1} \ell CX(s) + (sI - A + \ell C + Bk)^{-1} BV(s)$$

y reemplazando $\hat{x}(s)$ en (1), se tiene

$$sX(s) = AX(s) + Bk[(sI - A + \ell C + Bk)^{-1}\ell CX(s) + (sI - A + \ell C + Bk)^{-1}BV(s)] + BV(s)$$

reagrupando

$$[sI - A + Bk(sI - A + \ell C + Bk)^{-1}\ell C]X(s) = [I - Bk(sI - A + \ell C + Bk)^{-1}]BV(s)$$

que puede reescribirse como

$$[I - Bk(sI - A + \ell C + Bk)^{-1}]^{-1}\{(sI - A + \ell C) - [I - Bk(sI - A + \ell C + Bk)^{-1}]\ell C\}X(s) = BV(s)$$

Haciendo uso de la siguiente fórmula matricial

$$I - P(sI - Q + RP)^{-1} = [I + P(sI - Q)^{-1}R]^{-1}$$

se tiene que

$$I - \underbrace{Bk}_P \left(\underbrace{sI - A + \ell C}_{sI - Q} + \underbrace{Bk}_P \right)^{-1} = [I + Bk(sI - A + \ell C)^{-1}]^{-1}$$

$$P = I$$

Entonces

$$[I + Bk(sI - A + \ell C)^{-1}]\{(sI - A + \ell C) - [I + Bk(sI - A + \ell C)^{-1}]^{-1}\ell C\}X(s) = BV(s)$$

de lo cual se obtiene

$$[sI - A + \ell C + Bk - \ell C]X(s) = BV(s)$$

de donde

$$X(s) = (sI - A + Bk)^{-1}BV(s)$$

y como

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A + Bk)^{-1}BV(s)$$

entonces la función de transferencia del sistema compuesto queda como:

$$H(s) = C(sI - A + Bk)^{-1}B$$

Nótese que la función de transferencia del sistema compuesto corresponde también a la función de transferencia del sistema (A, B, C) retroalimentado por $u(t) = -kx(t) + v(t)$. Es decir, la función de transferencia del sistema compuesto **no** depende de la dinámica del observador.

El problema ahora consiste en determinar si el observador no introduce modos inestables al sistema (cuando se tienen sistemas interconectados, puede ocurrir que el sistema compuesto sea inestable, aun cuando los subsistemas sean estables)

Los modos del sistema compuesto corresponden a los valores propios de la matriz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & -Bk \\ \ell C & A - \ell C - Bk \end{bmatrix} & \quad \text{sea } a_{o-c}(s) \text{ su polinomio característico} \\ a_{o-c}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & Bk \\ -\ell C & A - \ell C - Bk \end{bmatrix} &= \det \left\{ \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A + \ell C & 0 \\ -\ell C & sI - A + Bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\} \\ &= \det(sI - A + \ell C) \cdot \det(sI - A + Bk) \\ &= a_{obs}(s) \cdot a_{cont}(s) \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que el polinomio característico del sistema compuesto es igual al producto de los polinomios característicos del observador y del sistema retroalimentado. Es decir, si $a_{obs}(s)$ y $a_{cont}(s)$ son estables entonces $a_{o-c}(s)$ es estable también.

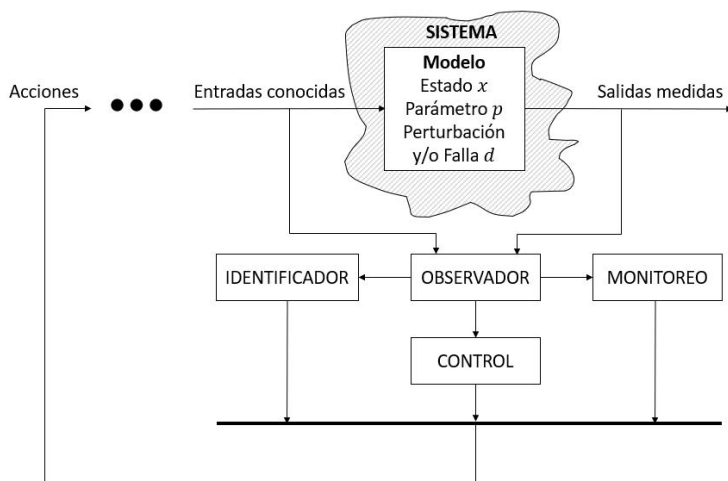
Otra consecuencia importante que se deduce de esto es que el observador y el controlador pueden diseñarse de manera independiente. A esto se le conoce como el principio de separación.

7.3 Observador no lineal

G. Besançon, Nonlinear Observers and Applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences 363, Springer Berlin Heidelberg, 2009

El problema del diseño del observador surge naturalmente en un enfoque sistémico, tan pronto como se necesita alguna información interna procedente de mediciones externas (directamente disponibles). De hecho, en general, está claro que no se pueden utilizar tantos sensores como señales de interés que caractericen el comportamiento del sistema (por razones de coste, limitaciones tecnológicas, etc.), sobre todo porque dichas señales pueden llegar en cantidades bastante grandes y pueden ser de varios tipos: normalmente incluyen señales variables en el tiempo que caracterizan el sistema (variables de estado), constantes (parámetros) y externas no medidas (perturbaciones).

Esta necesidad de información interna puede estar motivada por varios propósitos: modelar (identificar), monitorear (detección de fallas) o conducir (controlar) el sistema. En realidad, todos esos propósitos son necesarios conjuntamente cuando se pretende mantener un sistema bajo control, como se resume en la siguiente figura:



Esto hace que el problema de la reconstrucción -u observador- sea el corazón de un problema de control general. El objetivo aquí será, por tanto, ofrecer una visión general de algunas posibles herramientas para el diseño del observador (los problemas relacionados de control, detección de fallos o identificación de parámetros): en resumen, un observador se basa en un modelo, con adaptación basada en las mediciones disponibles y orientada a la reconstrucción de la información, es decir, puede caracterizarse como un reconstructor de información de circuito cerrado, basado en modelos y mediciones. Por lo general, el modelo es una representación del espacio de estado, y aquí se asumirá que toda la información que se va a reconstruir nace de variables de estado. Frente a esto, se puede intentar diseñar un sistema dinámico explícito cuyo estado debería dar una estimación del estado real del modelo considerado, o simplemente resolver el problema como uno de optimización. En cuanto al modelo considerado, en general puede ser de tiempo continuo o discreto, determinista o estocástico, de dimensión finita o infinita, suave o “con singularidades”.

Pero para dar una presentación bastante consistente, por lo pronto se considera el caso de descripciones de espacio-estado suaves, de dimensión finita, deterministas y de tiempo continuo, aunque algunos elementos del diseño del observador se pueden encontrar para otros casos en la literatura, en particular para el caso discreto. En terminología de control, un sensor virtual para la estimación de las variables de estado es llamado observador de estado (o simplemente observador) mientras para la estimación de parámetros del modelo internos, es llamado estimador paramétrico. Hoy en día se hace referencia también al concepto de gemelo digital, que en términos de sistemas dinámicos corresponde a un observador.

Luenberger y Kalman introdujeron los primeros observadores en 1960. La investigación sobre el diseño de los observadores ha continuado con la finalidad de incrementar su precisión y desempeño, haciendo frente a problemas tales como perturbaciones, desajustes y fallas en los procesos. Muchos de los observadores son modificaciones del observador de Luenberger y el filtro de Kalman. Mohd Ali, Ha Hoang, Hussain y Dochain en 2015, realizaron una revisión de los observadores aplicados en procesos químicos desde el año 2000 hasta el 2015, y los clasificó en seis clases

llamados: observadores basados en el observador de Luenberger, sistemas de observadores de dimensión finita, estimadores Bayesianos, observadores de detección de fallas y perturbaciones, observadores basados en inteligencia artificial y observadores híbridos. Los observadores basados en el observador de Luenberger son versiones extendidas del observador clásico de Luenberger. El observador extendido de Luenberger, el observador de modos deslizantes, el observador de estado adaptativo.

Los observadores de dimensión finita, incluyen:

- a) Observador de orden reducido,
- b) Observador de bajo orden,
- c) Observador de alta ganancia,
- d) Observador asintótico y
- e) Observador exponencial

Estos observadores son empleados para procesos químicos donde su dinámica es representada por ecuaciones diferenciales ordinarias, además de que se ajustan a sistemas con poca información de la cinética de reacción, con la desventaja de que la precisión de la convergencia es incierta. Los observadores bayesianos proveen una aproximación basada en la estimación de la probabilidad de la distribución de las variables de estado utilizando la información disponible del sistema.

Estos observadores suponen que todas las variables son estocásticas en la naturaleza y por lo tanto, la distribución de las variables de estado es alcanzable basada en las variables medidas. Son altamente apropiados para una rápida estimación. Sin embargo, la complejidad computacional envuelta al usar esta aproximación la hace inalcanzables para sistemas de alta dimensión (varias ecuaciones de estado). Ejemplos de este tipo de observadores son el filtro de Kalman extendido, filtro de partículas y estimador de movimiento horizontal. Los observadores de detección de fallas y de perturbaciones son aplicados para estimar irregularidades en el sistema, ya sean por fallas o perturbaciones, lo cual provee de una temprana advertencia a los operadores antes de causar una interrupción en el proceso. Los observadores de detección de fallas también son aplicados para estimar parámetros para el diagnóstico de fallas en procesos químicos. Entre los ejemplos de este tipo de observadores tenemos al

observador de perturbaciones, al observador de perturbaciones modificado y al observador no lineal de entradas desconocidas.

Los observadores de inteligencia artificial son basados en métodos de lógica difusa, redes neuronales artificiales, sistemas expertos y algoritmos genéticos. Son adecuados para sistemas con la estructura del modelo incompleto y con poca información del sistema. Sin embargo, son difíciles de implementar y conlleva mucho tiempo. Los observadores híbridos son combinaciones de más de un observador para mejorar la estimación del estado. Un ejemplo de estos sistemas es el observador de Luenberger combinado con el observador asintótico, el primero provee una buena convergencia mientras que el segundo, estima los parámetros con poca o nula información de la dinámica del sistema. La desventaja de estos observadores es que escoger la combinación adecuada puede ser tediosa y tardada.

Los observadores de estado son modelos (matemáticos, computacionales o en hardware) que reconstruyen la evolución en el tiempo del vector de estado real de un sistema, sobre la base de mediciones relacionadas las cuales son más fácilmente accesibles, y empleando un modelo matemático del sistema de interés. En simples palabras, los observadores son herramientas que, a partir de las mediciones obtenidas por varios sensores físicos, realizan una estimación de las variables del proceso que no se pueden medir en tiempo real. El programa reproduce el sistema observado dándole la información de cuáles son los estímulos (entradas) que recibe el proceso real, de aquí el término de gemelo digital. Una segunda fuente de información útil para el observador son los datos que recibe del monitoreo de los resultados del sistema (salidas). Frecuentemente, muchas de las variables de un biorreactor, tales como las concentraciones de biomasa, sustratos y metabolitos, generalmente necesitan ser determinadas a través de análisis de laboratorio. El costo y duración de estos análisis limitan la frecuencia del muestreo. Además, a pesar de que existen sensores en línea para biomasa y algunos metabolitos, estos no son lo suficientemente robustos para aplicaciones industriales rutinarias.

El problema del diseño de observadores para control de sistemas lineales fue introducido por vez primera por David Luenberger en 1966

y para control de sistemas no lineales fue propuesto por Thau en 1973, desde entonces se ha tenido mucho interés en la construcción de observadores para el control de sistemas no lineales, considerando diferentes clases de sistemas bajo ciertas hipótesis relacionadas a los parámetros del sistema y la información disponible.

Diseño del observador no lineal

Un sistema autónomo no lineal con entradas y salidas medibles puede ser representado en espacio de estado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^q$ denota el vector de entradas externas conocidas, por último $y \in \mathbb{R}^p$ denota el vector de salidas medible. El observador es un sistema auxiliar de la forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(x(t), u(t), y(t))$$

tal que:

1. $\dot{\hat{x}}(0) = \dot{x}(0) \rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t) \quad \forall t \geq 0$
2. $\|\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)\| \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$

Si la segunda condición se mantiene para cualquier $\dot{x}(0), \dot{\hat{x}}(0) = \dot{x}$, el observador es global. Si $\dot{\hat{x}}(t)$ converge asintóticamente a $\dot{x}(t)$, entonces el observador se conoce como asintótico. Si el vector de estado estimado cumple con $\|\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)\| \leq h_0 \|\dot{\hat{x}}(0) - \dot{x}(0)\| e^{-\gamma t}$ donde las constantes $\gamma > 0$ y $h_0 > 0$, entonces el observador es exponencial. Si la segunda condición se mantiene con una velocidad de convergencia la cual puede ser ajustable, el observador es sintonizable mediante su ganancia. La diferencia $\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)$ es llamada error de observación. Usualmente se desea que la

distancia $\hat{x}(t) - x(t)$ tienda a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

La construcción de observadores para sistemas no lineales es muy interesante y existen varios métodos disponibles. A continuación, se presenta algunos observadores clásicos en teoría de control, ampliamente usados en bioprocesos, estos son: el observador de Luenberger, el filtro de Kalman, el filtro de Kalman extendido, el observador de alta ganancia y el observador de modos deslizantes.

Observador de Luenberger

El observador de Luenberger es un estimador de estado para sistemas dinámicos lineales. La idea en la cual se basa este observador es en generar un sistema clon o gemelo del original, al cual sí se le pueda medir el estado interno. Si el sistema original y su clon son sometidos a los mismos estímulos (la misma entrada), se puede esperar que, a medida que pase el tiempo, se comiencen a comportar del mismo modo debido a que su estado interno tiende a ser idéntico (lo anterior funciona siempre que el sistema original y su clon sean estables). De este modo, el estado interno del clon se puede usar como una aproximación del estado interno del sistema original.

Para acelerar la convergencia del estado del sistema clon al estado del sistema original, se puede estimular al clon con una entrada corregida, que consiste en la misma entrada que el sistema original más la diferencia entre la salida de los dos sistemas multiplicada por una constante. De este modo, se logra modificar la dinámica del sistema clon, de modo que logre estimar el estado del sistema original en un tiempo arbitrariamente pequeño (al menos en teoría). Es decir, el clon es capaz de observar tanto la entrada del sistema original como la diferencia entre su salida y la del sistema original, lo que le permite converger más rápido. A continuación, se presenta una explicación más rigurosa de lo anterior. Considere un sistema autónomo lineal con entradas y salidas como sigue

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

con $x(0) = x_0 \neq 0$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^q$ es el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salidas medibles continuo y diferenciable y C es la matriz de mediciones. Las matrices (A, B, C) son perfectamente conocidas. El estimador de estado está compuesto por una reproducción del sistema más un término adicional de corrección. La arquitectura del observador es:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

donde L es la matriz de ganancias del observador. El observador reproduce la entrada y la salida del sistema y además corrige la ecuación dinámica con un término que es proporcional al error entre la salida del sistema real y la salida estimada. Se define el error del estado real del sistema y el estado estimado como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Entonces, la dinámica del error, será:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC) e(t)$$

La solución a la ecuación dinámica del error es:

$$e(t) = \exp^{(A-LC)t} e(0)$$

De tal forma que si los valores propios de $(A-LC)$ tienen todos parte real negativa, el error $e(t)$ tiende a cero, sin importar su condición inicial. Lo que significa que el observador de Luenberger a medida que pasa el tiempo, mejora asintóticamente la estimación del estado. Por lo que el problema se reduce a una adecuada selección de la ganancia L , tal que el error de estimación del estado converja a cero conforme el tiempo tiende a infinito. El observador de Luenberger puede ser usado tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. La selección de la ganancia del observador es un parámetro libre y es importante para lograr que la

dinámica del error tenga un comportamiento asintótico. Normalmente, se realiza un diseño mediante ubicación de polos para la sintonización de las ganancias. Entre las desventajas de este observador se encuentra en que se basa en la estructura perfectamente conocida del modelo y puede tener error en la estimación debido al ruido en las mediciones.

Observador de Kalman

El filtro de Kalman u observador de Kalman, fue publicado en 1959, es el estimador óptimo para modelos de sistemas lineales con ruido blanco aditivo. Debido a que la mayoría de los sistemas son no lineales, este observador fue adaptado mediante expansiones de series de Taylor multivariables, para linealizar un modelo alrededor de un punto de equilibrio. Considere un sistema autónomo lineal con entradas y salidas como sigue

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

Con $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$, uniformemente acotadas. Para este tipo de sistemas se tiene el siguiente resultado.

Si el sistema es uniformemente y completamente observable, entonces existe un observador de la forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - K(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t))$$

con $K(t)$ definido como:

$$K(t) = M(t) C^T(t) W^{-1}$$

$$\dot{M}(t) = A(t)M(t) + M(t)A^T(t) - M(t)C^T(t)W^{-1}C(t)M(t) + V + \delta M(t)$$

$$M(0) = M_0 = M_0^T > 0$$

$$W = W^T > 0$$

$$V = V^T > 0$$

Para cualquier $\delta > 2\|A(t)\| \quad \forall t$ donde W y V son matrices de varianza. Es importante mencionar que:

1. La velocidad de convergencia puede ser sintonizada con δ o V
2. Para $\delta = 0$ se obtiene el observador clásico de Kalman, la usual condición de convergencia, siendo que (A, V) son uniformemente, completamente observables.
3. La ganancia del observador también puede ser calculada como

$$K(t) = S^{-1}(t)C^T(t)W^{-1}$$

donde S es la solución de

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= -A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)W^{-1}C(t) - \delta S(t) - S(t)V(t)S^T(t) \\ S(0) &= S^T(0) > 0\end{aligned}$$

La cual la hace una ecuación lineal en S siempre que sea seleccionado igual a cero

Filtro de Kalman Extendido

El Filtro de Kalman Extendido (EKF) u Observador de Kalman Extendido (EKO), es la versión no lineal del filtro de Kalman el cual linealiza alrededor de una estimación de la media actual y la covarianza, en el caso de modelos de transición bien definidos. Este observador es considerado el estándar en la teoría de la estimación de estado no lineal. Considere el siguiente sistema no lineal de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

El correspondiente filtro de Kalman extendido está dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - K(t) (h(\hat{x}(t)) - y(t))$$

donde $K(t)$ está dado como en el observador lineal de Kalman con:

$$A(t) = \frac{\partial f(\hat{x}(t), u(t))}{\partial x}$$

$$C(t) = \frac{\partial h(\hat{x}(t))}{\partial x}$$

Observador de alta ganancia

Para un sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax + g(y, u)$$

$$y = Cx$$

con g que depende de la salida y la entrada, si (A, C) es observable, se puede diseñar un observador de alta ganancia de la forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(y, u) + HC(x - \hat{x})$$

por lo tanto

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\tilde{x}$$

y ubicando adecuadamente los polos de $(A - HC)$

Ejemplo: Diseñe un observador para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1^2 u^2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(y, u) + HC(x - \hat{x})$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], \quad g(x, u) = \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ x_1^2 u^2 \end{bmatrix}$$

Observadores para sistemas con bifurcación

Considere un sistema no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \lambda) \\ y &= h(x, \lambda)\end{aligned}$$

Que puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x, \lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= h(x, \lambda)\end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^k$ un vector de parámetros, tal que en $\lambda = 0$ se da una bifurcación y que tiene un punto de equilibrio estable en $(x, \lambda) = (0, 0)$, se puede diseñar un observador exponencialmente estable definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\hat{x}, \hat{\lambda}) \\ 0 \end{bmatrix} + K^*[y - h(\hat{x}, \hat{\lambda})]$$

con K^* tal que $(A^* - K^* C^*)$ es Hurwitz y

$$C^* = [C \quad D]$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal que

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad P = \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)}, \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right|_{(0,0)}$$

Ejemplo: Diseñe un observador para un Oscilador de Van der Pol

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (\lambda - x_1^2)x_2$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

$$y = x_1 + \lambda + x_1^2 x_2^3$$

$$C^* = [1 \quad 0 \quad 1]$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El observador queda como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ -\hat{x}_1 + (\lambda - \hat{x}_1^2)\hat{x}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [y - \hat{x}_1 - \hat{\lambda} - \hat{x}_1^2\hat{x}_2^3]$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}_1^2\hat{x}_2^3 + \hat{\lambda} + y \\ -2\hat{x}_1 + (\lambda - \hat{x}_1^2)\hat{x}_2 - \hat{x}_1^2\hat{x}_2^3 + \hat{\lambda} + y \\ -\hat{x}_1 - \hat{x}_1^2\hat{x}_2^3 + \hat{\lambda} + y \end{bmatrix}$$

7.4 Resumen de observadores no lineales

Jarinah Mohd Ali, N. Ha Hoang, M.A. Hussain, Denis Dochain, Review and classification of recent observers applied in chemical process systems, Computers & Chemical Engineering, Volume 76, 2015

Los observadores no lineales que se han publicado hasta la fecha se pueden clasificar en seis grandes grupos:

1. Observadores tipo Luenberger
 - a. Observador extendido de Luenberger
 - b. Observador de modos deslizantes
 - c. Observadores adaptables
 - d. Observadores de alta ganancia
 - e. Observadores recursivos
 - f. Observadores geométricos
 - g. Observadores tipo backstepping
2. Observadores de dimensión finita
 - a. Observadores de orden reducido
 - b. Observadores de bajo orden
 - c. Observadores de alta ganancia
 - d. Observadores asintóticos
 - e. Observadores exponenciales
 - f. Observadores integrales

g. Observadores por intervalos

3. Estimadores Bayesianos

- a. Filtro de partículas
- b. Filtro de Kalman extendido
- c. Otros filtros de Kalman
- d. Estimador de horizonte móvil

4. Observadores de perturbaciones y detección de fallas

- a. Observadores de perturbaciones
- b. Observadores de orden fraccional
- c. Observadores con entradas desconocidas
- d. Observadores con entradas no lineales
- e. Observadores proporcionales modificados

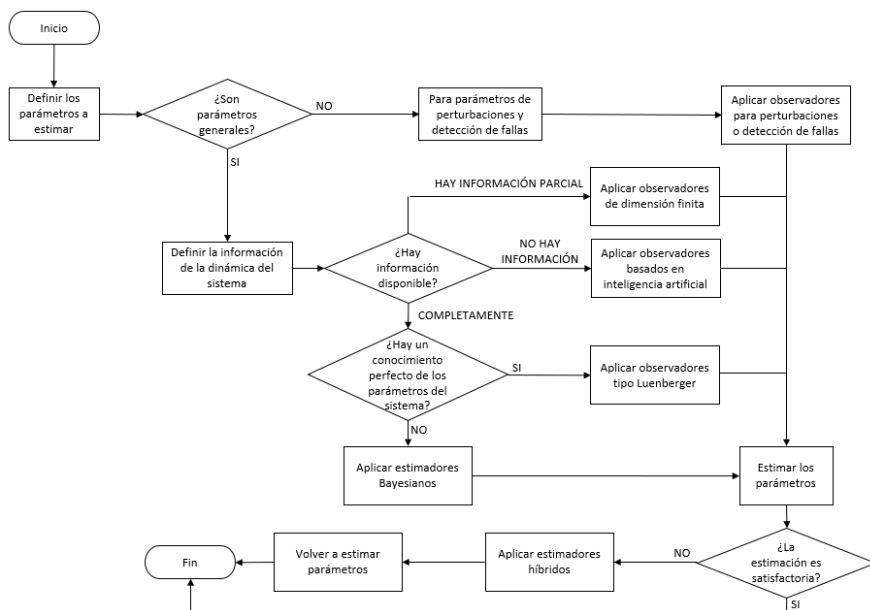
5. Observadores basados en inteligencia artificial

- a. Observadores neuronales
- b. Observadores difusos
- c. Observadores bioinspirados
- d. Otros observadores inteligentes

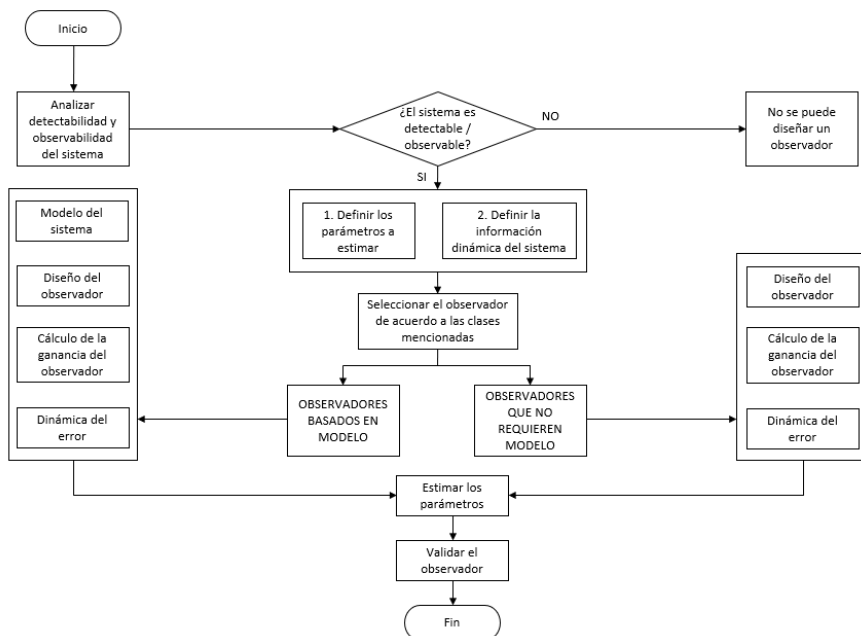
6. Observadores híbridos

- a. Observador Luenberger extendido asintótico
- b. Observador proporcional-integral
- c. Observador de modos deslizantes proporcional
- d. Otros observadores

El procedimiento general para seleccionar el observador adecuado se puede resumir de la siguiente manera:



Mientras que la metodología general para el diseño de un observador es:



Capítulo 8

Apéndice

El filtro de Kalman en tiempo discreto

Conceptos de estimación óptima

Suponga la siguiente expresión observable:

$$y_k = x_k + v_k$$

donde x_k es una señal desconocida y v_k es un ruido aditivo. Sea $\hat{x}_k$ el estimado a posteriori de la señal x_k , dadas las observaciones $y_1, y_2, \dots, y_k$. En general, el estimado $\hat{x}_k$ es diferente de la señal desconocida x_k . Para deducir este estimado de una forma óptima, se necesita una función de costo (perdida) para estimados incorrectos. La función de costo debe satisfacer los siguientes requisitos:

- La función de costo es no-negativa
- La función de costo es una función no-decreciente del error de estimación, definido por:

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$$

Estos dos requisitos se satisfacen por la esperanza del error al cuadrado, definido por:

$$J_k = E\{(x_k - \hat{x}_k)^2\}$$

$$J_k = E\{\tilde{x}_k^2\}$$

donde E es el operador del valor esperado. La dependencia de la función de costo J_k sobre el tiempo k enfatiza la naturaleza no estacionaria del proceso recursivo de estimación.

Para deducir un valor óptimo para el estimado $\hat{x}_k$, se invocan los siguientes teoremas:

Teorema 1. Estimador de esperanza condicional. Si el proceso estocástico $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ son conjuntamente Gaussianos, entonces el estimado

óptimo $\hat{x}_k$ que minimiza el error medio cuadrático J_k es el estimador de media condicional:

$$\hat{x}_k = E\{x_k | y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

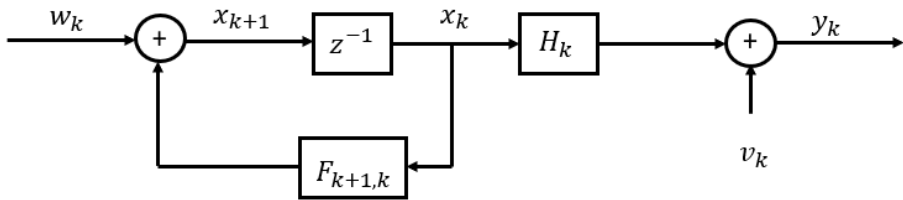
Teorema 2. Principio de ortogonalidad. Sea un proceso estocástico $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ con medias cero, tal que:

$$E\{x_k\} = E\{y_k\} = 0 \quad \forall k$$

Entonces:

- I) El proceso estocástico $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ son conjuntamente Gaussianos; o
- II) Si el estimado óptimo $\hat{x}_k$ está restringido a ser una función lineal de los observables y la función de costo es el error medio cuadrático,
- III) Entonces el estimado óptimo $\hat{x}_k$, dados los observables $y_1, y_2, \dots, y_k$, es ortogonal a la proyección de x_k en el espacio generado por dichos observables.

El filtro de Kalman en tiempo discreto



Ecuación del proceso

$$x_{k+1} = F_{k+1,k}x_k + w_k \quad (1)$$

donde F_{k+1} es la matriz de transición de estados del tiempo k al tiempo k

+ 1, x_k es el estado al tiempo k , w_k es el ruido del proceso (blanco, Gaussiano, con media cero). La matriz de covarianza del ruido de proceso se define como:

$$E\{w_n w_k^T\} = \begin{cases} Q_k & \text{para } n = k \\ 0 & \text{para } n \neq k \end{cases} \quad (2)$$

Ecuación de la salida

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (3)$$

donde H_k es la matriz de medición, y_k es la salida del proceso (observable al tiempo k), v_k es el ruido de medición (blanco, Gaussiano, con media cero). La matriz de covarianza del ruido de medición se define como:

$$E\{v_n v_k^T\} = \begin{cases} R_k & \text{para } n = k \\ 0 & \text{para } n \neq k \end{cases} \quad (4)$$

Además, el ruido de medición es descorrelacionado del ruido del proceso.

Deducción del filtro de Kalman discreto

Se desea usar la información contenida en la nueva medición y_k para actualizar el estimado del estado desconocido x_k . Sea $\hat{x}_k^-$ el estimado a priori del estado que estará disponible al tiempo k . Podemos expresar el estimado a posteriori como $\hat{x}_k$ como una combinación lineal del estimado a priori y la nueva medición, como sigue:

$$\hat{x}_k = G_k^{(1)} \hat{x}_k^- + G_k y_k \quad (5)$$

El vector de error de estimación se define como:

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k \quad (6)$$

Aplicando el principio de ortogonalidad podemos escribir:

$$E\{\tilde{x}_k y_i^T\} = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (7)$$

Usando (3), (5) y (6) en (7) se tiene:

$$E\left\{\left(x_k - G_k^{(1)} \hat{x}_k^- - G_k H_k x_k - G_k v_k\right) y_i^T\right\} = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (8)$$

La solución a la ecuación de estado (1) al tiempo i es:

$$x_i = F_{i,0} x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} F_{i,j+1} w_j \quad (9)$$

donde x_0 es el valor inicial del estado. De la ecuación (9) se tiene que x_i es una combinación lineal de x_0 y $w_1, w_2, \dots, w_{i-1}$.

Por hipótesis, el vector de ruido v_i es descorrelacionado tanto del vector de estado inicial como del vector de ruido w_i . Multiplicando ambos lados de (8) por v_k^T y tomando los valores esperados, se deduce que:

$$E\{x_i v_k^T\} = 0 \quad (10)$$

Así mismo, a partir de la ecuación (3). Multiplicando ambos lados de dicha ecuación por v_k^T , tomando los valores esperados y considerando (10) y (4) se tiene:

$$E\{y_i v_k^T\} = 0 \quad (11)$$

Usando esta relación y reacomodando términos, la ecuación (8) se puede escribir como:

$$E\left\{\left(I - G_k H_k - G_k^{(1)}\right) x_k y_i^T + G_k^{(1)} (x_k - \hat{x}_k^-) y_i^T\right\} = 0 \quad (1.1)$$

donde I es la matriz identidad. Ahora del principio de ortogonalidad:

$$E\{(x_k - \hat{x}_k^-)y_i^T\} = 0$$

De acuerdo a la expresión anterior, (9) se puede simplificar a:

$$(I - G_k H_k - G_k^{(1)}) E\{x_k y_i^T\} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (13)$$

Para valores arbitrarios del estado x_k y y_i observable, la ecuación (13) solo puede ser satisfecha si los factores $G_k^{(1)}$ y G_k son tales que:

$$I - G_k H_k - G_k^{(1)} = 0$$

o equivalentemente:

$$G_k^{(1)} = I - G_k H_k \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (5) se puede expresar el estado estimado a posteriori al tiempo k como:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (15)$$

Debido a esto G_k es llamada la ganancia de Kalman. Ahora solo queda el problema de determinar una fórmula explícita para G_k . A partir del principio de ortogonalidad se tiene:

$$E\{(x_k - \hat{x}_k)y_k^T\} = 0 \quad (16)$$

de lo cual se sigue:

$$E\{(x_k - \hat{x}_k)\hat{y}_k^T\} = 0 \quad (17)$$

donde $\hat{y}_k$ es un estimado de y_k dadas las mediciones anteriores $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$. Definiendo las “innovaciones” del proceso como:

$$\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k \quad (18)$$

La “innovación” del proceso representa una medición de la nueva información contenida en y_k , esto puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_k - H_k \hat{x}_k^- \\ \tilde{y}_k &= H_k x_k + v_k - H_k \hat{x}_k^- \\ \tilde{y}_k &= H_k \tilde{x}_k^- + v_k \end{aligned} \quad (19)$$

con $\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$. Entonces sustrayendo (17) de (16) y después usando (18) podemos escribir:

$$E\{(x_k - \hat{x}_k)\tilde{y}_k^T\} = 0 \quad (20)$$

Usado las ecuaciones (3) y (15) podemos expresar el vector de error de predicción como:

$$\begin{aligned} x_k - \hat{x}_k &= \tilde{x}_k^- - G_k(H_k \tilde{x}_k^- + v_k) \\ x_k - \hat{x}_k &= (I - G_k H_k)\tilde{x}_k^- - G_k v_k \end{aligned} \quad (21)$$

con $\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$. Entonces sustituyendo (19) y (21) en (20) se tiene:

$$E\{[(I - G_k H_k)\tilde{x}_k^- - G_k v_k](H_k \tilde{x}_k^- + v_k)^T\} = 0 \quad (22)$$

Debido a que el ruido de medición v_k es independiente del estado x_k y por lo tanto del error $\tilde{x}_k^-$, la esperanza de la ecuación (22) se reduce a:

$$(I - G_k H_k)E\{\tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T}\}H_k^T - G_k E\{v_k v_k^T\} = 0 \quad (23)$$

Definiendo la matriz de covarianza a priori:

$$\begin{aligned}
 P_k^- &= E\{(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T\} \\
 P_k^- &= E\{\tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T}\}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Entonces involucrando las definiciones de covarianza de (4) y (24) podemos describir (23) como:

$$(I - G_k H_k) P_k^- H_k^T - G_k R_k = 0$$

Resolviendo esta ecuación para G_k , obtenemos la fórmula deseada.

$$G_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \tag{25}$$

La ecuación (25) es la deseada fórmula para calcular la ganancia de Kalman G_k , la cual es definida en términos de la matriz de covarianza a priori P_k^- . Para completar el proceso recursivo de estimación, debemos considerar la propagación de la covarianza del error, lo que describe los efectos del tiempo en las matrices de covarianza de los errores de estimación. Esta propagación involucra dos pasos de cálculo.

Paso 1. La matriz de covarianza a priori P_k^- al tiempo k está definida por la ecuación (24). Dada P_k^- , calcular la matriz de covarianza a posteriori P_k , la cual, al tiempo k está definida por:

$$\begin{aligned}
 P_k &= E\{\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T\} \\
 P_k &= E\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Paso 2. Dada la “antigua” matriz de covarianza a posteriori P_{k-1} , calcular la matriz de covarianza a priori “actualizada” P_k^- . Para proceder con el Paso 1, sustituimos (22) en (25) y dado que el ruido de medición v_k es independiente del error de estimación a priori $\tilde{x}_k^-$. Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_k &= (I - G_k H_k) E\{\tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T}\} (I - G_k H_k)^T + G_k E\{v_k v_k^T\} G_k^T \\
 P_k &= (I - G_k H_k) P_k^- (I - G_k H_k)^T + G_k R_k G_k^T
 \end{aligned} \tag{27}$$

Expandiendo términos en la ecuación (27) y usando la ecuación (25) podemos reformular la dependencia de la matriz de covarianza a posteriori P_k , sobre la matriz de covarianza a priori P_k^- , en la siguiente forma simplificada:

$$\begin{aligned} P_k &= (I - G_k H_k) P_k^- - (I - G_k H_k) P_k^- H_k^T G_k^T + G_k R_k G_k^T \\ P_k &= (I - G_k H_k) P_k^- - G_k R_k G_k^T + G_k R_k G_k^T \\ P_k &= (I - G_k H_k) P_k^- \end{aligned} \quad (28)$$

Para el segundo paso de la propagación de la covarianza del error, primero reconocemos que el estimado del estado a priori es definido en términos del “antiguo” estimado a posteriori como sigue:

$$\hat{x}_k^- = F_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (29)$$

Ahora podemos expresar el error de estimación a priori como:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- \\ \tilde{x}_k^- &= (F_{k,k-1} x_{k-1} + w_{k-1}) - (F_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}) \\ \tilde{x}_k^- &= F_{k,k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \\ \tilde{x}_k^- &= F_{k,k-1} \tilde{x}_{k-1} + w_{k-1} \end{aligned} \quad (30)$$

Usando (30) en (24) y notando que el ruido del proceso w_k es independiente de $\tilde{x}_k^-$ se tiene:

$$\begin{aligned} P_k^- &= F_{k,k-1} E\{\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^T\} F_{k,k-1}^T + E\{w_{k-1} w_{k-1}^T\} \\ P_k^- &= F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \quad (31)$$

Lo que define la dependencia de la matriz de covarianza a priori P_k^- sobre la “antigua” matriz de covarianza a posteriori P_{k-1} . En ausencia de datos observados al tiempo $k = 0$, podemos escoger el estado estimado inicial como:

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\} \quad (32)$$

Y el valor inicial de la matriz de covarianza a posteriori como:

$$P_0 = E\{(x_0 - E\{x_0\})(x_0 - E\{x_0\})^T\} \quad (33)$$

Esta selección para las condiciones iniciales no es solo intuitivamente satisfactoria, tiene la ventaja de mantener el estado sin bias.

Resumen del filtro de Kalman

- Modelo en espacio de estado.

$$x_{k+1} = F_{k+1,k}x_k + w_k$$

$$y_k = H_k x_k + v_k$$

donde w_k y v_k son independientes, con media cero, Gaussianos, con matrices de covarianza Q_k y R_k respectivamente.

- *Inicialización para $k = 0$:*

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}$$

$$P_0 = E\{(x_0 - E\{x_0\})(x_0 - E\{x_0\})^T\}$$

- *Cálculo: para $k = 1, 2, \dots$ calcular:*
 - Propagación del estado estimado

$$\hat{x}_k^- = F_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}^-$$

- Propagación de la covarianza del error

$$P_k^- = F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

- Matriz de la ganancia de Kalman

$$G_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}$$

- Actualización del estado estimado

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

- Actualización de la covarianza del error

$$P_k = (I - G_k H_k) P_k^-$$

Filtro de Kalman extendido

El filtro de Kalman estudiado hasta aquí, supone un modelo lineal de un sistema dinámico. Sin embargo, en ocasiones, el modelo es no lineal, se extenderá el uso del filtro de Kalman a través de un procedimiento de linealización. El filtro de Kalman resultante es conocido como Filtro de Kalman Extendido (EKF). Tal que una extensión es factible en virtud de que el filtro de Kalman es descrito en términos de ecuaciones en diferencias, en el caso de sistemas en tiempo discreto. Considere un sistema dinámico no lineal descrito por el siguiente modelo en espacio de estado.

Como antes w_k y v_k son independientes, con media cero, ruidos blancos, Gaussianos con matrices de covarianza R_k y Q_k respectivamente. El funcional $f(k, x_k)$ denota la función matricial no lineal de transición,

posiblemente variante en el tiempo, $h(k, x_k)$ denota la matriz de medición no lineal que también puede ser variante en el tiempo. La idea básica del filtro de Kalman extendido es linealizar el modelo en espacio de estado de las ecuaciones (34) y (35) a cada instante de tiempo alrededor del estado estimado más reciente, el cual puede ser tomado entre $\hat{x}_k$ o $\hat{x}_k^-$, dependiendo del funcional que es considerado, en particular. Una vez que el modelo lineal es obtenido, las ecuaciones del filtro de Kalman lineal son aplicadas.

Explícitamente, la aproximación procede en dos pasos:

Paso 1. Se construyen las siguientes matrices:

$$F_{k+1,k} = \left. \frac{\partial f(k, x_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad (36)$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h(k, x_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-} \quad (37)$$

Paso 2. Una vez que las matrices $F_{k+1,k}$ y H_k son evaluadas, se emplean en una aproximación de Taylor de primer orden para las funciones no lineales $f(k, x_k)$ y $h(k, x_k)$ alrededor de $\hat{x}_k$ y $\hat{x}_k^-$ respectivamente. Específicamente, se aproximan como sigue:

$$F(k, x_k) \approx F(x, \hat{x}_k) + F_{k+1,k}(x, \hat{x}_k) \quad (38)$$

$$H(k, x_k) \approx H(x, \hat{x}_k^-) + H_{k+1,k}(x, \hat{x}_k^-) \quad (39)$$

Con la aproximación anterior, procedemos a aproximar las ecuaciones de estado no lineales (34) y (35) como se muestra:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\approx F_{k+1,k}x_k + w_k + d_k \\ \bar{y}_k &\approx H_kx_k + v_k \end{aligned}$$

Ahora introduciremos dos nuevas cantidades:

$$\bar{y}_k = y_k - \{h(x, \hat{x}_k^-) - H_k \hat{x}_k^-\} \quad (40)$$

$$d_k = f(x, \hat{x}_k) - F_{k+1,k} \hat{x}_k \quad (41)$$

Las entradas en términos de $\bar{y}_k$ son conocidos al tiempo k y después $\bar{y}_k$ puede ser una medición considerada al tiempo k . Así mismo las entradas en el término d_k son todas conocidas al tiempo k .

Dadas las ecuaciones del modelo en espacio de estado linealizadas se procede a realizar el mismo procedimiento que en el caso del filtro de Kalman lineal.

Resumen del filtro de Kalman extendido

- Modelo en espacio de estado.

$$x_{k+1} = f(k, x_k) + w_k$$

$$y_k = h(k, x_k) + v_k$$

donde w_k y v_k son independientes, con media cero, Gaussianos, con matrices de covarianza Q_k y R_k respectivamente.

- Definiciones.

$$F_{k+1,k} = \left. \frac{\partial f(k, x_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k}$$

$$H_k = \left. \frac{\partial h(k, x_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$$

- Inicialización para $k = 0$:

$$\hat{x}_0 = E\{x_0\}$$

$$P_0 = E\{(x_0 - E\{x_0\})(x_0 - E\{x_0\})^T\}$$

- Cálculos: Para $k = 1, 2, \dots$ calcular
 - Propagación del estado estimado

$$\hat{x}_k^- = f(k, \hat{x}_{k-1})$$

- Propagación de la covarianza del error

$$P_k^- = F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

- Matriz de la ganancia de Kalman

$$G_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}$$

- Actualización del estado estimado

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G_k y_k - h(k, \hat{x}_k^-)$$

- Actualización de la covarianza del error

$$P_k = (I - G_k H_k) P_k^-$$

Análisis de estabilidad del filtro de Kalman discreto

Tomando (3) y reemplazando $\hat{x}_k^-$ con $F_{k-1} \hat{x}_{k-1}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= F_{k-1} \hat{x}_{k-1} + G_k (y_k - H_k F_{k-1} \hat{x}_{k-1}) \\ \hat{x}_k &= (F_{k-1} - G_k H_k F_{k-1}) \hat{x}_{k-1} + G_k y_k \end{aligned} \quad (42)$$

Calculando la transformada z a ambos lados de (42) y recordando que retardar $\hat{x}_k$ un paso en el tiempo equivale a multiplicarlo por z^{-1} , en el dominio de z resulta:

$$\hat{X}(z) = (F_k - G_k H_k F_k) z^{-1} \hat{X}(z) + G_k Y_k$$

Reacomodando términos:

$$[zI - (F_k - G_k H_k F_k)] \hat{X}(z) = z G_k Y_k \quad (43)$$

Finalmente, el polinomio característico es:

$$[zI - (F_k - G_k H_k F_k)] \quad (44)$$

Y las raíces de este polinomio determinan la estabilidad del filtro de Kalman discreto. Además, las raíces del polinomio característico corresponden a los valores propios de:

$$(F_k - G_k H_k F_k) \quad (45)$$

Notas

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Sistemas Dinámicos: Caracterización y Análisis

Se terminó de editar en noviembre de 2024

en los talleres de Astra Ediciones

Av. Acueducto No. 829

Colonia Santa Margarita, C. P. 45140

Zapopan, Jalisco, México.

33 38 34 82 36

E-mail: edicion@astraeditorial.com.mx

www.astraeditorialshop.com

SISTEMAS DINÁMICOS

Caracterización y Análisis

Esperamos que nuestros alumnos encuentren el mundo de los Sistemas Dinámicos tan fascinantes, como los son para nosotros. Es por ello que hemos volcado en este libro muchos de los conceptos principales al respecto y que no es posible encontrarlos en un solo documento existente.

Este libro está colmado de ejemplos resueltos con el objetivo de darles, a nuestros alumnos, una amplia variedad de aplicaciones, tanto de sistemas lineales como no lineales, en tiempo discreto y en tiempo continuo, considerando cuatro aspectos esenciales de los sistemas dinámicos: modelado, controlabilidad, observabilidad y estabilidad. Así como una breve introducción a retroalimentación de estado y diseño de observadores.

Alma Yolanda Alanís García y Jesús Gilberto Álvarez Carreón



ISBN: 978-84-10215-87-0



astra
editorial