

Elementos de álgebra linear em atividades envolvendo os conceitos de independência e dependência linear¹⁹

Elementos de álgebra lineal en actividades que involucran los conceptos de independencia y dependencia lineal²⁰

Renan Marcelo da Costa Dias
Universidade Federal do Pará
Brasil

<https://orcid.org/0000-0002-4305-9948>

E-mail: renanmarcelo1998@gmail.com

João Cláudio Brandemberg (Orientador)
Universidade Federal do Pará
Brasil

<https://orcid.org/0000-0001-8848-3550>

E-mail: brand@ufpa.br

<https://doi.org/10.61728/AE24080095>

¹⁹ Capítulo elaborado considerando a inclusão de fragmentos da tese intitulada *Um Estudo Acerca da Inserção de Aspectos Históricos dos Conceitos de Dependência e Independência Linear em Cursos de Álgebra Linear*, para obtenção do grau de Mestre no programa “Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas”. Defendida: 22/02/2022. Este trabalho de pesquisa é uma produção do Grupo de Pesquisa “GEHEM – Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática”.

²⁰ Capítulo elaborado considerando a inclusão de fragmentos de la tesis titulada *Un Estudio Sobre La Inserción de Aspectos Históricos de Los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal en Cursos de Álgebra Lineal* para obtener el grado de Magister en el programa “Maestría en Educación en Ciencias y Matemáticas”. Sustentada: 22/02/2022. Este trabajo de investigación es una producción del Grupo de Investigación “GEHEM – Grupo de Estudios e Pesquisa em História e Ensino de Matemática”.

Resumen

El presente estudio se trata de un desarrollo de tesis de maestría, que tuvo como objetivo investigar cómo el desarrollo histórico de los conceptos de independencia y dependencia lineal puede ser abordado en cursos que involucren elementos de enseñanza de Álgebra Lineal. Este desdoblamiento tiene como objetivo la viabilidad de un abordaje basado en la presentación de actividades con sesgo histórico, estos conceptos, y otros elementos del álgebra lineal, como matrices, sistemas lineales y vectores, para una mejor comprensión de los contenidos, por parte de los estudiantes de los estudiantes de grado en Matemáticas y Educación Básica. Por tanto, inferimos, es necesario conocer aspectos del desarrollo histórico-epistemológico de estos conceptos.

Resumo

O presente estudo trata de um desdobramento de uma dissertação de mestrado, que teve por objetivo investigar de que forma o desenvolvimento histórico dos conceitos de Independência e Dependência Linear podem ser abordados em cursos que envolvam o ensino de elementos de Álgebra Linear. Tal desdobramento visa a viabilidade de uma abordagem a partir da apresentação de atividades com um viés histórico, destes conceitos, e de outros elementos da Álgebra Linear, como Matrizes, Sistemas Lineares e Vetores, para uma melhor compreensão dos conteúdos, por estudantes da licenciatura em Matemática e estudantes da Educação Básica. Para tanto, inferimos que é necessário conhecer de aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico destes conceitos.

Introdução

Elementos normalizadores, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada em 2017, e os projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, vem a se constituir em documentos normativos oficiais, balizadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), que tem como função formular as diretrizes curriculares da educação nacional,

tal qual as diretrizes dos cursos de formação de professores, com finalidade de servir de base de referência obrigatória para a elaboração de currículos acadêmicos e escolares, tanto na rede pública ou privada, em todo território brasileiro. (Gollo Júnior, 2019).

Nestes documentos, encontram-se as diretrizes que tem por finalidade o desenvolvimento dos estudantes, como sujeitos conscientes de seus direitos e deveres, e críticos em relação ao tratamento das diversas informações que lhes atingem, e que mobilizam conhecimentos para ações de posicionamento sobre uma realidade que os cerca. No que diz respeito à Matemática e suas tecnologias, para exemplificar, com relação ao ensino médio, a BNCC propõe uma consolidação, ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas, inicialmente, no ensino fundamental (Brasil, 2017, p. 529).

Em outros termos, considerando tais normalizadores, as competências e as habilidades desenvolvidas no âmbito do ensino fundamental, no ensino médio e no ensino superior, devem ser retomadas e concebidas como conhecimentos “prévios” que possam promover o desenvolvimento (ampliação, consolidação, aprofundamento) de novas competências e habilidades no processo de aprendizagem em Matemática.

Uma tal sistematização prevista nestes documentos normativos, infere a importância do contato com as diversas representações ou contextos de um mesmo objeto matemático. Uma assertiva, fundamentada no caráter de que, diferente de outras matérias, o acesso aos objetos de estudo da matemática acontece, favoravelmente, por meio do contato com suas múltiplas representações; o que é explicitado, na competência C04: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas”. (Brasil, 2017, p. 531).

Desse modo, o alcance a um maior número de representações do objeto matemático, garante ao estudante um conhecimento do conceito matemático de forma mais completa. Temos assim, uma garantia de validação,

pelos estudantes, dos resultados emergentes de seus procedimentos investigatórios em sala de aula, não apenas com argumentos empíricos, mas sobretudo alicerçado em conceitos matemáticos, potencializados a partir das leituras, das representações e das demonstrações de algumas proposições envolvidas.

Estas recomendações normativas, trazem aos estudantes, a visão de uma matemática em movimento, sujeita a erros e acertos, envolta num processo de buscas, questionamentos, conjecturas, refutações, aplicações e comunicações.

Assim, nossos estudantes serão desafiados a apresentar argumentos em defesa de suas ações formativas, frente aos problemas postos, podendo tomar a Matemática como uma ciência proveniente de práticas da humanidade na busca por soluções de problemas que lhes surgem ao longo do tempo, mas, sem descuidar das necessidades de experimentação e interiorização, natural, do raciocínio hipotético-dedutivo que caracteriza a matemática como ciência (Dias e Brandemberg, 2023).

Desta forma, somos conduzidos a um exercício reflexivo acerca da atuação dos docentes, em especial os que estão em formação inicial, nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática, frente às novas normativas, em vigor e emergentes. Tal exercício materializa-se no seguinte questionamento: Que ações formativas podem ser executadas junto aos estudantes e professores em formação para que concebam as competências, normatizadas, consideradas, como essenciais para um melhor processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos? Particularizando, aqui, elementos de Álgebra Linear.

Na busca por respostas ao nosso questionamento, entendemos que uma das formas de explicitar a importância da utilização de diferentes registros de um mesmo objeto matemático, e ainda da essencialidade do uso de argumentos consistentes para validação de resultados matemáticos, é incorporar essas mesmas concepções nos processos formativos do professor de matemática, em especial, nos cursos de Licenciatura.

Compreendemos as contribuições didáticas que as ações formativas, compostas por atividades, com ênfase em registros variados, e balizadas pelas normativas em discussão promovem aos processos de ensino e de aprendizagem, e aos licenciandos em matemática, o encontro da significância e dos significados, para balizar o seu próprio fazer docente em sala de aula.

Consideramos, dentre as disciplinas de formação nas Licenciaturas em Matemática, a Álgebra Linear como adequada, pois pode tratar de uma sequência de experiências com conteúdos da Educação Básica, nas quais a importância dos aspectos que vimos discutindo, se efetiva.

Em acordo com Dias (2022, p. 18), é a Álgebra Linear que oportuniza ao licenciando o primeiro contato com o rigor e o formalismo necessários ao estudo de objetos matemáticos, e os conceitos de Independência e Dependência Linear, que destacamos, emergem como um notável exemplo para se trabalhar a importância do uso dos mais diversos contextos e representações do objeto fundamental da Álgebra Linear, que é o conceito de Vetor, para se compreender a linearidade como uma relação entre eles e não como um simples procedimento.

É oportuno destacar que a linguagem formal e a axiomática, com as quais os conceitos subjacentes à Álgebra Linear são abordados, emergem do caráter unificador e generalizante da teoria dos espaços vetoriais, que por sua vez remontam ao nascimento da própria Álgebra Linear enquanto campo disciplinar a partir do século XIX. (Dorier et al., 1995a, p. 177) (Dias, 2022).

De onde, observamos que o formalismo e a axiomatização exercem papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear, uma vez que possibilitam ao aluno compreender o caráter unificador e generalizante da referida disciplina, por meio da visualização de diferentes objetos matemáticos, em seus mais diversos contextos e representações. Desse modo, tais linguagens se constituem como elementos chave da disciplina (Dias, 2022).

Contudo, a praticidade do formalismo e da axiomatização da Álgebra Linear não é de fácil entendimento ao estudante, uma vez que para isto seria necessário conhecer os diversos contextos matemáticos que a subsidiaram. Desse modo, a História da Matemática emerge como um importante provedor de recursos didáticos nessas ações (Dias e Brandemberg, 2023).

Nosso desafio, como professores, portanto, concretiza-se em dar um aspecto funcional ao formalismo visando compreender diferentes aspectos anteriores dentro de uma mesma linguagem, para que os alunos consigam visualizar qualquer objeto matemático como um elemento em um determinado conjunto.

Nesse contexto, vemos na História da Matemática elementos de uma interessante alternativa didática para explicitar o caráter unificador e generalizante das noções de Independência e Dependência Linear, explicitados por Dorier (1994) e Dias (2022), bem como compreender a importância das linguagens formal e axiomática.

Muitos estudiosos têm defendido as contribuições que ações docentes balizadas em elementos da História da Matemática possibilitam aos processos de ensino e de aprendizagem, tais como Miguel e Miorim (2004), Mendes (2015) e Brandemberg (2018). Para estes autores, uma abordagem didática amparada na história fornece significado aos conteúdos matemáticos. Uma História da Matemática, com um tratamento adequado, que pode ser inserida em sala de aula tratando do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos e das relações envolvidas nos processos de ensino e aprendizagem, tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior (Brandemberg, 2010).

De fato, Brandemberg (2018, p. 4), infere que uma das formas de realizar essa inserção, é a elaboração de atividades de cunho histórico.

Frente ao cenário descrito, buscamos em nossa escrita, a partir dos conceitos de Independência e Dependência Linear, uma abordagem de ensino de conteúdos da Álgebra Linear que leve em consideração aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico destes conceitos. Objetiva-

mos assim, contribuir com a produção de um material que apresente potencial didático para o ensino de elementos de Álgebra Linear.

Sobre o ensino de elementos de álgebra linear

Nas últimas duas décadas, os processos de ensino e de aprendizagem envolvendo a Álgebra Linear ganharam novos e maiores espaços de discussão em pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática no Brasil.

Conforme vimos discutindo, nos cursos de Licenciatura em Matemática, a especificidade da Álgebra Linear consiste em oportunizar o primeiro contato do estudante com o rigor e o formalismo necessário no estudo de objetos matemáticos, em que o professor exige demonstrações lógicas e/ou argumentos explicativos de procedimentos e concepções conceituais adotadas (Dorier, 1998).

Segundo Dorier et al. (1994), o primeiro contato dos alunos com a disciplina Álgebra Linear, em termos gerais, é difícil, e não ocorre de maneira muito tranquila. Como forma de amenizar tais dificuldades, os professores tendem a minimizar a presença do formalismo na condução da disciplina e priorizam aspectos algorítmicos e operacionais em suas tarefas. No entanto, tal abordagem acarreta uma formação deficiente, uma vez que, apesar de conseguirem resolver tais tarefas, os alunos apresentam lacunas significativas na compreensão conceitual de noções elementares.

No que diz respeito aos conceitos de Independência e Dependência Linear, Dias (2022, p. 22) defende que estes carecem de uma investigação mais aprofundada, tendo em vista que não são bem compreendidos em uma abordagem inicial da Álgebra Linear, e ainda são um dos principais sinalizadores da não visualização da relação de dependência entre vetores em objetos diferentes das n -uplas, tais como matrizes, funções e polinômios. Além disso, a dificuldade de aprendizagem desses conceitos reverbera em outros, haja vista que são retomados ainda dentro dos Espaços Vetoriais e no estudo dos Sistemas de Equações Lineares e das Transformações Lineares.

Nessa perspectiva, com o propósito de uma maior compreensão das dificuldades apontadas pela literatura no que se refere à aprendizagem dos conceitos de Independência e Dependência Linear, realizamos uma revisão em teses e dissertações brasileiras que tenham investigado a referida temática entre os anos de 2000 e 2022. Assim, trazemos Grande (2006), Andrade (2010) e Souza (2016), para dialogar com nossas referências, que vimos discutindo. Uma vez que o cerne destes trabalhos se constitui na identificação de obstáculos à compreensão dos conceitos em foco.

O estudo de Grande (2006) teve por objetivo investigar quais são os registros de representação semiótica mais utilizados em livros didáticos de Álgebra Linear com relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear. A fim de obter base à sua análise, realizou uma investigação do desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear, levantando as dificuldades dos alunos quando estes lidam com os conceitos supracitados, na literatura internacional, pois, seu trabalho é pioneiro no Brasil sobre o tema.

De maneira geral, evidenciou que a dificuldade mais comum nos conceitos de Dependência e Independência Linear diz respeito à transposição desses conceitos a outros contextos.

Andrade (2010) pesquisou os requisitos necessários ao desenvolvimento de softwares educativos que amparassem a aprendizagem à distância dos conceitos de Dependência e Independência Linear, a partir da elaboração de um instrumento para levantar as dificuldades de aprendizagem nesses conceitos. Ainda, Andrade (2010), discute a visualização dos conceitos de Dependência e Independência Linear e o excesso do formalismo e abstração inerentes aos objetos da Álgebra Linear

Souza (2016) investigou as dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática com relação aos conceitos de Dependência e Independência Linear por meio da aplicação de um questionário. Em sua análise, percebeu que as dificuldades estavam atreladas tanto à natureza particular da disciplina Álgebra Linear quanto aos aspectos subjetivos dos alunos.

Em acordo, com o apresentado por Grande (2006), Andrade (2010) e Souza (2016), inferimos, fortemente, que as dificuldades envolvendo os processos de estudo dos conceitos em questão estão diretamente relacionadas ao caráter formal com que eles são apresentados, e que para o aluno esse formalismo não faz sentido algum e, eventualmente, o conduz a memorização de procedimentos sem compreendê-los.

Diante dos estudos supracitados, foi possível observar que a principal dificuldade na compreensão dos conceitos de Dependência e Independência Linear, pontuada em nossas referências, diz respeito ao fato dos alunos não visualizarem um conceito, em diferentes registros de representação, assim como em outros contextos matemáticos que não as tradicionais n -uplas.

Apesar das linguagens formal e axiomática com a qual os conceitos de Independência e Dependência Linear são trabalhados em cursos de licenciatura em Matemática serem visualizadas como sendo aspectos problemáticos que impossibilitam a compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, em acordo com Dias (2022), é necessário ressaltar que essas linguagens emergiram de sua própria constituição, a partir do século XIX. Um desenvolvimento, que descrevemos na próxima seção.

Dorier (1995a) concebe a teoria dos espaços vetoriais como um exemplo de teoria unificadora e generalizante, haja vista sua concepção de conceitos dessa natureza. Nesse prisma reflexivo, o referido autor distingue duas etapas na construção de um conceito unificador e generalizante, que segundo ele correspondem a dois processos mentais na aprendizagem.

- I O reconhecimento de semelhanças entre objetos, ferramentas e métodos dá vida ao conceito unificador e generalizante
- II A explicitação do conceito unificador e generalizante como objeto induz uma reorganização de antigas competências e elementos do conhecimento.

A ideia, portanto, consiste em inserir o aluno em uma atividade matemática na qual ele possa resolver e ao mesmo tempo refletir sobre algumas possibilidades de generalização e unificação dos métodos que ele mesmo desenvolveu, no intuito de visualizar suas praticidade e simplificação.

Dessa forma, vemos na História da Matemática elementos de uma interessante alternativa didática para explicitar o caráter unificador e generalizante das noções de Independência e Dependência Linear, bem como para compreender a importância das linguagens formal e axiomática em tais processos. (Brandemberg, 2018) (Dias, 2022).

A adoção de elementos da História da Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática encontra seus adeptos principalmente por suas contribuições à formação conceitual e procedimental com significado aos alunos e por suas potencialidades às ações formativas do professor.

Ao tomarmos a História da Matemática como nossa aliada na busca de novas alternativas de transposição didática para o ensino de Matemática, devemos trabalhar o desenvolvimento histórico-epistemológico de determinados conteúdos matemáticos (conceitos matemáticos, objetos matemáticos) sempre com o propósito de localizar possibilidades pedagógicas que possam auxiliar na superação das dificuldades encontradas por professores e estudantes de Matemática nos ambientes de ensino. (Brandemberg, 2018).

Nesse contexto, podemos afirmar que o uso da História da Matemática só terá sentido se tivermos ciência das metas e dos objetivos que desejamos alcançar em sua utilização.

Nesse sentido, explicitamos a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos de Independência e Dependência Linear, e construímos uma história voltada para fins pedagógicos e que emerge da problematização dos atuais processos de ensino e aprendizagem dos referidos conceitos, e de fundamental importância para a compreensão da Álgebra Li-

near, enquanto ideia unificadora, a qual não pode faltar ao professor da disciplina e deve estar presente em todos os momentos para que os alunos percebam toda a sua extensão e não tenham uma visão parcial e deformada do assunto (Dias, 2022).

A História da Matemática colocada em foco neste material concentra-se na possibilidade de contribuir aos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, de maneira geral, por meio da compreensão conceitual e procedimental com significado pelo estudante.

Desse modo, não se trata de conduzir o aluno para que este faça uma reconstrução do caminho que os matemáticos construíram, mas sobretudo dar possibilidades aos alunos de reflexão sobre as estratégias cognitivas desenvolvidas por esses mesmos matemáticos e que ele possa obter a partir destas, subsídios epistemológicos que lhe possibilitem desenvolver suas próprias estratégias de pensamento e que dê significado aos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula (Brandemberg, 2018).

Nesse sentido, é que apresentamos a seguir, elementos históricos do desenvolvimento de conceitos e objetos que compõem a Álgebra Linear, tais como Independência e Dependência Linear, Geradores, Base e Dimensão de Um Espaço Vetorial, Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Tal abordagem deve possibilitar uma configuração destes elementos em fonte de recursos didáticos, a serem utilizados para a elaboração das atividades, envolvendo os conceitos de Independência e Dependência Linear, apresentadas em um viés histórico.

Aspectos históricos da álgebra linear

Nesta seção, apresentamos elementos históricos do desenvolvimento dos conceitos que compõem a Álgebra Linear, mais precisamente, Independência e Dependência Linear, Geradores, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial e Transformações Lineares, referenciados, principalmente, em Dias (2022), Dorier (1994, 1995a, 1995b, 1998, 2000) e Moore (1995)..

Nosso propósito é evidenciar o modo como o caráter unificador e generalizante da disciplina desponta de sua própria constituição, bem como de explicar o papel exercido pelas linguagens formal e axiomática nesse processo, e assim, inserir esses elementos em atividades, de cunho histórico, para o ensino.

Conforme discutido anteriormente, apesar da Álgebra Linear ser concebida como um campo disciplinar relativamente novo no meio acadêmico, cuja institucionalização como saber acadêmico remonta ao período de 1910 a 1930, os conteúdos que o compõem são manuseados desde a antiguidade. Os sistemas de equações lineares constituem o contexto matemático no qual os primeiros conceitos da Álgebra Linear foram desenvolvidos, contudo, as civilizações antigas que os manuseavam preocupavam-se apenas em prover métodos de resolução de problemas. A partir do século XVIII, os matemáticos lançaram olhares teóricos sobre os sistemas de equações lineares (Dorier, 1995b).

Os primeiros passos no decurso de uma análise mais sistemática acerca das equações lineares foram dados em 1750 pelos matemáticos Gabriel Cramer (1704 –1752) em sua *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, na qual foi apresentada uma estrutura que preconiza os determinantes, e por Leonhard Euler (1705 – 1783) em seu *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*, no qual foi discutido o paradoxo de Cramer em relação ao número de pontos para a determinação (construção) de curvas algébricas. (Dorier, 1995b).

Euler tomou inicialmente as seguintes equações $3x-2y=5$ e $4y=6x-10$ e, por meio do processo de eliminação e substituição, concluiu que era impossível determinar as duas incógnitas, pois ao tentar eliminar x, y desaparecia e uma equação idêntica surgia. Euler explicou que o motivo do aparecimento desse 'incidente' seria o fato de que a primeira equação nada mais era do que o dobro da segunda e assim não se diferenciariam em nada (Dorier, 1995b).

Para Dorier (1995b; 2000), um leitor moderno ao se deparar com a palavra confinada [enfermée] seria conduzido rapidamente ao conceito de Dependência Linear, entretanto, embora Euler pudesse ter ciência das

relações lineares entre essas equações, sua análise repousava em um ‘incidente’ que ocorria durante o processo de eliminação e substituição e que resultava na indeterminação de incógnitas. Desse modo, Dorier (1995b; 2000) defende que na verdade o que Euler introduziu em seu trabalho foi a noção de Dependência Inclusiva e não de Dependência Linear.

Assentados em uma visão moderna da Álgebra Linear, o termo ‘uma equação contida nas outras’, empregado por Euler, conduz ao atual conceito de Dependência e Independência Linear, entretanto, tais conceitos referem-se a uma relação entre vetores, emergentes de diferentes naturezas, enquanto que a noção trabalhada por Euler é imersa em um contexto particular de equações.

Segundo Dorier (1995b; 2000), o conceito de dependência. em Euler é mais local e a noção atual de Dependência e Independência Linear carrega consigo um caráter unificador e generalizante, uma vez que generaliza e unifica uma definição de dependência para os demais objetos matemáticos, tais como n -uplas, matrizes e funções.

Embora a análise intuitiva de Euler tenha sido profícua para o surgimento de noções matemáticas que preconizam os conceitos de Dependência e Posto, ela não teve uma grande repercussão devido a rápida aceitação e utilização dos determinantes, instituídos por Cramer para a resolução de sistemas de equações, os quais exigiam mais técnica do que intuição. (Wussing, 1998).

Georg Ferdinand Frobenius (1849 – 1917), foi o primeiro a apresentar, de forma clara e concisa, uma definição de Dependência e Independência para equações e n -uplas, sem o uso dos determinantes. Em seu *Über das Pfaffsche Problem* publicado em 1875, Frobenius definiu, em termos modernos, as noções de Dependência e Independência Linear que abraçavam tanto as equações quanto as n -uplas (Dorier, 1995b; 2000).

Desse modo, é possível perceber que os sistemas de equações lineares e a teoria dos determinantes constituíram o contexto no qual conceitos

chave da linearidade, se fundam e relacionam-se com a teoria do Espaço Vetorial aplicado à dimensão finita. Contudo, foi com Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) e Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851) que, a partir do século XIX, o estudo dos determinantes se tornou efetivo (Dias, 2022).

Em 1829, Jacobi usou pela primeira vez os determinantes conhecidos como Jacobinos. Os determinantes jacobianos nada mais eram do que determinantes funcionais, porém, as notações usadas por Jacobi eram muito mais próximas das notações modernas do que as de Cauchy, além disso, Jacobi dedicou tanta ênfase aos determinantes funcionais que pensava nos determinantes ordinários numéricos como jacobianos de n funções lineares em n incógnitas (Baroni, 2009).

Apesar de Cauchy e Jacobi, dentre outros matemáticos, terem ofertado significativos avanços no estudo dos determinantes em favor da construção de uma álgebra matricial, bem como, tenhamos conhecimento de que na obra de Herman Grassmann, datada de 1844, foi usado algo bem semelhante às matrizes, à Arthur Cayley (1821 – 1895) é dado o crédito do pioneirismo da teoria das matrizes em sua obra *A memoir on the Theory of Matrices*, publicada em 1858 na forma de artigo na *Philosophical Transactions* da Royal Society of London (Santos, 2011.).

A obra de Cayley trata especificamente sobre a teoria das transformações, na qual ele definiu o conceito de matriz como sendo “Um conjunto de quantidades em forma de quadrado” (Cayley, 1889, p. 475 apud Santos, 2011, p. 37), ou seja, quando número de linhas é igual ao de colunas. Também foram tratadas as matrizes em que o número de linhas é diferente do de coluna, as quais ele conceituou como matrizes retangulares.

Segundo Santos (2011), Euler explicitou o caráter linear das fórmulas para transformação de coordenadas no plano e no espaço, e finalmente, com Etienne Bézout (1730 – 1783), a geometria analítica foi atrelada aos tradicionais problemas de linearidade.

Temos, então, a utilização de artifícios algébricos na resolução de problemas geométricos, no início do século XVII, a partir dos trabalhos in-

dependentes de dois matemáticos, a saber, Pierre de Fermat (1607 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650). (Dorier, 2000),

Conforme colocado anteriormente, é este formato, que leva à representação geométrica dos números complexos, no século seguinte, em um contexto no qual o desenvolvimento de uma análise geométrica intrínseca pôde ser executado, contudo os matemáticos que legitimaram tais números a partir de suas representações não conseguiram as transpor para o espaço tridimensional.

É nesse contexto que Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) surgiu como sendo o matemático que encontrou a solução desse problema que tanto assolou os matemáticos. Durante suas tentativas em resolver o problema, Hamilton mudou várias vezes sua perspectiva geométrica para a algébrica. Foi então que ele decidiu concentrar sua análise não nas propriedades algébricas, mas sim na natureza geométrica da multiplicação no plano, representada por vetores. (Dorier, 2000).

Nesse sentido, Hamilton percebeu que era mais conveniente o uso de quádruplas ao invés de ternas para que o cálculo geométrico tridimensional fosse possível, além disso, ele percebeu que o produto entre as quádruplas não poderia gozar da comutatividade, uma vez que as rotações não comutam. Assim, tendo em vista seus resultados, em 1844 Hamilton publicou os primeiros elementos do que chamou de ‘Teoria dos Quatérnios’. Os Quatérnios de Hamilton tiveram uma grande repercussão no meio matemático uma vez que eles quebravam a intocável lei da comutatividade para a multiplicação, fato este que se tornou o marco inicial do estudo de novas álgebras. (Dorier, 1995b).

Segundo Dias (2022, p. 72), nesse sentido, novos avanços só emergem com a descoberta das geometrias não euclidianas e com o desenvolvimento das geometrias projetiva e algébrica novas geometrias, baseadas nos métodos analíticos e na teoria dos determinantes e matrizes, encontram-se os germens das primeiras noções de uma teoria unificada de linearidade, e assim, da Álgebra Linear como campo de pesquisa.

Em 1844, Hermann Grassmann deu o primeiro passo rumo à uma teoria unificada da linearidade por meio da publicação da sua *Die Lineale Ausdehnungslehre* que, segundo ele, fazia parte de uma teoria ainda mais geral chamada *Die Ausdehnungslehre*. Em sua publicação, ele conseguiu definir e provar a maioria das propriedades elementares dos Espaços Vetoriais de dimensão finita (Dorier 1995b; 2000).

Na obra de Grassmann encontra-se no fato de nela conter bases pertinentes para uma teoria unificada da linearidade, uma vez que seu autor introduziu com precisão e em um contexto generalizado conceitos elementares da Álgebra Linear, como Dependência Linear, Base e Dimensão.

Segundo Dias (2022, p. 73), é possível observar na obra de Grassmann um grau de complexidade elevado advindo principalmente de suas bases filosóficas, ademais, ele não apresentava definições precisas, mas sim conceitos que emergiam de diferentes perspectivas e que eram validados a partir de seus pressupostos filosóficos e matemáticos, ligados geralmente a realidade física do espaço.

Caire (2020, p. 80), também nos evidencia uma definição de dependência apresentada no contexto do que Grassmann chamou de magnitudes. Imergindo sua definição em um contexto geométrico, com potencial para ser expandida para um *locus* muito mais generalizado.

Táboas (2010), ainda que o conceito de Dependência e Independência Linear não tenham sido criados por Grassmann, em sua obra eles ganharam um formato bem estruturado em termos axiomáticos, além do que, receberam um contexto numa visão global da matemática.

Um fato interessante, observado em Dorier (2000, p. 26), consiste quando Grassmann definiu um sistema de m unidades, ou seja, um sistema de m magnitudes lineares independentes, como o sistema de todas as combinações lineares das unidades, pois ele define adição, subtração, multiplicação e divisão por um número, e ainda institui uma lista de propriedades fundamentais que essas operações deveriam satisfazer, e das quais todas as leis algébricas eram decorrentes.

Embora o termo vetor tenha sido proposto pela primeira vez por Hamilton em 1875, a ideia de vetor como um segmento orientado esteve presente em trabalhos de outros matemáticos, dentre os quais, o de Grassmann. Os sistemas de Hamilton e de Grassmann competiram pela influência no meio acadêmico por um tempo. O primeiro alcançou sucesso entre os matemáticos no período de 1840 e 1870, entretanto, de 1870 e 1890 as publicações do segundo ganharam destaque e passaram a influenciar outros matemáticos. (Baroni, 2009),

Dentre esses matemáticos, Giuseppe Peano (1858 – 1932) foi um dos primeiros a chamar a atenção ao trabalho de Grassmann no decurso de seus estudos envolvendo vetores. De acordo com Moore (1995), Peano trabalhou com as noções de vetores de três maneiras distintas ao longo de sua vida.

A primeira maneira foi em 1887 na forma de n -uplas, na qual ele definiu adição e multiplicação escalar pela operação correspondente em cada coordenada. A segunda maneira foi tratada por Peano em 1888 na forma de um segmento de linha orientado, ou seja, como a diferença $B - A$ de dois pontos A e B . A terceira maneira, também em 1888, foi o que ele chamou de sistemas lineares, os quais eram essencialmente o que consideramos como Espaços Vetoriais sobre o conjunto dos números reais. (Dias, 2022). Estas abordagens são tratadas em seu livro *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* publicado em 1888 e que, segundo Peano, objetivam realizar uma discussão sobre o Cálculo Geométrico idealizado por Leibniz e desenvolvido Grassmann. Mais precisamente ele teve o propósito de deixar mais claro e acessível aos matemáticos da época a abordagem de Grassmann a partir de uma releitura (Moore, 1995).

Ainda para o Moore (1995, p. 268), o capítulo final Transformações de Sistemas Lineares é o de maior interesse, pois é neste capítulo que Peano apresentou a definição do que ele nomeou por Sistema Linear, o que em sua essência configura como um Espaço Vetorial sobre os números reais. Uma abordagem axiomática também foi utilizada para definir conceitos subjacentes aos Espaços Vetoriais, entre os quais, os conceitos de Independência e Dependência Linear.

Caire (2020, p. 96), ao estudar a obra de Peano, explicita de que forma a definição dos conceitos em foco fora apresentada por ele, contudo, resalta de antemão que Peano usou a palavra ‘ente’ para se referir a um vetor e a palavra ‘grupo’ para tratar de base.

Estes aspectos concernentes ao amadurecimento e consolidação da Álgebra Linear como campo disciplinar acadêmico, no início do século XX, não foram, nem poderiam ser finalizados nesta seção. Sendo que, complementações mais bem detalhadas e discutidas de maneira mais densa, podem ser encontradas em Dias (2022), referência de base para nossa argumentação, sobre aspectos da história da Álgebra Linear, neste artigo.

Atividades para uso em sala de aula: propor e exemplificar

Na sequência, nesta seção, apresentamos atividades didáticas elaboradas com o objetivo de promover uma compreensão dos conceitos de Independência e Dependência Linear como uma relação entre vetores, em diversos contextos ou representações que esses vetores estejam, seja como n-uplas, equações lineares, matrizes ou segmentos orientados. Assim, estudar a dependência entre vetores se faz essencial para o entendimento do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, assim como, da importância das linguagens formal e axiomática emergentes da constituição histórica da referida disciplina.

Antes de discutirmos as atividades elaboradas, é importante que retomemos o conceito de Combinação Linear, uma vez que os conceitos de Independência e Dependência Linear estão diretamente relacionados a este.

De um modo geral, uma Combinação Linear consiste em uma expressão matemática formada pela soma dos produtos entre objetos matemáticos, os vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e números reais, os escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, isto é, a expressão matemática, da forma: $v_1 \cdot \alpha_1 + v_2 \cdot \alpha_2 + \dots + v_n \cdot \alpha_n$ onde, os vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ podem ser: n-uplas numéricas, polinômios, matrizes, funções ou segmentos orientados, entre outros objetos matemáticos, constando em diferentes representações, conforme é possível observar nas atividades apresentadas a seguir.

Observamos que utilizamos em nossa apresentação as notações em acordo com a forma presente em livros de Álgebra Linear, utilizados atualmente nos cursos de licenciatura.

Neste primeiro momento, buscamos uma ordem elementar de apresentação, partindo de uma escolha de exemplos que coadunem com o desenvolvimento histórico dos conteúdos ao mesmo tempo que produzam uma ordem em escalas de dificuldades e sequência na apresentação dos conceitos. Oportunamente, frisamos que tais exemplificações, podem ser estruturadas, nos moldes do proposto em Mendes (2015) e Brandenberg (2018), partindo de um texto sintetizado do desenvolvimento histórico-epistemológico do conteúdo, ou mesmo de aplicações.

ATIVIDADE 01: Tendo em vista os vetores $u=(1,2)$ e $v=(2,4)$ e a Combinação Linear dada por $\alpha(1,2)+\beta(2,4)$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, resolva-a adotando:

a) $\alpha=1, \beta=3$

Resolução:

$$1. (1,2)+3.(2,4)=(1,2)+(6,12)=(7,14)$$

b) $\alpha=-2, \beta=5$

c) $\alpha=-4, \beta=2$

d) $\alpha=0, \beta=0$

e) $\alpha=-1, \beta=0$

ATIVIDADE 02: Considerando os vetores $u=(1,1,2), v=(2,3,1)$ e $w=(3,4,3)$, determinar valores $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, para os quais a combinação linear $\alpha(1,1,2)+\beta(2,3,1)+\gamma(3,4,3)$ seja igual ao vetor nulo do $\mathbb{R}^3$

ATIVIDADE 03: Classifique as Equações Lineares do sistema $\{8x-3y=2, 5x+2y=9\}$, em Linearmente Independentes ou Linearmente Dependentes, utilizando o método de Euler.

Como observamos, a atividade 01, de forma elementar, apresentam exemplificações de combinações lineares de vetores do $\mathbb{R}^2$. Trazendo no bojo a apresentação do conceito de vetor nulo, visando, estender o conceito para o $\mathbb{R}^3$. A complexidade da escrita da combinação linear na atividade 02, igualando ao vetor nulo do $\mathbb{R}^3$, e realizando as operações de multiplicação de um vetor por um escalar e, em seguida, executando a adição de vetores, nos apresenta, a partir de sua representação a necessidade de uso de um novo ente da Álgebra Linear, que identificamos como um Sistema de Equações Lineares, o qual, necessita de um processo de resolução, na obtenção dos escalares, sendo o mais utilizado, o método de eliminação de Gauss-Jordan. Na atividade 03, temos a apresentação formal do espaço das matrizes $M_{2 \times 2}$, e de uma classificação em um sistema de equações, quanto a sua linearidade. A resolução. Segue na linha do proposto por Euler

Nossa ideia inicial é tratar com oito atividades de cada tipo, em um total de 24 atividades, que julgamos o mínimo necessário para uma possível consolidação na apresentação destes conteúdos.

Considerações

Nos últimos vinte anos, como vimos, as pesquisas brasileiras desenvolvidas sob a égide do campo da Educação Matemática, e com relação aos processos de ensino e de aprendizagem em Álgebra Linear, têm evidenciado que cada vez mais os alunos têm apresentado fragilidades conceituais no que diz respeito a conteúdos elementares, dentre os quais, em Independência e Dependência Linear.

No visualizado nessas investigações, as dificuldades dos estudantes estão, inicialmente, no reconhecer as relações de “dependência” em outros objetos matemáticos, diferente das tradicionais n-uplas, tais como, equações lineares, matrizes, polinômios e segmentos orientados. Inferimos, então, que a natureza dessas dificuldades reside nas abordagens em linguagens formal e axiomática, e no formato abstrato, com o qual tais conteúdos são tratados.

Entretanto, o processo de constituição histórica da Álgebra Linear enquanto campo disciplinar nos evidencia que as linguagens formal e

axiomática emergiram como aspectos essenciais para a sua consolidação enquanto ideia unificadora e generalizante, e ainda hoje essas linguagens figuram elementos chave para o bom entendimento da disciplina em toda a sua completude, mas ao mesmo tempo em seus aspectos mais singulares.

Nesse sentido, defendemos que inserir aspectos históricos dos conceitos de Independência e Dependência Linear em cursos de Álgebra Linear pode conduzir o estudante a uma compreensão conceitual com significado das noções de linearidade, assim como a valorizar as linguagens necessárias ao ensino da Álgebra Linear. Desse modo, trouxemos aqui, na forma de atividades didáticas, explorações dos aspectos observados durante o processo de constituição histórica dos conceitos de Independência e Dependência Linear.

Reiteramos que, ao seguir esse caminho metodológico, não descartamos a importância e a necessidade do conhecimento da definição de Independência e Dependência Linear, bem como do procedimento usual para a sua verificação. Pelo contrário, entendemos que as situações didáticas, revestidas de aspectos históricos, agregam significado e significância para potencializar essas expertises.

Com relação às atividades a serem trabalhadas e ampliadas; na qualidade de pesquisadores dos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de Independência e Dependência Linear, balizados pela História da Matemática, esperamos que estas possam servir como uma fonte, inicial, de recursos para professores e estudantes, que anseiam por uma compreensão efetiva dos conceitos em estudo e que elucidem a importância e as necessidades dos alunos em transitar por diferentes representações de um mesmo objeto matemático, e do uso da linguagem formal (e axiomática) para a validar conjecturas as quais ele mesmo tenha chegado, por meio de procedimentos próprios de investigação.

Referências

- Andrade, J. P. G. (2010). *Vetores: interações a distância para a aprendizagem de Álgebra Linear* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica]. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
- Baroni, R. L. S. (2009). *Aspectos históricos de alguns conceitos da Álgebra Linear*. SBHMat.
- Brandemberg, J. C. (2010). *Uma Análise Histórico-epistemológica do conceito de Grupo*. Livraria da Física.
- Brandemberg, J. C. (2018). *História e Ensino de Matemática: uma abordagem partindo do desenvolvimento histórico-epistemológico dos conteúdos*. *Anais do V Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT)*, 01-13.
- Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.
- Caire, E. (2020) *Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX*. [Tese de Doutorado em Educação]. Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- Dias, R. M. C. (2022). *Um estudo acerca da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear*. [Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas]. Universidade Federal do Pará (UFPA).
- Dias, R. M. C; Brandemberg, J. C. (2023). A Importância do Uso da História da Matemática nos Processos Educativos em Álgebra Linear. *Revista Exitus*. 13, 01 - 22, e023021.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1994). Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University. In *the Proceedings of the 18th conference of the international group for psychology of Mathematics Education, Lisbonne*, 4, 137 – 144. <https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf>
- Dorier, J. L. (1995a) Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175 – 197. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01274212>
- Dorier, J. L. (1995b). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. In: *Historia da Mathematica*, 22(3), 227 – 261.
- Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of theory of vector spaces. In: *Linear Algebra and its applications*, France, 275-275, pp. 141 – 160.

- Dorier, J. L. (2000). Epistemological Analysis of The Genesis of Theory of Vector Spaces. In: *On the teaching of Linear Algebra*. Grenoble, France: Kluwer Academia Publishers, 2000, pp. 1 – 73. https://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47224-4_1
- Gollo Júnior, R. A. (2019). Diretrizes Curriculares para Formação de Professores de Matemática – O Estado em Ação. Em: XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo, SP: UNICSUL, 01 – 13.
- Grande, A. L. (2006). *O conceito de Independência e Dependência Linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. [Dissertação de Mestrado]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, SP.
- Mendes, I. A. (2015). *A História da Matemática no Ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas*. Livraria da Física.
- Miguel, A. e Miorim, M. Â. (2004). *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Autêntica
- Moore, G. H. (1995). The axiomatization of Linear Algebra: 1875 – 1940. *Historia Mathematica*, 22, (3), 262 – 303. <https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1025>
- Santos, R. N. (2011). *Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes*. [Dissertação de Mestrado]. Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP.
- Souza, M. L. (2016). *Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática*. [Dissertação de Mestrado]. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR.
- Táboas, P. Z. (2010). Um estudo sobre as origens dos Espaços Vetoriais. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 10(19), 1 – 38. <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147>
- Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España Editores S.A.

